优化技术
在机械工程中的应用

南新旭　田崇纪　刘士贤　编

华北水利水电学院北京研究生部
科　技　情　报　室

优化技术
在机械工程中的应用

南新旭　田崇纪　刘士贤编

华北水利水电学院北京研究生部

科技情报室

内 容 简 介

本书是在优化技术文献与资料的基础上，整理、补充、修改写成。书中着重讨论了线性规划、整数规划、非线性规划和动态规划的基本原理、数学模型及求解方法，并介绍了机械工程上应用这项现代技术所取得的研究成果。

本书可供工程技术人员，科研工作者和高校师生与研究生参考。

ER53/23

优化技术在机械工程中的应用

华北水利水电学院北京研究生部科技情报室出版发行

中国建筑工业出版社印刷厂印刷

1983年6月第一版　第一次印刷

书号：83-1-001

编 者 的 话

最优化理论，当今广泛应用于社会科学和自然科学的各个领域，在机械工程中也大量的采用。实践证明采用优化理论进行部件、产品设计和安排制造工艺流程，能使机械减轻重量，提高质量和性能，降低原材料消耗与制造成本，从而获得最大的经济效益。

由于优化理论内容浩瀚，本书仅介绍与机械工程有关的线性规划、非线性规划、整数规划和动态规划等部分。对于每一部分内容，除了介绍其基本原理、基本概念、数学模型和求解方法外，还对灵敏度分析进行了较深入的讨论。

本书在阐明理论的基础上，引用与介绍了有关机械工程的运算实例。这些实例包括：机械零部件的最优化设计；机构的最优化设计；结构强度分析的优化问题及生产管理的最优决策等。

本书编写过程中，得到各级领导和有关同志的大力支持与帮助，在此仅致谢意。

由于编者水平有限，编写时间仓促，书中定会存在缺点与错误，欢迎读者批评指正。

1983年6月于北京

目　　录

第一篇　线 性 规 划

第一章　线性规划的基本概念及基本原理

§1-1　引言

线性规划是优化理论的重要组成部分，它与非线性规划、整数规划共同组成静态规划。

线性规划是从30年代末期开始研究的，到第二次世界大战后，在军事和工业部门均获得应用，特别是1947年戴塞（George.B. Dantzig）提出了单纯形法（Simplex method）以后，它的应用就更加日益广泛。60年代以来，由于高速电子计算机的出现和计算技术的发展，使规模较大、变量更多的线性规划数字模型也能很快求出最优解。到目前为止，线性规划在军事工程、空间科学、工农业生产和经济管理部门都得到广泛的应用，成为优化理论最有效的方法之一。

线性规划所考虑的问题，就是如何用最简单的方法，在各种相互关联的多变量线性约束条件下，去解决所研究对象的线性目标函数最优化问题。亦即在一组等式或不等式线性约束条件下，求线性目标函数的极值（最大或最小值）。显然这是一种条件极值问题，而这种极值问题，用微分的方法求解，往往是不可行的。

下面用实例来说明什么是线性规划问题，它的数学模型和最优解是什么型式的。

例 1-1：有一机床厂生产两种机床，对于不同产品生产一台所需原材料分别为2和3个单位数，所需工时分别为4和2个单位数，而其产值分别为6和4个单位数。如果每天工厂能提供的原材料为100个单位，能提供的工时为120个单位，试决策两种机床各

生产多少台才能使日产值最高。

这个问题的数学模型如下：

约束条件为

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\leqslant 100 & \text{原材料限制} \quad (1\text{-}1\text{-}1) \\ 4x_1+2x_2\leqslant 120 & \text{工时限制} \quad (1\text{-}1\text{-}2) \end{cases}$$

$$x_1\geqslant 0 \quad x_2\geqslant 0 \qquad \text{非负限制} \qquad (1\text{-}1\text{-}3)$$

目标函数为

$$max f(X)=6x_1+4x_2 \qquad (1\text{-}1\text{-}4)$$

对于上述两个变量x_1，x_2的规划问题可以在一平面上作图求解。作图步骤如下：

（1）找出满足第一个约束条件的区域。为此，需将约束条件写成等式，并划出$2x_1+3x_2=100$这一直线。显然，在$2x_1+3x_2=100$这一直线以下的区域均满足此约束条件。只要（⩽）不等式右端是非负的，原点也一定在此区域中。

（2）找出满足第二个约束条件的区域，同样是在$4x_1+2x_2=120$直线之下。

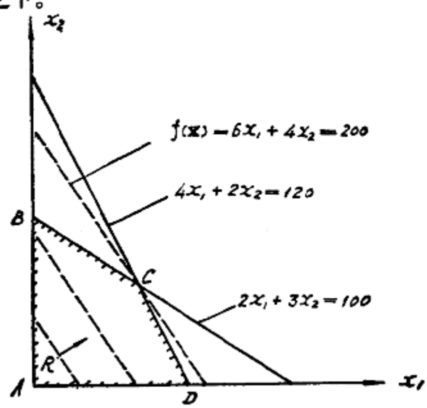

图 1-1

（3）由条件$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$及上述两条直线以下部分（包括两条直线）所构成的域R，因其中的任一点都满足所有约束条

件，故称为可行域，即图1-1中的阴影部分。可行域中满足约束条件的每一点，称为可行解，可行域即为可行解的集合。我们作图分析的目的就是从可行解中找出最优解，即找出目标函数$f(X)$的最大值。

（4）目标函数是变量x_1，x_2的线性函数，当$f(X)$为一定值时，即可绘出一条直线，其斜率取决于x_1，x_2前的系数，此系数称为产值系数。不同的$f(X)$值可构成一组平行直线，由图1-1可以看出，随着$f(X)$值的增长，目标函数直线逐渐向C点趋近。最后，$f(X)$直线有可能被推出可行域R之外，离开可行域前的最后一个拐点C。在C点，目标函数值是它在可行域中的最大值。因此C点的座标值（x_1，x_2）和$f(X)$值就是这个线性规划问题的最优解。由作图法可得$x_1=20$，$x_2=20$，$f(X)=200$。

在本例中，由约束条件所构成的可行域为凸多边形，亦即满足约束条件的一切点（即可行解）组成一个凸集。而凸集的顶点（拐点）座标值为基础可行解，且最优解一定在构成基础可行解的拐点上。在本例中，基础可行解为A、B、C、D。当目标函数中的价值系数c_1，c_2改变时，目标函数直线的斜率也随之而变，其最优解就有可能在B或D点。总之，最后会在拐点找到其最优解。对这一特性将在后面加以证明。

在本例中，有两个变量（x_1，x_2）和两个约束方程式（非负限制除外）。在线性规划中变量的个数有可能多于约束方程的个数或者少于约束方程的个数；这些都由问题的性质而定。

图解法仅适用于两个变量的线性规划，实用价值不大，但能形象的说明线性规划的基本概念。

§1-2　线性规划的数学模型及其解

根据上述例题，可以把线性规划问题抽象为一般数学模型，亦即求解一组变量x_1，x_2……x_n使之满足约束条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n(\geqslant=\leqslant)b_1 & (1\text{-}2\text{-}1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n(\geqslant=\leqslant)b_2 & (1\text{-}2\text{-}2)\\ \cdots\cdots\vdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

$$\left. a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n(\geqslant=\leqslant)b_m \right. \quad (1\text{-}2\text{-}3)$$

$$x_j\geqslant 0\ (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots n) \quad (1\text{-}2\text{-}4)$$

其中符号（$\geqslant=\leqslant$）表示有可能取三种符号中的任一种，并使得目标函数

$$f(X)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n \quad (1\text{-}2\text{-}5)$$

达到极大或极小。

其中c_j称为成本系数或产值（价值）系数，对前者来说通常是求极小值问题，对后者来说则常为求极大值问题。

如用矩阵表示线性规划模型，则可写成：

$$AX(\geqslant=\leqslant)\boldsymbol{b} \qquad X\geqslant 0 \quad (1\text{-}2\text{-}6)$$

$$max f(X)=CX \quad (1\text{-}2\text{-}7)$$

其中 $X=(x_1x_2\cdots\cdots x_n)^T$ （1-2-8）

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1\text{-}2\text{-}9)$$

$$\boldsymbol{b}=(b_1b_2\cdots\cdots b_m)^T \quad (1\text{-}2\text{-}10)$$

$$C=(c_1c_2\cdots\cdots c_n) \quad (1\text{-}2\text{-}11)$$

我们称这个线性规划 模型具 有几个结构变 量和m 个约束条件。系数a_{ij}，b_i和 c_j（$i=1$，2，$\cdots\cdots m$；$j=1,2$，$\cdots n$）通常是已知的（即常数），但也有为随机变量的。

上面所介绍的线性规划数学模型称为规划型线性规划问题。

解一个线性规划数学模型大体分为两步，下面通过对这两个步骤的具体分析，来构成线性规划的基本思路。

一、确定可行域和基础可行解

第一步是确定变量X满 足约束条件 的可 行范围， 又称可行域。显然，约束条件方程组的无穷多个可行解X，就组成了这个可行域。

在实际的线性规划数学模型中，约束条件通常为不等式。因此，当维数较高时，求满足不等式约束条件下可行域中的解是比

较困难的。而用等式约束条件就比较容易求解，因为等式约束条件的可行域比不等式约束条件大为缩小，故便于代数求解。可以证明，最优解在可行域凸多边形的拐点上，即等值约束条件的线、面或超平面的交点上。用图解法求解前面的例题就可以得到清楚的概念。因此，求解线性规划数学模型的一个重要思路是将不等式约束条件变换为等式约束条件，以利于求解。如何将不等式变换为等式将在后面有关章节讲述。这种等式约束条件的线性规划数学模型称为标准型线性规划问题。

如果约束条件已由不等式变换为等式，则等式约束可以写成

$$AX=\boldsymbol{b},\ X\geqslant 0 \tag{1-2-12}$$

A为$m\times n$矩阵，对于矩阵A来说，一般均能满足$m<n$这一关系。由于A的行秩必等于列秩，若都等于m，就表示A的行向量的极大线性无关的向量个数为m，A的列向量的极大线性无关的向量个数也等于m。我们可以任选A的线性无关的m个列向量为A的基础部分A_1，其余的$n-m$个列向量为非基础部分A_2，用分块矩阵的表示方法，可得

$$A=(A_1A_2) \tag{1-2-13}$$

式中

$$A_1=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mm} \end{bmatrix} \tag{1-2-14}$$

$$A_2=\begin{bmatrix} a_{1m+1}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{2m+1}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{mm+1}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-2-15}$$

一般来说，A_1可以选A中的列向量的各种不同组合，但这些列向量必须是线性无关的。

同样，变量X也可以分为X_1和X_2。

把线性无关的列向量组成的方阵A_1称为基阵或一组基。而

其余列向量组成的A_2阵称为非基阵。与之相对应我们称X_1为基向量，其中每个元素x为基础变量；称X_2为非基向量，其中的每个元素x为非基础变量。对应于（1-2-14），（1-2-15）式，可以把变量X写成

$$X=(X_1X_2)^T \tag{1-2-16}$$

其中

$$X_1=(x_1x_2\cdots\cdots x_m)^T\geqslant 0 \tag{1-2-17}$$

$$X_2=(x_{m+1}x_{m+2}\cdots\cdots x_n)^T\geqslant 0 \tag{1-2-18}$$

将（1-2-13）和（1-2-16）式代入（1-2-12）式则可得

$$AX=(A_1A_2)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=A_1X_1+A_2X_2=\boldsymbol{b} \tag{1-2-19}$$

基向量X_1又可写成

$$X_1=A_1^{-1}\boldsymbol{b}-A_1^{-1}A_2X_2 \tag{1-2-20}$$

由于基阵A_1的秩等于m，为非奇异阵，故其逆阵A_1^{-1}是存在的。对于这组基A_1，当$X_2=0$时，可得基本解（即线性代数中的特解）。如果又能满足$X_1=A_1^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$时，即为基础可行解。它相当于图解法图中的拐点。

根据（1-2-20）式，对于一定的A_1，考虑到$X_2=0$，可得X_1的唯一非零解为

$$X_1=A_1^{-1}\boldsymbol{b} \tag{1-2-21}$$

因为A_1是由A的m个基础列向量所组成，而A的基础列向量可有多种不同的选择，也就是说，A的列向量的极大线性无关组可以有不同的组合。一般有C_n^m个或小于C_n^m个。因为A_1为有限个不同的方阵，亦即有有限个基础可行解。下面将讨论如何在有限个基础可行解中找出最优解。

二、确定可行域中的最优解

下面介绍如何根据目标函数$f(X)$的要求，在有限个基础可行解中找出最优解的设想。

由（1-2-7）式，目标函数一般为

$$f(X)=CX \tag{1-2-22}$$

$$C=(C_1C_2) \qquad (1\text{-}2\text{-}23)$$

对应于基础变量X_1的系数为C_1，对应于非基变量X_2的系数为C_2，则目标函数为

$$f(X)=C_1X_1+C_2X_2 \qquad (1\text{-}2\text{-}24)$$

将（1-2-20）式代入（1-2-24）式得

$$f(X)=C_1A_1^{-1}\boldsymbol{b}+(C_2-C_1A_1^{-1}A_2)X_2 \qquad (1\text{-}2\text{-}25)$$

如果非基础变量X_2为零，则（1-2-25）式可写成

$$f(X)=C_1A_1^{-1}\boldsymbol{b}=f_0$$

从（1-2-25）式可知，如果X_2的系数是非正的，即

$$C_2-C_1A_1^{-1}A_2\leqslant 0 \qquad (1\text{-}2\text{-}26)$$

则要从X_2中引出任一变量x，使$x>0$，代入（1-2-25）式，将使目标函数值减少。也就是说，$f(X)$是X_2的非增函数。在这一情况下$f(X_1)=C_1A_1^{-1}\boldsymbol{b}$就是目标函数的最大值。对极大值问题来说，$X_1$就是最优解。我们称$C_2-C_1A_1^{-1}A_2$为单纯形系数。

反之，如果$C_2-C_1A_1^{-1}A_2>0$，则至少在X_2中有一个变量x有正的单纯形系数，x增加时，只要保持X_1是非负的，目标函数总会比以前增加。因此A_1中对应的X_1变量并不全都理想，需由X_2中的某一变量代替不理想的变量。相应地也需要由A_2中的对应列向量去置换出X_1中的不理想变量所对应的A_1中的列向量，这个步骤称为换基。通过换基就构成了一组新的基础变量X_1和新的基阵A_1，以及相应的X_2和A_2。

换基后，可再用（1-2-26）式进行检验，看其是否满足最优解的要求，如果不满足，再进行迭代，直至满足（1-2-26）式为止。

§1-3 线性规划问题的几种特殊情况

一般来说线性规划问题有单一的最优解，但有时也会遇到一些特殊情况。下面利用图解法来说明线性规划问题的几种特殊情况。

一、有重复最优解

例 1-2：若约束条件为

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\leqslant 60 & (1\text{-}3\text{-}1) \\ 3x_1+5x_2\leqslant 150 & (1\text{-}3\text{-}2) \end{cases}$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \qquad (1\text{-}3\text{-}3)$$

目标函数为

$$max f(X)=6x_1+10x_2 \qquad (1\text{-}3\text{-}4)$$

利用作图法求得其可行域为$ABCD$，如图1-2所示，而目标函数的等值线与可行域的一条边界线平行，即与方程式$3x_1+5x_2=150$的那条线平行。今要目标函数值为最大，因此应将目标函数等值线向右移动。当目标函数等值线不断向右移动时，最后将与这条边界线重合，并通过B、C两个顶点。此时目标函数值最大，其值为

$$max f(X)=6x_1+10x_2=300$$

由于目标函数等值线$6x_1+10x_2=300$与边界线BC重合，故在BC线段上的点均为最优解，此时最优解有无穷多个，即所谓有多重最优解。

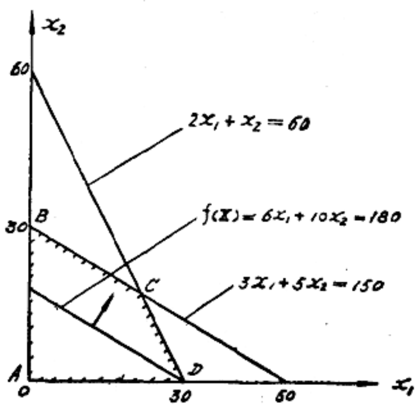

图 1-2

二、无界可行域

例 1-3： 约束条件为

$$\begin{cases} x_1+x_2\geqslant 1 & (1\text{-}3\text{-}5) \\ x_1-3x_2\geqslant -3 & (1\text{-}3\text{-}6) \end{cases}$$

目标函数为

$$max f(X)=2x_1-x_2 \qquad (1\text{-}3\text{-}7)$$

从图1-3中可看出，其可行域是无界的。由于所求目标函数为极大值，故目标函数等值线可沿增加方向无限推移，因此目标函数 $f(X)$ 的最大值是无穷大，也就是说，目标函数在可行域中无上界。

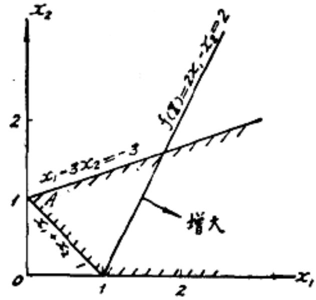

图 1-3

如果这个线性规划问题是求目标函数的最小值，则可求得 A 点为最优点，即在 A 点处目标函数有极小值，其值为－1。因此无界可行域并不意味着目标函数无极值，主要看求什么样的极值。

三、约束条件无可行域

例 1-4：约束条件为

$$\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 10 & (1\text{-}3\text{-}8) \\ 2x_1+x_2\geqslant 30 & (1\text{-}3\text{-}9) \end{cases}$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \qquad (1\text{-}3\text{-}10)$$

目标函数为

$$max f(X)=x_1+2x_2$$

由图1-4可以看出，约束方程 $x_1+x_2\leqslant 10$ 和 $2x_1+x_2\geqslant 30$ 与非负限制形成的区域不重合，即没有能完全满足约束条件的可行域，故此问题无解。

§1-4　线性规划的几何理论

一、可行解构成凸集

设原问题为二维线性规划，其约束条件为

$$AX\leqslant \boldsymbol{b} \qquad (1\text{-}4\text{-}1)$$

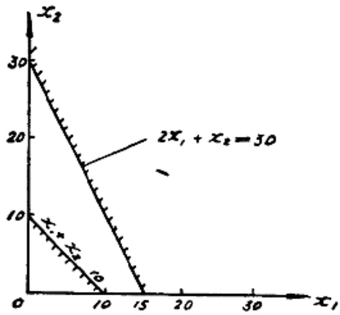

图 1-4

$$X\geqslant 0 \qquad (1\text{-}4\text{-}2)$$

其可行解为X，则X构成一个凸集，证明如下：

设X的点集为S，则

$$S=\{X|AX\leqslant \boldsymbol{b},\ X\geqslant 0\} \qquad (1\text{-}4\text{-}3)$$

其中任意两点$X^{(1)}\in S$，$X^{(2)}\in S$，则其线性组合为

$$X=\lambda X^{(1)}+(1-\lambda)X^{(2)}\geqslant 0 \qquad (0\leqslant\lambda\leqslant 1) \quad (1\text{-}4\text{-}4)$$

将（1-4-4）式代入（1-4-1）可得

$$A\{\lambda X^{(1)}+(1-\lambda)X^{(2)}\}=\lambda AX^{(1)}+(1-\lambda)AX^{(2)}$$

由于$X^{(1)}\in S$及$X^{(2)}\in S$，所以$AX^{(1)}\leqslant\boldsymbol{b}$，$AX^{(2)}\leqslant\boldsymbol{b}$，代入上式，则得

$$AX=\lambda AX^{(1)}+(1-\lambda)AX^{(2)}\leqslant\lambda\boldsymbol{b}+(1-\lambda)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b} \quad (1\text{-}4\text{-}5)$$

因此

$$X=\lambda X^{(1)}+(1-\lambda)X^{(2)}\in S \qquad (1\text{-}4\text{-}6)$$

这就是说，如果$X^{(1)}$，$X^{(2)}$是满足此约束集合上的两个点，则此两点间的任意一点均满足此约束条件，故为凸集。对n维空间讲，如果有l个点$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，……$X^{(l)}$均是此约束集合的极点，则由此l个极点所组成的凸多面体内的任一点X，如均满足此约束集合，$AX\leqslant\boldsymbol{b}$，$X\geqslant 0$，且$X$符合以下关系式

$$X=\lambda_1X^{(1)}+\lambda_2X^{(2)}+\cdots\cdots+\lambda_lX^{(l)} \qquad (1\text{-}4\text{-}7)$$

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1 \tag{1-4-8}$$

则为一凸集。由于X为满足约束条件的可行解，因此可行解的全体构成一个凸集。通常用S来表示。

二、极点与基础可行解

在凸集S中，凡不能由其它两点按照公式（1-4-6）组合表示的点，称为凸集S的顶点，拐点或极点。下面将证明极点与基础可行解相当。

设有一线性规划原问题，约束条件为

$$AX \leqslant \boldsymbol{b} \quad X \geqslant 0 \tag{1-4-9}$$

取一基阵

$$A_1 = (P_{j1} P_{j2} \cdots P_{jm}) \tag{1-4-10}$$

其中　$P_{j1}P_{j2}\cdots\cdots P_{jm}$——为基的列向量($j$表示第$j$次所取基阵)，且线性无关。其基础可行解应为

$$X_1 = (x_{j1} x_{j2} \cdots\cdots x_{jm})^T \tag{1-4-11}$$

且有　$$P_{j1}x_{j1} + P_{j2}x_{j2} \cdots\cdots + P_{jm}x_{jm} = \boldsymbol{b} \tag{1-4-12}$$

若P_{j1}，P_{j2}，$\cdots\cdots P_{jm}$线性相关时，必有m个不全为零的数$\delta_{j1}\cdots\cdots\delta_{jm}$使

$$\delta_{j1}P_{j1} + \delta_{j2}P_{j2} + \cdots\cdots + \delta_{jm}P_{jm} = 0 \tag{1-4-13}$$

可选择

$$\lambda_- = \min_{\delta_{jt}<0} \frac{x_{jt}}{-\delta_{jt}} \tag{1-4-14}$$

$$\lambda_+ = \min_{\delta_{jt}>0} \frac{x_{jt}}{\delta_{jt}} \tag{1-4-15}$$

$$(t = 1, 2, \cdots\cdots m)$$

当　$$\lambda = \min(\lambda_-, \ \lambda_+) = \frac{x_{jt}}{|\delta_{it}|} > 0 \text{时，有}$$

$$\sum_{t=1}^{m} x_{jt}P_{jt} \pm \lambda \sum_{t=1}^{m} \delta_{jt}P_{jt} = \boldsymbol{b} \tag{1-4-16}$$

即　$$\sum_{t=1}^{m} (x_{jt} \pm \lambda\delta_{jt}) P_{jt} = \boldsymbol{b} \tag{1-4-17}$$

于是可得两组可行解

$$x_{jt}^{(1)}=x_{jt}+\lambda\delta_{jt}>0(t=1,\ 2,\cdots\cdots n) \qquad (1\text{-}4\text{-}18)$$

$$x_{jt}^{(1)}=0 \qquad (t=l,\ \delta_{jl}<0) \qquad (1\text{-}4\text{-}19)$$

$$x_{jt}^{(2)}=x_{jt}-\lambda\delta_{jt}>0(t=1,\ 2\cdots\cdots m) \qquad (1\text{-}4\text{-}20)$$

$$x_{jt}^{(2)}=0 \qquad (t=l,\ \delta_{jl}>0) \qquad (1\text{-}4\text{-}21)$$

$$x_{jt}=\frac{1}{2}(x_{jt}^{(1)}+x_{jt}^{(2)}) \qquad (1\text{-}4\text{-}22)$$

即

$$X_1=X_1^{(1)}+X_1^{(2)} \qquad (1\text{-}4\text{-}23)$$

这就说明$X_1^{(1)}$、$X_1^{(2)}$都是可行解，它们是凸集S中两个不同的点。而X_1可由$X_1^{(1)}$和$X_1^{(2)}$的凸组合来表示。因此，X_1不是极点。于是可以得出结论，当A_1的列向量线性相关时，X_1一定不是极点。

反之，若P_{j1}，$P_{j2}\cdots\cdots P_{jm}$线性无关时，$X_1$一定是极点。若$X_1$不是极点，必然在凸集中有两个不同的点$X_1^{(1)}$，$X_1^{(2)}$，其中

$$X_1^{(1)}=(x_{j1}^{(1)}x_{j2}^{(1)}\cdots x_{jm}^{(1)}) \qquad (1\text{-}4\text{-}24)$$

$$X_1^{(2)}=(x_{j1}^{(2)}x_{j2}^{(2)}\cdots x_{jm}^{(2)}) \qquad (1\text{-}4\text{-}25)$$

则有

$$x_{j1}^{(1)}P_{j1}+x_{j2}^{(1)}P_{j2}+\cdots\cdots+x_{jm}^{(1)}P_{jm}=\boldsymbol{b} \qquad (1\text{-}4\text{-}26)$$

$$x_{j1}^{(2)}P_{j1}+x_{j2}^{(2)}P_{j2}+\cdots\cdots+x_{jm}^{(2)}P_{jm}=\boldsymbol{b} \qquad (1\text{-}4\text{-}27)$$

将上面二式等号两端相减，可得

$$(x_{j1}^{(1)}-x_{j1}^{(2)})P_{j1}+(x_{j2}^{(1)}-x_{j2}^{(2)})P_{j2}+\cdots\cdots$$
$$+(x_{jm}^{(1)}-x_{jm}^{(2)})P_{jm}=0 \qquad (1\text{-}4\text{-}28)$$

因$X^{(1)}$，$X^{(2)}$是两个不同的点，则至少有一个分量$x_{jt}^{(1)}-x_{jt}^{(2)}\neq 0$，这与$P_{j1}$，$P_{j2}\cdots\cdots P_{jm}$线性无关相违背，故$X^{(1)}$，$X^{(2)}$必为一点，即极点。极点为基础可行解。

由于A中线性无关向量P_j的组合数是有限的，故非零极点的个数也是有限的，因此，基础可行解为有限个。

三、最优解必然在极点上

在求极大值问题时，假设$max f(X)$的最优解X不是极点，则根据凸集的定理，X必然是l个极点的线性组合，

$$X=\lambda_1X^{(1)}+\lambda_2X^{(2)}+\cdots\cdots+\lambda_lX^{(l)} \qquad (1\text{-}4\text{-}29)$$