

全日制十年制学校

高中数学第二册

教学参考书

人民教育出版社

全日制十年制学校
高中数学第二册
教学参考书

人民教育出版社

目 录

第五章 空间图形	1
I. 目的要求	1
II. 教材说明	1
一 平面	4
二 空间两条直线	11
三 空间直线和平面	17
四 空间两个平面	28
五 多面体和旋转体及其面积	40
六 多面体和旋转体的体积	67
七 正多面体, 多面体变形*	81
III. 附录	105
1. 演绎法与归纳法, 直接证法与间接证法	105
2. 与直观图画法有关的初步知识	108
第六章 二次曲线	115
I. 目的要求	115
II. 教材说明	115
一 曲线和方程	118
二 圆的一般方程, 坐标轴的平移	129
三 椭圆	139
四 双曲线	150
五 抛物线	160
六 坐标轴的旋转*	172
III. 附录	189
1. 关于二次曲线的轨迹的充分性的证明	189
2. 关于二次曲线的范围	192
3. 抛物线不存在渐近线的证明	194
4. 一般二元二次方程的讨论	194

5. 关于一般二次方程的化简·····	197
第七章 极坐标和参数方程 ·····	203
I. 目的要求·····	203
II. 教材说明·····	203
一 极坐标·····	205
二 参数方程·····	218
III. 附录·····	235
1. 广义、狭义极坐标系的比较·····	235
2. 曲线的极坐标方程的定义·····	235
3. 关于直角坐标与极坐标互化公式的证明·····	238
4. 极坐标系中曲线的对称性·····	238
5. 由极坐标方程讨论曲线的性质·····	240
6. 关于曲线的参数方程·····	242

第五章 空间图形

I. 目的要求

1. 使学生掌握平面的基本性质, 空间两条直线、直线和平面、两个平面的位置关系(特别是平行和垂直关系), 以及它们所成的角与距离等概念; 掌握柱、锥、台、球、球缺的有关概念, 主要性质及其侧面积、体积的计算公式; 并能应用这些知识进行论证和解决有关的实际问题, 以进一步培养学生逻辑推理能力、正确而迅速的计算能力、分析问题和解决问题的能力。

2. 使学生掌握空间直线和平面的各种相关位置以及柱、锥、台、球的直观图的画法, 培养学生的空间想象能力和绘图能力。

3. 使学生进一步认识数学知识来源于实践, 并服务于实践, 以树立“实践第一”的观点; 通过直线、平面的相关位置及多面体与旋转体的相互联系的学习, 认识事物是具有规律性的与事物间是相互联系的。

II. 教材说明

本章教材是在学生已有平面图形知识的基础上来研究空间图形的, 空间图形知识既是进一步学习的基础, 又是学生将来参加生产、生活实践所必需的基础知识。

本章教材可分为两大部分, 前四节的平面、空间两条直线、空间直线和平面、空间两个平面属于第一部分, 主要是研

究平面的基本性质、直线与直线、直线与平面、平面与平面在空间的位置关系。后两节的多面体和旋转体及其面积、多面体和旋转体的体积属于第二部分，主要是研究柱、锥、台、球、球缺等简单几何体的概念、性质，直观图的画法，面积和体积的计算。这两大部分有着密切的联系，因为棱柱、棱锥、棱台都是由某些具有特定位置关系的面围成的，而圆柱、圆锥、圆台是由某些简单平面图形绕某一直线旋转而成的。第一部分直线与平面的位置关系是简单几何体概念、性质、直观图画法、面积和体积公式的理论根据，所以牢固掌握第一部分直线与平面的位置关系是学好本章教材的关键。本章最后第七节是选学内容，主要讲了正多面体和多面体的变形两个内容。

本章教材重点是直线与平面的位置关系（特别是平行和垂直关系），柱、锥、台、球、球缺的面积及体积计算。

培养学生的空间想象能力是本章教学的难点。为了解决这一难点，可采取下列措施：

1. 尽量做到问题从实际提出，概念由分析实例引入，使学生先获得感性认识，然后再上升为理性认识。

2. 开始时，要多用教具，从模型到图形，再从图形到模型，逐步培养学生认识空间图形的能力。对学生画空间图形时容易发生的错误，要预先指出和及时纠正。

3. 联系平面几何知识，注意平面几何知识与空间几何知识相互间的关系，用对比的方法，区别异同，指出特点。

本章教学时间约需 45 课时，具体分配如下（仅供参考）：

5.1 平面

5.2 平面的基本性质

} 约 2 课时

5.3	平面图形的画法	约 2 课时
5.4	两条直线的位置关系	} 约 3 课时
5.5	平行直线	
5.6	两条异面直线所成的角	} 约 2 课时
5.7	直线与平面的位置关系	
5.8	直线与平面平行的判定和性质	} 约 2 课时
5.9	直线与平面垂直的判定和性质	
5.10	直线的射影, 直线和平面所成的角	约 2 课时
5.11	两个平面的位置关系	} 约 2 课时
5.12	两个平面平行的判定和性质	
5.13	二面角	约 1 课时
5.14	两个平面垂直的判定和性质	约 3 课时
5.15	棱柱	约 3 课时
5.16	棱锥	约 2 课时
5.17	棱台	约 3 课时
5.18	圆柱、圆锥、圆台	约 3 课时
5.19	球	} 约 3 课时
5.20	球冠	
5.21	体积的概念与公理	} 约 2 课时
5.22	棱柱、圆柱的体积	
5.23	棱锥、圆锥的体积	约 2 课时
5.24	棱台、圆台的体积	约 2 课时
5.25	球的体积	约 1 课时
5.26	球缺的体积	约 2 课时
5.27	正多面体*	约 1 课时

5.28 多面体变形*

约1课时

小结和复习

约1课时

其中 5.27, 5.28 根据学生具体情况可以选学或不学.

一 平 面

5.1 平面

1. “平面”是一个只能描述而不定义的最基本的概念, 教学时应向学生着重指出, 数学中所说的平面在空间是无限伸展着的. 对初学者来讲, 理解平面的无限伸展性是一个难点, 因为学生日常接触到的很多平的面的实例都只是平面的一部分; 用平行四边形来表示平面时, 也只能画出平面的一部分, 所以学生往往把平面理解成是有限的有边界的, 因而有时错误地认为两个平面相交于一条线段或一点. 解决这个难点的途径有二:

(1) 向学生指出: 对平面的无限伸展性, 可以联系直线是无限延伸去理解, 平面把空间分成两部分.

(2) 在讲平面的基本性质时, 都要提到直线在平面内的问题, 这时可再向学生指出: 直线的长度无限, 如果平面有限, 那直线怎么能在平面内呢? 借以加强学生对平面的无限伸展性的认识.

2. 在讲“通常画平行四边形表示平面”时, 要向学生强调下列三点:

(1) 所画的平行四边形是表示它所在的整个平面, 需要时, 我们可以把它扩展出去, 这同画直线一样, 直线是可以无

限延伸的,但在画图时,也只能画一段来表示直线.

(2) 加“通常”两字的意思,是因为有时根据需要也可用其它的平面图形,如菱形、封闭的曲线图形等表示平面.

(3) 画表示水平平面的平行四边形时,通常把它的锐角画成 45° ,横边画成邻边的两倍(有时也画成菱形).如果画非水平的平面时,只要画成平行四边形(画直立的平面时,要有一组对边为铅垂线)即可.画相交平面时,一定要画出它们的交线.

3. 当用一个希腊字母表示平面时,字母应写在平行四边形的一个锐角内,并且不被其它平面遮住的地方.用语言叙述时,在字母前面可加上“平面”二字,但为了简单,在不发生误会的情况下,也可以不加.

5.2 平面的基本性质

1. 平面的基本性质是研究空间图形性质的理论基础,必须要求学生牢固掌握.

2. 公理和推论中的“有且只有一个”,学生比较生疏,对这些词作一些简单的解释,能够使学生对所讲的公理、推论的内容理解得更透彻.“有”说明图形是存在的,“只有一个”说明图形是唯一的.符合某一条件的图形既然存在,而且只有一个,就说明这个图形完全是确定的,因此“有且只有一个”和“确定”是同义词,有的书上也有说“确定”的.

* 3. 公理 1 除可以用来判定直线是否在平面内之外,还可用来检验平面.例如木工常用曲尺来检查工作物的表面是不是平面:他们把曲尺的直边紧靠在所要检查的面上任意滑动,如果曲尺的直边和面处处密合,这个面就是平的;如果曲尺的

直边和面有一处不能密合, 这个面就不是平的.

4. 讲公理 2 时, 应紧紧抓住平面在空间是无限伸展着的这一特征来讲. 应使学生明确如果两个平面相交, 它们就交于一条直线. 应特别强调如果两个平面有一个公共点, 它们就有过这个点的一条交线.

5. 公理 3 实际上是给出了确定平面的条件. 讲解时, 应突出“不在同一直线上”和“三点”几个字. 可引导学生明确过一点、两点或在同一直线上的三点都可以有无数个平面, 只有过不在一条直线上的三点才有、且只有一个平面. 过四点不一定有平面. 这样不但可以让学生体会到“不在一直线上的三点”这一条件的重要性, 还可加深对“有且只有一个”的理解.

确定平面是将空间图形问题转化为平面图形问题来解决的重要条件, 因为我们研究空间图形的时候, 往往是将有关点、线归结到一个平面内, 再利用平面图形的性质来解决, 所以不掌握确定平面的条件, 这样转化就不容易实现.

6. 公理 3 的推论 2 和推论 3 的证明如下:

推论 2 经过两条相交直线, 有且只有一个平面.

证明: 存在性. 如图 5-1, 设 $a \cap b = A$, 在 a 、 b 上分别取点 B 、 C , 得不在一直线上的三点 A 、 B 和 C . 过这三点有且只有一个平面 α (公理 3). 因为 a 、 b 各有两点在平面 α 内, 所以 a 、 b

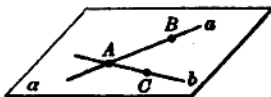


图 5-1

在平面 α 内. 因此平面 α 是过相交直线 a 、 b 的平面.

唯一性. 如果过直线 a 和 b 还有另一个平面 β , 那么 A 、 B 、 C 三点也一定都在平面 β 内. 这样, 过不在一条直线

上的三点 A, B, C 就有两个平面 α, β 了, 这和公理 3 矛盾, 所以过直线 a, b 的平面只有一个。

推论 3 经过两条平行直线, 有且只有一个平面(图 5-2)。

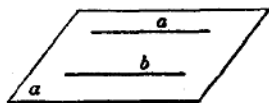


图 5-2

证明: 存在性. 因为当两条直线在同一平面内且不相交时叫做平行线, 所以两条平行直线 a 和 b 必在某个平面 α 内. 就是说, 过两条平行直线有一个平面。

唯一性. 如果过 a 和 b 还有一个平面 β , 那么在 a 上的一点 A 一定在 β 内, 这样过 A 和 b 有两个平面 α 和 β , 这和推论 1 矛盾, 所以过平行直线 a 和 b 的平面只有一个。

以上证明仅供老师参考, 不必给学生讲, 也不必让学生自己证。

7. 讲完有关平面的三个公理和三个推论后, 也可如下表进行一次小结, 使学生对平面的基本性质有个全面的认识。

名 称	作 用
平面的基本性质 1 (公理 1)	判定直线在平面内的依据
平面的基本性质 2 (公理 2)	两个平面相交的依据
平面的基本性质 3 (公理 3) 及三个推论	确定一个平面的依据

5.3 平面图形的画法

1. 平面图形的画法, 就是在纸上或黑板上画空间平面图形的方法, 它是后面柱、锥、台、球等直观图画法的基础. 一般地说, 正确的图形, 对解题很有帮助, 特别在空间几何中, 正确

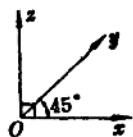
画出直观图,显得更为重要。

在开始时,首先应要求学生掌握三、四、五、六边形和圆的直观图的画法。

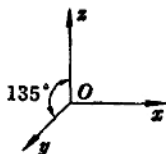
2. 关于“直观图”,在初中第六册视图一章中已经出现过,根据学生的情况现在或到讲解空间图形画法(41页)时可向学生指出:把空间图形在平面内画得既富有立体感,又能表达出图形各主要部分的位置关系和度量关系的图形,就是直观图。

3. 平面图形的画法,课文中介绍了比较常用的两种,第一种画法的全称叫斜二轴测投影,简称斜二测;第二种画法的全称叫正等轴测投影,简称正等测。(课本没有介绍这种名称,教学时不一定讲给学生。)两种画法不同的地方有两点(课本是分两次介绍直观图画法的,在5.3节先讲平面图形的画法,到5.15节再讲空间形体的画法,这里用空间三轴来说明两种画法的不同,教学时,还应先讲平面,再讲空间):

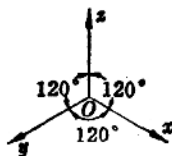
(1) 三轴的位置关系不同。斜二测定 x 、 y 、 z 三轴时,使 x 轴 $\perp z$ 轴, y 轴和 z 轴所成的角是 45° (或 135°),如图5-3(1),(2)。正等测定 x 、 y 、 z 三轴时, z 轴画成铅直方向, x 轴、 y 轴各与 z 轴成 120° 的角,如图5-3(3)。在这里讲平面图



(1)



(2)



(3)

图 5-3

形的画法时，虽然不用 z 轴，但 x 轴、 y 轴还是要按规定位置画（ x 、 y 轴的位置也可以互换）。

（2）在投影图上取线段长度的方法不同。斜二测，在 x 轴、 z 轴上或平行于 x 轴、 z 轴方向的线段取实长，在 y 轴上或平行于 y 轴的线段取实长之半。正等测，在三轴上或平行于三轴的线段都取实长。

两种画法的实质都是要画出平面图形上的点、线段在投影平面内的对应点、线段。

4. 画直线形的直观图，一般都用斜二测画，画带圆的直观图，一般都用正等测画。在设计绘图时，画圆的直观图一般把轴的位置画出后，都用椭圆板或菱形法近似地画出圆的直观图——椭圆（如例 3）。

画直观图时，不管用什么方法，都需多次画平行线，学生往往凭目视画，这样就不够准确，建议在教学中，严格要求，用两块三角板画平行线给学生示范，培养学生正确的画图习惯。还要学生注意，在一个直观图上，不能同时用两种画法。

[部分练习、习题提示及答案]

练习(第 4 页)

$$2. \text{ 设 } a \cap b = C, \quad b \cap c = A, \quad c \cap a = B,$$

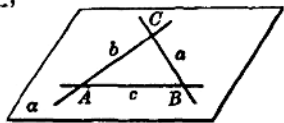
$\therefore A, B, C$ 不在一条直线上,

$\therefore A, B, C$ 确定平面 α .

$\therefore A \in b, \quad C \in b,$

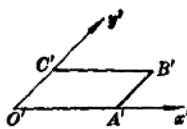
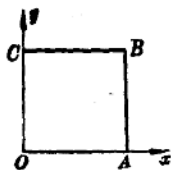
$\therefore b \subset \alpha$. 同理 $a, c \subset \alpha$.

即 $a, b, c \subset \alpha$.

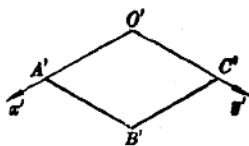


(第 2 题)

练习(第 7 页)



第一种画法



第二种画法

习题一

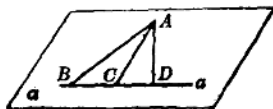
5. $\because A \in \alpha, \therefore \alpha$ 与 A 可确定平面 α .

$\because B \in \alpha, \therefore B \in \alpha$.

$\therefore AB \subset \alpha$.

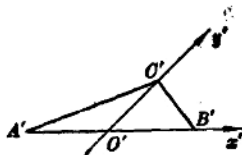
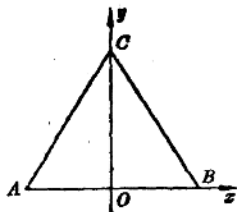
同理 $AC, AD \subset \alpha$.

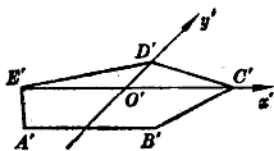
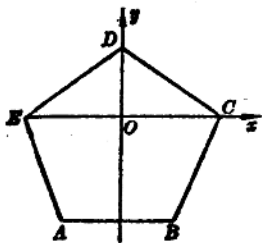
即 AB, AC, AD 都在平面 α 内.



(第5题)

6. 不一定. 因为这个图形顶点有两种情况. 四个顶点在一个平面内时, 它是平面图形; 否则, 它不是平面图形.
7. 因为两条平行直线可以确定一个平面, 所以沿着这两条平行线锯开, 就可使锯面平整.
- 8.





(第 8 题)

二 空间两条直线

5.4 两条直线的位置关系

1. 空间两条直线的位置关系,是在学生已经学过同一平面内的两条直线不相交就平行,及前面刚讲过平面的基本性质的基础上提出来的.它既是研究直线和直线、直线和平面、平面和平面各种位置关系的开始,又是学习这些位置关系的基础,因此对本节教材应予以足够的重视.从现在起,要提醒和帮助学生处处从空间来考虑问题,逐步改变学生只在一个平面内考虑问题的习惯.

2. 本小节的重点和难点是异面直线的概念.教学时应抓住这个主要矛盾.在讲异面直线定义之前,可先复习一下在同一平面内两条不重合直线的位置关系,进而通过对实物的观察,使学生了解不在同一平面内的直线是大量存在的,从而抽象出异面直线的概念.讲解时应向学生指出:

(1) “不在同一平面内的两条直线”,是指这两条直线不

能在同一平面内的意思,而不是指画在某两个平面内的直线.

异面直线既不能在同一平面内,当然它们不相交也不平行.

(2) 分别在某两个平面内的两条直线,不一定是异面直线,它们可能是相交线(图 5-4(1)),也可能是平行线(图 5-4(2)).

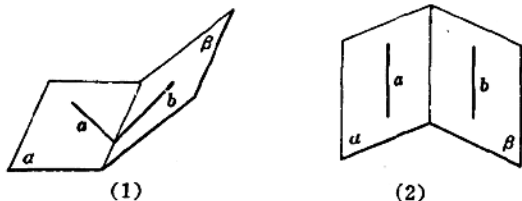


图 5-4

(3) 画异面直线时,以辅助平面作衬托,可使两直线不能共面的特点显示得更清楚(图 5-5(1)),否则就分不清是不是异面了(图 5-5(2)).

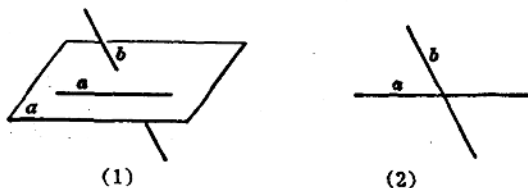


图 5-5

3. 空间两条不重合的直线有三种位置关系,若从公共点的数目方面看,可以分为:

(1) 只有一个公共点——相交直线,

(2) 没有公共点 $\begin{cases} \text{平行直线,} \\ \text{异面直线.} \end{cases}$

若从平面的基本性质方面看,可以分为:

(1) 在同一平面内 $\begin{cases} \text{相交直线,} \\ \text{平行直线,} \end{cases}$

(2) 不在同一平面内——异面直线.

课文中的分法是上述两种分法的综合.

5.5 平行直线; 5.6 两条异面直线所成的角

1. 公理 4 原来是定理, 由于证明较繁, 而结论又很明显, 所以课文中把它当作公理了. 它是证明“对应边平行且方向相同的两个角相等”这个定理的基础, 也是今后论证平行问题的主要根据. 两条异面直线所成的角, 是研究空间两条直线互相垂直、直线和平面垂直、三垂线定理等的基础.

2. 两条异面直线既不相交, 但又有所成的角, 这对于初学立体几何的学生来说, 是难以理解的, 所以两条异面直线所成的角也是学习的一个难点. 讲解时, 应首先使学生明了学习异面直线所成角的概念的必要性. 和平面内两条相交直线可用夹角来表示它们的相互位置一样, 在空间, 两条异面直线的相互位置也可用它们所成的角来表示, 例如要表示大桥上火车的行驶方向与桥下轮船航行方向的相互位置, 就要用到两条异面直线所成角的概念.

3. “等角定理”给两条异面直线所成的角的定义提供了可能性与唯一性, 即过空间任意一点引两条直线分别平行于两条异面直线, 它们所成的角都是相等的, 而与所取点的位置无关, 所以把“等角定理”讲在两条异面直线所成的角前面. 两条直线相交成四个角, 要注意两条异面直线所成的角, 通常指的是锐角(或直角).