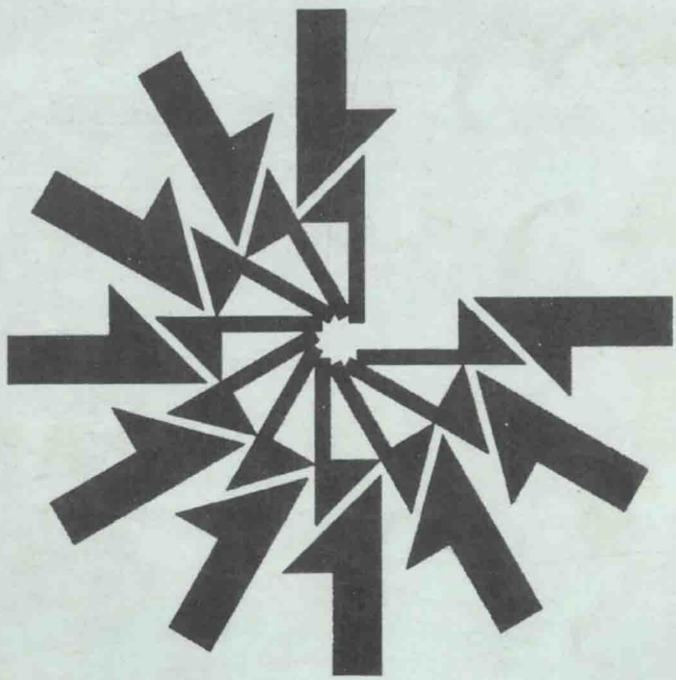
高等学校教材

高等数学学习指导

主编　张洪斌



高等学校教材

高等数学学习指导

主编 张洪斌

二000年七月

前　　言

本书是太原理工大学工科数学改革教材之一. 编写的目的是为了指导学生系统深入地掌握高等数学的理论和方法，提高综合运用这些知识分析问题和解决问题的能力.

全书内容覆盖了教育部工科数学课程指导委员会制定的高等数学课程的教学基本要求，并适当补充增加了一些考研内容. 在编写上，力求突出学习指导的特点，即在总结基本内容的基础上，通过典型例题的阐述与分析，使学生对高等数学运用的基本方法有清楚的理解. 例题分析重点放在解题思路上，强调理论与方法的结合，同时也注意某些技巧的应用. 对教材中的难点、重点及学生感到困难的综合性问题，加强了分析指导，选择例题有所侧重.

本书含有例题近 600 道，习题近 400 道，均附有解答、提示和答案，是较理想的理工科高校学生的学习参考书和指导书. 对准备考研的高年级学生，也是一本有益的复习资料.

全书共分十二章. 第一、二、三、四章及附录Ⅰ、Ⅱ由张玲玲编写，第六、十、十一、十二章由郑婷兰编写，第五、七、八、九章由任红萍编写. 山西广播电视大学沈沛龙也参加了部分编写工作. 主编张洪斌负责全书审查定稿.

本书在编写过程中，得到太原理工大学数学系和华北工学院印刷厂热情支持，对此表示深切的感谢.

本书的缺点和错误，恳请读者批评指正.

编　者

2000 年 6 月

目　　录

第一章　函数　极限　连续

函数作为高等数学的主要研究对象，它与极限、连续一起构成了高等数学中最基本的概念，求极限为高等数学中的基本运算之一，为了加深对这些概念的理解与认识，熟练掌握求极限的运算与方法，本章利用一些典型例题，通过分析、讨论，介绍关于函数、极限与连续的计算、证明的一般方法和一些特殊技巧.

本章重点：函数的概念；极限的定义与运算；连续性的概念与连续的判断.

§1　函数

一、　基本内容与要点

1. 函数的概念：定义域及其求法；对应法则；两个函数相等的充要条件.

2. 函数的性质：

(1)有界性　若 $f(x)$ 在 D 上有定义，且存在 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$ 对所有 $x\in D$ 成立. 则称 $f(x)$ 在 D 上有界.

(2)单调性　若 $f(x)$ 在 D 上有定义，任给 $x_1<x_2$，x_1、$x_2\in D$，有 $f(x_2)>f(x_1)$（或 $f(x_2)<f(x_1)$），则称 $f(x)$ 在 D 上是单调递增（减）的.

(3)周期性　若 $f(x)$ 在 D 上有定义，若存在 $T>0$，使 $f(x+T)=f(x)$ 对所有 $x\in D$ 都成立，则称 $f(x)$ 在 D 内是以 T 为周期的周期函数.

(4)奇偶性　若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有定义，任给 $x\in[-a,a]$，

若 $f(-x)=f(x)$（或 $-f(x)$），则称 $f(x)$ 为偶（奇）函数.

3. 复合函数：若 $y=f(u)$，$u\in D_u$，$u=g(x)$，$x\in D_x$，当 $u=g(x)$ 的值域 $\tilde{D}\subset D_u$ 时，以上的两个函数可以复合为 $y=f[g(x)]$.

4. 反函数：若 $y=f(x)$，定义域 D_x，值域 D_y，若存在 $x=g(y)$ 使定义域为 D_y，值域为 D_x 时，称 $x=g(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数. 它们互为反函数. 它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

5. 初等函数：由常数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这些基本初等函数经过有限次和、差、积、商四则运算或有限次复合运算构成的，用一个数学式子表示的函数称为初等函数.

6. 分段函数：自变量取值在不同范围时，函数表示式不同的函数.

本节要点：掌握函数的两个要素；会求定义域；知道基本初等函数的图像与性质.

二、 例题分析

（一）选择题

例 1 若 $f(x)\equiv1$，下列（　　）与 $f(x)$ 表示同一函数

A. $\dfrac{x}{x}$；　B. $\dfrac{\sin x}{x}$；　C. $\sin^2x+\cos^2x$；　D. x.

解 由于决定函数的两个要素是：定义域与对应法则，两个函数相同的充要条件是它们有相同的定义域与对应法则. A 中 $\dfrac{x}{x}$ 的定义域 $x\neq0$ 且 $x\in R$，与 $f(x)\equiv1$，$x\in R$ 不同. B 同理. D 的对应法则与 $f(x)$ 不同，如 $x=2$ 时 $f(2)=1$，$g(2)=2$. C 是正确的，因为任意 $x\in R$，恒有 $\sin^2x+\cos^2x=1$.

例 2 若 $f(x)=\dfrac{\log_2x}{\sqrt{x^2-1}}$，则 $f(x)$ 的定义域为（　　）.

A、$0\leqslant x\leqslant1$；　B、$x<0$；　C、$x\geqslant1$；　D、$x>1$.

解 定义域为使函数 $f(x)$ 有意义的 x 值的全体，一般要使表

达式分母不为零，偶次根式内非负，对数真数大于零，正余切分别不取 $k\pi+\frac{\pi}{2}$ 和 $k\pi, k\in Z$，反正余弦的定义域使正余弦的值介于 -1 与 $+1$ 之间，或几种情况综合时，取其范围的公共部分. 本题出现了分母、偶次根式与对数，先分别讨论，$x^2-1\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 1$；$x^2-1\geqslant 0\Rightarrow x>1$ 或 $x<-1$；真数 $x>0$，再取三者之公共部分，这就是 $x>1$，答案为 D.

例 3 $y=\frac{x}{1+x^2}(-\infty<x<+\infty)$ 是(　　) 收敛则有界.

A、无界函数；　　B、有界函数；

C、上有界下无界；　　D、上无界下有界.

解 有界函数是指存在 $M>0$，使任意 $x\in D$，$|f(x)|\leqslant M$ 或存在 M 和 m，使任意 $x\in D$，$m\leqslant f(x)\leqslant M$，对 $\frac{x}{1+x^2}$ 来讲，存在 $M=\frac{1}{2}$，任意 $x\in R$，$\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$，所以原函数有界，答案为 B.

例 4 $y=\frac{1}{2}e^{x-1}$　$(1\leqslant x<+\infty)$ 为(　　)函数.

A、单增；　B、单减；　C、非单调；　D、既单增又单减.

解 任意 $x_1,x_2\in D$，$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2)(\geqslant f(x_2))$ 时，称 $f(x)$ 在 D 内是单增(减)函数. 由任意 $x_1,x_2\in\{x\mid 1\leqslant x<+\infty, x\in R\}$ 及 $x_1<x_2$，$f(x_1)/f(x_2)=\frac{1}{2}e^{x_1-1}/\frac{1}{2}e^{x_2-1}=e^{x_1-x_2}<1\Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2)$. 则原函数递增，答案为 A.

例 5 $y=2x^2+e^{-x^2}$ 为(　　)函数.

A、奇；　B、偶；　C、既奇又偶；　D、非奇非偶.

解 当函数 $f(x)$ 的定义域为关于原点的对称区间时，任意 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数，$f(-x)=+f(x)$ 时称为偶函数. 对 $2x^2+e^{-x^2}$，$f(-x)=2(-x)^2+e^{-(-x)^2}=f(x)$ 符合偶函数的定义，答案应为 B.

例 6 函数的定义域关于原点对称，是它为奇函数的(必要)条件.

A、充分非必要；　　　　B、必要非充分；

C、充要；　　　　　　D、非充分非必要.

解　由奇偶函数的定义，前提条件必须是定义域为关于原点对称的区间，因此，定义域关于原点对称为奇函数的必要条件，答案为 B.

（二）计算题

例 1　若 $f(x)=ax^2+bx+c$，又 $f(-2)=0$，$f(0)=1$，$f(1)=5$，求 a、b、c 的值.

解　求函数值，要将自变量 x 的值代入 $f(x)$ 的表达式中，$f(0)=c=1$，$f(1)=a+b+c=5$，$f(-2)=4a-2b+c=0$.

$$\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=5 \\ 4a-2b+c=0 \end{cases} \quad \text{解之} \quad \begin{cases} a=\dfrac{7}{6} \\ b=\dfrac{17}{6} \\ c=1. \end{cases}$$

例 2　若 $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & x\geqslant 0 \\ x^2+1 & x<0 \end{cases}$ 求 $f(-x)$ 与 $f(f(x))$.

解　$x>0$ 时，$-x<0$，$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1$，

$x\leqslant 0$ 时 $-x\geqslant 0$，$f(-x)=(-x)^2+(-x)+1=x^2-x+1$

所以，　$f(-x)=\begin{cases} x^2+1 & x>0 \\ x^2-x+1 & x\leqslant 0 \end{cases}$

当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+1>0$

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= (x^2+1)^2+x^2+1+1 \\ &= x^4+3x^2+3 \end{aligned}$$

$x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= (x^2+x+1)^2+x^2+x+1+1 \\ &= x^4+2x^3+4x^2+3x+3 \end{aligned}$$

则　$f(f(x))=\begin{cases} x^4+3x^2+3 & x<0 \\ x^4+2x^3+4x^2+3x+3 & x\geqslant 0 \end{cases}$

解此题的要点是把握分段函数的定义及值的分段求法.

例 3　求 $f(x)=\begin{cases} x & x\leqslant 0 \\ x^2 & x>0 \end{cases}$ 的反函数，并求其定义域.

解　求反函数的方法是在一一对应的范围内，先把 x 用 y 表示出来，然后记成习惯记法 $y=f(x)$ 的形式（交换 x 与 y 位置）. $x\leqslant 0$ 时，把 $y=x$ 用 y 表示出 x 来，$x=y$. 再记作习惯表达式 $y=x$；这就是说 $x\leqslant 0$ 时 $y=x$ 的反函数是自己；$x>0$ 时，由 $y=x^2$ 把 x 用 y 表示出来、$x=\sqrt{y}$，改记为习惯表达式 $y=\sqrt{x}$.

$f(x)$ 的反函数为 $y=\begin{cases} x & x\leqslant 0 \\ \sqrt{x} & x>0 \end{cases}$ 它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

（三）证明题

例 1　若 $f(x)$，$g(x)$ 为单减函数，且它们可以复合为 $f[g(x)]$，证明 $f[g(x)]$ 为单增的.

证明　这种题目的作法是采用单调性的定义来证明. 对任意 $x_1,x_2\in D$，$x_1<x_2$ 时，来证明 $f[g(x_1)]\leqslant f[g(x_2)]$. 设 $x_1<x_2$，由 $g(x)$ 的单减性，有 $g(x_1)\geqslant g(x_2)$. 因 $f(x)$ 为单减函数，所以 $f(g(x_1))\leqslant f(g(x_2))$. 则 $f(g(x))$ 为单增函数.

证毕

例 2　$f(u)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，任给 $a\in D$，$b=0$，有 $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$ 且 $f(0)\neq 0$，则 $f(u)\equiv 1$.

证明　任意 $a\in D$，且 $b=0$. 由

$$f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)\Rightarrow f(0)=f(a)\cdot f(0)$$

因为 $f(0)\neq 0$，两边同约去 $f(0)$，由 a 的任意性，$f(u)\equiv 1$.

证毕

例 3　证明　$f(x)=x^2+9$，$g(x)=4+\sqrt{x}$ 时，则有

$$f(g(4))=5g(f(4))$$

证明　这种题的作法是根据函数值的求法，两端分别求函数值，然后再进行比较.

$$f(g(4))=f(4+\sqrt{4})=f(6)=6^2+9=45.$$

$$5g(f(4))=5g(16+9)=5g(25)=5(4+\sqrt{25})=45.$$

证毕

例 4 $f(x)$为奇函数，在$(-\infty,+\infty)$上有定义，又$f(x)$在$(-\infty,0)$上单增，证明$f(x)$在$(0,+\infty)$上也单增.

证明 任意$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$x_1<x_2$，则

$$-x_1>-x_2,\ -x_1,-x_2\in(-\infty,0)$$

$f(x)$为奇函数

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=-f(-x_1)+f(-x_2)\\&=f(-x_2)-f(-x_1)\end{aligned}$$

又$f(x)$在$(-\infty,0)$内的递增性，所以

$$f(x_1)-f(x_2)<0.$$

这就证明了$f(x)$在$(0,+\infty)$上递增.

证毕

这个题目的证明方法是把奇偶性与单调性很好地结合起来.类似地，我们可以自己考虑$f(x)$奇，$(-\infty,0)$上单减时，在$(0,+\infty)$上的增减情况，或把$f(x)$换为偶函数来考虑.

练 习 1.1

1. 下列各组函数中，哪两个表示相同的函数，哪些不同，说出理由.

(1) $y=\dfrac{x^3+x}{x}$与$y=x^2+1$；

(2) $y=\lg x^2$与$y=2\lg x$

(3) $y=\begin{cases}x+1 & x\leqslant 0\\ 2x+1 & x>0\end{cases}$ 与$y=\dfrac{1}{2}(3x+\sqrt{x^2})+1$.

2. 若$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(1-\dfrac{a-x}{\sqrt{a^2-2ax+x^2}}\right)$ $(a>0)$，求$f\left(\dfrac{a}{2}\right)$与$f(2a)$. $f(\frac{a}{2})=0$

3. 若$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1,\end{cases}$ $\quad g(x)=e^x$

求 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$.

4. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{\dfrac{1}{x-4}}-\log_2 x^2-\tan(x+1)$;

(2) $y=\dfrac{\log_2 x}{\sqrt{x^2-2x+1}}$.

5. 指出下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$; (2) $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3) $f(x)=|x-1|+|x+1|-2$;

(4) $f(x)=g(x)+g(-x)$.

6. 求下列函数的周期:

(1) $f(x)=2\sin 3x$; (2) $f(x)=\cos^2 x$.

7. 若 $f(x)$ 为偶函数,且在 $(-\infty,0)$ 上单增,证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单减.

8. 若 $f(x)$ 单增,$g(x)$ 单减,则当它们可复合时,$f(g(x))$ 为单减的函数.

9. 把下列函数分解为几个基本初等函数:

(1) $y=\arctan^2\dfrac{2x}{1-x^2}$; (2) $y=\mathrm{e}^{\cos^2 x-3^x}$.

§2 极限

一、 基本内容与要点

1. 数列极限的定义

数列 $\{a_n\}$ 以数 a 为极限:若对任给 $\varepsilon>0$,总存在 $N>0$,使 $n>N$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$,成立.

记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

若任何数都不是 $\{a_n\}$ 的极限,称它是发散的数列.

2. 函数极限的定义

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$：若任给 $\varepsilon>0$，总存在 $M>0$，当 $|x|>M$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

类似可定义 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$：若任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$：若任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

类似地，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$：任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

以上极限分别称为 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的右、左极限.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 都存在且相等.

3. 无穷小与无穷大概念

(1)定义

无穷小：当 $x\to x_0$（或 ∞）时，$f(x)\to 0$，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0$（或 ∞）时为无穷小量.

无穷大：当 $x\to x_0$（或 ∞）时 $f(x)\to\infty$，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0$（或 ∞）时为无穷大量.

(2)无穷小与无穷大的关系：在同一个极限过程中，无穷小量与无穷大量互为倒数.

(3)无穷小量阶的比较：

若当 $x\to x_0$（或 ∞）时 $f(x)$，$g(x)$ 同为无穷小量，当 $x\to x_0$（或 ∞）时 $\dfrac{f(x)}{g(x)}\to 0$，称 $f(x)$ 较 $g(x)$ 为高阶无穷小，记 $f(x)=o(g(x))$；

当 $x\to x_0$（或 ∞）时 $\dfrac{f(x)}{g(x)}\to C$（C 为常数，且 $C\neq 0$）. 称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶无穷小，记 $f(x)=O(g(x)$；

当 $x\to x_0$（或∞）时$\dfrac{f(x)}{g(x)}\to 1$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小，记 $f(x)\sim g(x)$.

(4)无穷小的性质

与存在极限的函数的关系：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $x\to x_0$ 时 $\alpha(x)\to 0$. $x\to x_0$ 的极限方式也可适用于 $x\to\infty$.

运算性质：有限个无穷小的和或乘积仍是无穷小；有界量乘以无穷小量仍是无穷小量.

等价无穷小的性质：若 $f\sim g$ 时，$f-g=o(g)$；若 $f\sim f'$，$g\sim g'$ 且$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'}{g'}=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{g}=A$.

附：常见的几组等价无穷小，当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$；$\tan x\sim x$；$\arctan x\sim x$；$\arcsin x\sim x$；$\boxed{\ln(1+x)\sim x}$；$e^x\sim 1+x$；$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$；$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}$.

4. 极限的运算

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

由(1)和(2)，

$$\lim_{x\to x_0}[C\cdot f(x)]=C\lim_{x\to x_0}f(x)\qquad C\in R.$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^K=[\lim_{x\to x_0}f(x)]^K\qquad K\in N.$$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}\left(\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0\right)$.

以上极限当然适合于数列极限，也适合于 $x\to\infty$时.

5. 极限存在的准则

夹逼准则

(1)迫敛性准则　若 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，且 $x\to x_0$（或∞）时，$f(x)\to A$ 且 $h(x)\to A$，则 $x\to x_0$（或∞）$g(x)\to A$.

(2)单调有界准则　单调递增(减)有上(下)界的数列必有极

限.

6. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，理解时要区别于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，$x$ 可为离散或连续变量. 其等价形式为$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

本节介绍了数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义；函数极限的六种不同趋向方式下的定义($x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$)；无穷小与无穷大概念，包括它们的定义、关系、运算、性质及阶的比较，等价无穷小替换；极限的运算；存在的准则(夹逼准则与单调有界准则)；两个重要的极限；不定式的极限.

本节要点：

(1)正确理解数列极限的概念，包括 $\varepsilon-N$ 定义，收敛与发散数列的特点；

(2)知道极限存在的准则；

(3)会熟练运用极限的运算；

(4)熟悉两个重要的极限，会用它求其它极限；

(5)理解无穷小与无穷大的概念，包括关系、运算、性质及阶的比较；

(6)会用等价无穷小替换求极限；

(7)总结现学的几种求极限的方法.

二、 例题分析

(一)选择题

例 1 若数列$\{a_n\}$为有界数列，则它必为(　　).

A、收敛数列；　　　　B、发散数列；

C、可能收敛也可能发散；　D、有穷数列.

解 由收敛数列的性质可知，若$\{a_n\}$收敛，则它必有界，这说

明有界是收敛的必要条件，并非充分条件，如数列$\{1,0,1,0,\cdots\}$为有界发散数列，又$\{-1,-1,-1,\cdots\}$为有界收敛数列，这就是说答案应为C. 有界不一定有穷，有穷指的是数列的项数有限.

例 2 若$\{a_n\}$、$\{b_n\}$都发散，则$\{a_n \pm b_n\}$必(　　).

A、发散；　B、不一定发散；　C、收敛；　D、无界.

解 做这种题的方法是深刻理解数列收敛与发散的概念后，会举反例来否定一些结论. 如$a_n=1,0,1,0,\cdots$；$b_n=0,1,0,1\cdots$，则$a_n+b_n=1,1,\cdots 1$收敛，则A错误，如$a_n=1,0,1,0,\cdots$，$b_n=1,0,1,0,\cdots$，$a_n+b_n=2,0,2,0,\cdots$发散，则C不对，D也不对，答案应为B.

例 3 若α、β当$x\to x_0$时分别为无穷小量，则当$x\to x_0$时$\dfrac{\alpha}{\beta}=$(　　).

A、0；　B、∞；　C、1；　D、x，且$-\infty\leqslant x\leqslant+\infty$.

解 答案为D，$\dfrac{\alpha}{\beta}$为两个无穷小量之比，根据它们阶的比较，比值可能是0，∞或常数，为不定式型.

例 4 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=$(　　).

A、a；　B、$-a$；　C、$|a|$；　D、不一定存在.

解 根据数列极限的$\varepsilon-N$定义，当$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则任意$\varepsilon>0$，存在$N$，使$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon$，由$||x_n|-|a||<|x_n-a|<\varepsilon$，这时$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$答案为$C$. 通过此题可以把它作为收敛数列的一个简单性质，我们记住且使用它. 叙述为：收敛数列的绝对值数列也收敛，且值等于原数列极限的绝对值.

例 5 若$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$为三个数列，则$\{a_n\}$与$\{c_n\}$收敛是$\{b_n\}$收敛的(　　)条件.

A、充分；　B、必要；　C、充要；　D、非充分非必要.

解 由数列极限存在的夹逼准则，只有当$\{a_n\}$，$\{c_n\}$同时收敛于同一极限时，$\{b_n\}$才可收敛，且收敛于同一个极限，仅$\{a_n\}$，$\{b_n\}$