理论力学

习题及解答

理工科大学参考书

四川大学物理系力学教研室

理 論 力 学
习 题 及 解 答

理工科大学参考书

四川大学物理系力学教研室

一九八〇年

编 者 的 话

在整理历年教学中使用的习题资料的基础上，我们编写了这本《理论力学习题及解答》，以供教学和自学参考。

为突出力学概念和解题线索，解答力求简明扼要，繁复的数学运算和次要的说明性叙述均已删去。为节省篇幅，在排印格式上未过于讲究，且每题只给出一种参考解答。

由于水平有限，时间仓促，不妥之处，肯定存在。请读者批评指正。

四川大学物理系力学教研室

一九八〇年三月

目　录

第一章　静力学

§1.1　平面汇交力系……………………………（1）
§1.2　平面任意力系……………………………（8）
§1.3　摩擦……………………………………（19）
§1.4　空间力系…………………………………（26）

第二章　质点运动学

§2.1　直线运动…………………………………（33）
§2.2　速度、加速度的直角坐标表示………………（39）
§2.3　速度、加速度的极坐标表示…………………（45）
§2.4　速度、加速度的自然坐标表示………………（51）

第三章　刚体运动学

§3.1　刚体的定轴转动……………………………（56）
§3.2　刚体的平面运动……………………………（57）
§3.3　刚体的定点运动……………………………（70）

第四章　质点动力学

§4.1　牛顿运动定律………………………………（81）
§4.2　运动微分方程………………………………（84）
§4.3　动量定理、动量矩定理、动能定理……………（103）
§4.4　有心运动…………………………………（120）
§4.5　微小振动…………………………………（131）

第五章　相对运动

§5.1　相对运动的速度……………………………（137）
§5.2　相对运动的加速度…………………………（141）
§5.3　相对运动的动力学方程……………………（148）
§5.4　地面附近的运动……………………………（158）

第六章　质点组动力学

§6.1　质量中心、质点组动力学基本方程……………（161）
§6.2　绕质心的相对运动…………………………（174）
§6.3　二体问题、碰撞问题…………………………（183）
§6.4　变质量问题…………………………………（193）

第七章　刚体动力学

§7.1　物体的转动惯量、惯量椭球……………………(198)
§7.2　刚体的动力学特征量……………………………(203)
§7.3　刚体的定轴转动和平面平行运动………………(206)
§7.4　刚体的定点运动和一般运动……………………(222)

第八章　虚功原理、达朗伯原理

§8.1　虚功原理…………………………………………(236)
§8.2　达朗伯原理………………………………………(243)

第九章　拉格朗日方程

§9.1　拉格朗日方程……………………………………(250)
§9.2　拉格朗日方程及其积分…………………………(260)
§9.3　微振动……………………………………………(289)

第十章　哈密顿正则方程

§10.1　正则运动方程及其积分…………………………(304)
§10.2　泊松括号、正则变换……………………………(332)
§10.3　哈密顿—雅可俾方程……………………………(342)

第十一章　力学中的变分原理

§11.1　哈密顿原理、最小作用量原理…………………(353)

第十二章　弹性力学基本方程

§12.1　应力分析…………………………………………(360)
§12.2　应变分析…………………………………………(366)
§12.3　基本方程组………………………………………(371)

第十三章　流体运动学

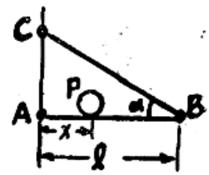
§13.1　处理流体运动的两种方法………………………(375)
§13.2　连续性方程………………………………………(377)
§13.3　流体质点速度分析、形变速度…………………(379)
§13.4　无旋运动、平面势流……………………………(380)

第十四章　流体动力学

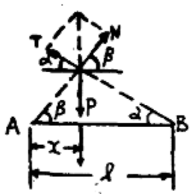
§14.1　理想流体动力学方程……………………………(388)
§14.2　流体静力学方程…………………………………(390)
§14.3　理想流体定常运动和无旋运动…………………(394)
§14.4　气体的一维定常运动……………………………(403)

第一章　静 力 学

§1.1　平面汇交力系



1.1—1　一水平梁长 l，以 A 端用铰链固定，另一端 B 以和水平成倾角 α 的连杆 BC 悬挂。一重物 P 沿梁移动，以 x 表示与铰链 A 的距离，试以重物位置表示 BC 杆的张力。梁的重量不计。



解：因 AB 杆仅受 P、N、T 三力，必为汇交力系，作受力图。沿二方向求合力为零有：

$$T\cos\alpha = N\cos\beta\,,$$
$$T\sin\alpha + N\sin\beta = P$$

又有几何关系　　$x\,\mathrm{tg}\,\beta = (l-x)\,\mathrm{tg}\,\alpha$

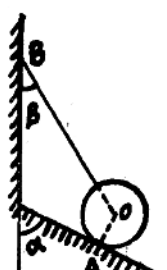
即　　$x = l\,\mathrm{tg}\,\alpha / (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta)$

代入前二式可得　　$T = Px / l\sin\alpha$

又：视为平面力系，对 A 取矩，有

$$Tl\sin\alpha - Px = 0$$

亦得同解。



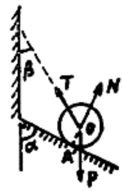
1.1—2　重 P 的球用绳固定于点 B，球靠在光滑斜面上 A 点，如已知 α 及 β 角，求 A 点的反作用力 N 及绳的张力 T。研究下列二种情况：1. $\alpha=\beta$；2. $\alpha=0$

解：作球之受力图如右

$$N/\sin(\pi-\beta) = T/\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = P/\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)$$

得 $N=P\sin\beta/\cos(\alpha-\beta)$,

$T=P\cos\alpha/\cos(\alpha-\beta)$



(1) $\alpha=\beta$ 有

$N=P\sin\alpha$, $T=P\cos\alpha$

(2) $\alpha=0$ 有

$N=P\mathrm{tg}\,\beta$, $T=P\sec\beta$

1.1—3 重P的球靠在与水平成α及β角的两光滑固定面上之A, B点，求A, B点的反作用力。

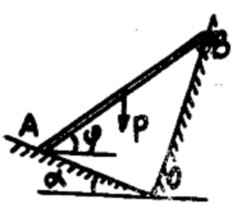
解：作球之受力图如右

$$N_A/\sin(\pi-\beta)=N_B/\sin(\pi-\alpha)$$

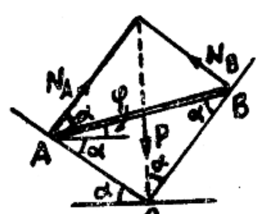
$$=P/\sin(\alpha+\beta)$$

得 $N_A=P\sin\beta/\sin(\alpha+\beta)$

$N_B=P\sin\alpha/\sin(\alpha+\beta)$



1.1—4 长$2l$ 重P的均匀杆，在铅垂平面内处于平衡状态，在两端靠在互相垂直的两光滑斜面上，如已知其中一斜面与水平成α角，求杆与水平所成的角φ及AO的距离。



解：作AB杆的受力图如右

AB杆受三力，N_A, N_B, P, 它们仅在为共点力系时方能平衡。

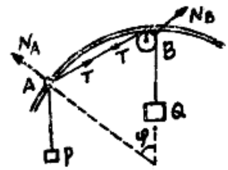
由图知： $\varphi=(\pi/2)-2\alpha$

故 $AO=2l\sin\alpha$

1.1—5 小圈A可在垂直放着的、以O点为中心的铁圈上自由滑动，小圈一边系着一重P的砝码，另一边固定一绳子，此绳绕过固于铁圈上最高点B的小滑轮后，其另一端悬一重Q的重物，求平衡时之 $\varphi=\angle AOB$ 角及A、B点之反作

用力。

解：在A点平衡时



$$N_A/\sin(\varphi+\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})$$

$$=P/\sin(\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2})$$

$$=Q/\sin(\pi-\varphi)\qquad(因T=Q)$$

∴ $N_A=P$，$Q/P=\sin\varphi/[\cos(\varphi/2)]=2\sin(\varphi/2)$，

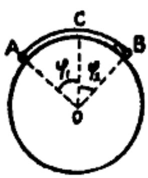
$\varphi=2\sin^{-1}(Q/2P)$

在B点平衡时

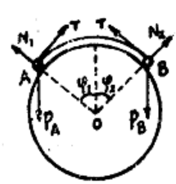
$$N_B=\sqrt{2Q^2+2Q^2\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})}=Q\sqrt{2+2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$=Q\sqrt{2-\frac{Q}{P}}$$

1.1—6　在光滑的园柱面上搁两小球A与B，园柱的轴线是水平的，园柱半径为$OA=0.1$公尺，小球A重0.1公斤，小球B重0.2公斤，两小球用0.2公尺的线连结，求当小球在平衡位置时，半径OA和OB各与铅垂线的交角φ_1和φ_2，并求在A点和B点处小球对园柱的压力N_1，N_2。小球的大小略去不计。



解：在A点平衡



$$T/\sin(\pi-\varphi_1)=N_1/\sin[(\pi/2)+\varphi_1]$$

$$=0.1/\sin(\pi/2)$$

∴　$N_1=0.1\cos\varphi_1$　　$T=0.1\sin\varphi_1$

在B点平衡

$$T/\sin(\pi-\varphi_2)=N_2/\sin[(\pi/2)+\varphi_2]$$

$$=0.2/\sin(\pi/2)$$

∴　$N_2=0.2\cos\varphi_2$　　$T=0.2\sin\varphi_2$

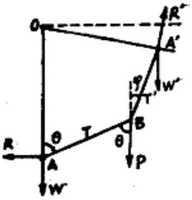
有　$\sin\varphi_1=2\sin\varphi_2$

又由AB弧长的计算知　　$\varphi_1+\varphi_2=2$

解之得　　$\varphi_1=84°45'$　　　$\varphi_2=29°50'$

$N_1=0.0092$公斤　　$N_2=0.173$公斤

1.1—7　二重W及W'之光滑小环用绳相连，且可在两条固定铁丝上滑动，铁丝前者铅直而后者与水平成倾角α，有重P之物系于绳上，而绳之二部分与铅直方向成θ、φ角，证明：



$$\cot\theta : \cot\varphi : \cot\alpha$$
$$=W : P+W : P+W+W'$$

解：由图可知反力　　$R\perp OA$　　$R'\perp OA'$

故在B点：　　$P/\sin(\pi+\varphi-\theta)=T/\sin\varphi=T'/\sin\theta$

在A点：　　$T=R/\sin\theta=W/\cos\theta$

在A'点：　　$T'/\sin\alpha=R'/\sin\varphi=W'/\sin(\pi+\alpha-\varphi)$

所以　$P/\sin(\theta-\varphi)=W/\cos\theta\sin\varphi$

$$=W'\sin\alpha/\sin\theta\sin(\varphi-\alpha)$$

因此　　$P/W=\sin(\theta-\varphi)/\cos\theta\sin\varphi$

$$=(\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi)/\cos\theta\sin\varphi$$

及　　$(P+W)/W=(\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi+\cos\theta\sin\varphi)/$

$$\cos\theta\sin\varphi=\cot\varphi/\cot\theta$$

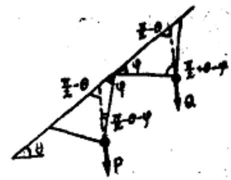
及　　$(P+W+W')/W=\sin\theta\cos\varphi/\cos\theta\sin\varphi$

$$+[\sin\theta\sin(\varphi-\alpha)]/\cos\theta\sin\varphi\sin\alpha$$
$$=\cot\alpha/\cot\theta$$

故　　$P+W+W' : P+W : P=\cot\alpha : \cot\varphi : \cot\theta$

1.1—8　二重为P、Q的环可在无重绳上滑动，绳的两端固定在与水平成θ角的直杆上，绳又通过杆上一无重可滑动的环，而二重环分别在它的两边，所有接触都光滑，在平衡时与轻环两边的绳都成φ角，证明

$$\text{tg}\theta/\text{tg}\varphi=(P-Q)/(P+Q)$$



解： $Q=2T\cos[(\pi/2)+$

$+\theta-\varphi]=2T\sin(\varphi-\theta)$

$P=2T\cos[(\pi/2)-\theta-\varphi]$

$=2T\sin(\varphi+\theta)$

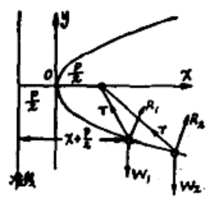
故 $Q/p=\sin(\varphi-\theta)/\sin(\varphi+\theta)$

$=(\sin\varphi\cos\theta-\cos\varphi\sin\theta)/(\sin\varphi\cos\theta+\cos\varphi\sin\theta)$

于是 $(P+Q)/P=2\sin\varphi\cos\theta/(\sin\varphi\cos\theta+\cos\varphi\sin\theta)$

$(P-Q)/P=2\cos\varphi\sin\theta/(\sin\varphi\cos\theta+\cos\varphi\sin\theta)$

故 $(P-Q)/(P+Q)=\text{tg}\theta/\text{tg}\varphi$



1.1—9 二有重量的小环可在光滑铁丝上滑动，铁丝在铅直面内并对水平方向呈抛物线，二环用绕过焦点的轻绳相连，证明在平衡时各环的高度与其重量成正比。

解：抛物线为$y^2=2px$；

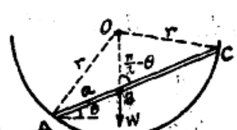
于是 $dy/dx=p/y$ 如φ是R与x轴间的夹角，故 $\text{tg}\varphi=-p/y$ 分解到垂直方向：

$w=-Ty/(x+p/2)-Ry/\sqrt{y^2+p^2}$)，分解到水平向

$$0=-T(x-p/2)/(x+p/2)+Rp/\sqrt{y^2+p^2}$$

可解得： $pw=-Ty$；

于是 $w/y=-T/p$



1.1—10 一轻杆在半径为r的光滑半碗内处于静止状态，在杆上距两端为a与b的点处固定有一重W之物，证明若杆在平衡时与水平的倾角为θ则有

$$2\sqrt{r^2-ab}\sin\theta=b-a$$

解：设图中之$OB=x$，则在$\triangle OAB$内有

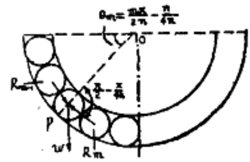
$$r^2=a^2+x^2+2ax\sin\theta$$

在$\triangle OBC$上有 $r^2=b^2+x^2-2bx\sin\theta$

由之得 $x=(b-a)/2\sin\theta$ 再代入第一式得

$$2\sqrt{r^2-ab}\sin\theta=b-a$$

1.1—11 一光滑的园截面之半园环管内装满$2n$个相同的滚珠，每珠重W，与管恰好密合，放在铅直平面内且两端等高，如R_m是由顶端起第m个和第$m+1$个珠间的压力，证明



$$R_m=W\sin(m\pi/2n)\csc(\pi/2n)$$

解：每个小珠由园心之张角$\alpha=\pi/2n$，故有如图的角度。将力W、R_{m-1}、R_m分解到垂直于PO的方向有

$$W\cos\theta_m=(R_m-R_{m-1})\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4n}\right)$$

$$W\cos\theta_{m-1}=(R_{m-1}-R_{m-2})\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4n}\right)$$

....

$$W\cos\theta_2=(R_2-R_1)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4n}\right)$$

因而 $$W\sum_{k=2}^{m}\cos\theta_k=(R_m-R_1)\cos\frac{\pi}{4n}$$

于是 $$W\sum_{k=2}^{m}\cos\theta_k=(R_m-W)\cos\frac{\pi}{4n}$$

$$\sum_{k=2}^{m}\cos\theta_k=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4n}}\sum_{k=2}^{m}2\cos\left(\frac{k\pi}{2n}-\frac{\pi}{4n}\right)\sin\frac{\pi}{4n}$$

$$=\frac{1}{2\sin(\pi/4n)}\sum_{k=2}^{m}\left\{\sin\left[\left(\frac{k\pi}{2n}-\frac{\pi}{4n}\right)+\frac{\pi}{4n}\right]-\sin\left[\left(\frac{k\pi}{2n}-\frac{\pi}{n4}\right)-\frac{\pi}{4n}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2\sin(\pi/4n)} \sum_{k=2}^{m} \left(\sin\frac{k\pi}{2n} - \sin\frac{k-1}{2n}\pi \right)$$

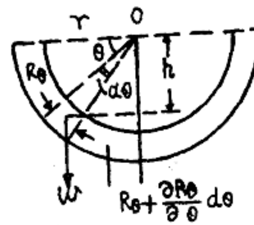
$$= \frac{1}{2\sin(\pi/4n)} \left(\sin\frac{m\pi}{2n} - \sin\frac{\pi}{2n} \right)$$

因而 $\dfrac{W}{2\sin(\pi/4n)}\left(\sin\dfrac{m\pi}{2n} - \sin\dfrac{\pi}{2n} \right) = (R_m - W)\cos\dfrac{\pi}{4n}$

得 $W(\sin\dfrac{m\pi}{2n} - \sin\dfrac{\pi}{2n}) = (R_m - W)\sin\dfrac{\pi}{2n}$

故 $R_m = \dfrac{W[\sin(m\pi/2n) - \sin(\pi/2n)]}{\sin(\pi/2n)} + W$

$$= W\sin\frac{m\pi}{2n}\csc\frac{\pi}{2n}$$



1.1—12 上题中，让珠的尺寸无限缩小，证明二珠间的压力与该珠由管顶算起的深度成正比。

解：当 n 无限增加时，$\sin(\pi/2n)$ 趋于 $\pi/2n$，而 $\sin(m\pi/2n)$ 趋于 θ，若 ρ 为单位长度的重量，则 $W = \rho(\pi r/2n)$，因此

$$R_\theta = R_m = \frac{\rho\pi r}{2n}\ \frac{\sin\theta}{\pi/2n} = \rho r\sin\theta = h\rho$$

当珠趋于零时，

$$W\cos(\theta + d\theta) = [R_\theta + (\partial R_\theta/\partial\theta)d\theta - R^\theta]\cos(d\theta/2)$$

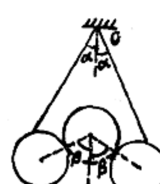
得 $W\cos\theta = (\partial R_\theta/\partial\theta)d\theta$ 又 $W = \rho r d\theta$

故 $\rho r\cos\theta = dR/d\theta$ 即 $dR = \rho r\cos\theta d\theta$

因此 $R = \rho r\sin\theta + c$ 而当

$\theta = 0$，$R = 0$ 故 $c = 0$

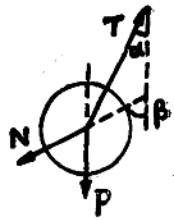
于是 $R = \rho r\sin\theta = \rho h$



1.1—13 相同的两个均质光滑球悬在结于定点 O 的两根绳子上，此两球同时又支持一等重的均质球。求 α 角及 β 角

之间的关系。

解：由对称性，问题可在三个球心与 O 点共同的铅直平面内考虑。设绳的张力 T，球间相互作用力 N，因二球光滑，故 N 沿连心线，因此张力 T 必过二球之重心，故有



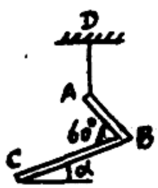
$$P/\sin(\beta-\alpha)=N/\sin\alpha=T/\sin\beta$$

又由上球的平衡可知　　$2N\cos\beta=P$

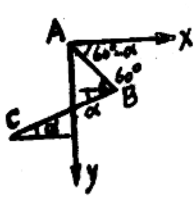
由此可得　　$\mathrm{tg}\,\beta=3\mathrm{tg}\,\alpha$

§1.2 平面任意力系

1.2—1　二均质杆 AB 及 BC，有相同截面，以其末端固连成有60°的摇手柄 ABC，AB 杆仅 BC 杆的一半长，此摇手柄 A 端以 AD 线悬挂。试求平衡时 BC 杆和水平所成倾角 α 之大小。杆截面的大小可略去不计。



解：设 AB 长 l 重 P，BC 长 $2l$ 重 $2P$，平衡时，ABC 重心的水平坐标应与 A 点的水平坐标相同。取 Axy 坐系标如图，设体系重心的 x 坐标为 x_c，则有

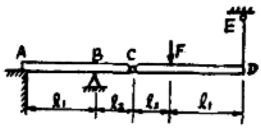


$$x_c=\frac{1}{3P}\left\{P\frac{l}{2}\cos(60°-\alpha)+2P\cdot\left[\frac{l}{2}\cos(60°-\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2}l\sin(60°-\alpha)\right]\right\}$$

$$=\frac{l}{3}\left[\frac{3}{2}\cos(60°-\alpha)-\sqrt{3}\sin(60°-\alpha)\right]=0$$

得 $\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{3}/5$

1.2—2 复梁由梁 AC 与 CD 以铰链接于 C 点而构成，在 A 点为固定铰支，在 B 点为动支（在滚子上），梁之一端 D 以铅垂细绳 DE 挂起，在梁 CD 上作用已知力 F，求铰链 A 的反作用力，支点 B 的反作用力及绳 DE 的张力。

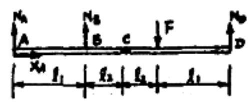


解：先对整个复梁写平衡方程有：$X_A=0$，$\Sigma m_A=0$，

$N_A+N_B+N_D-F=0$，

$l_1N_B+2(l_1+l_2)N_D-$

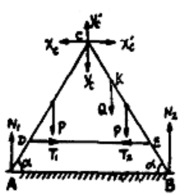
$-(l_1+2l_2)F=0$



单独分析 CD 梁，对 C 点取矩有 $(l_1+l_2)N_D-l_2F=0$ 得 $N_D=l_2F/(l_2+l_2)$

代入前式得 $N_B=F$，$N_A=F-N_B-N_D=-l_2F/(l_1+l_2)$

1.2—3 梯子由两相同的部分 AC 与 BC 均匀棒构成，这两部分各重 P 公斤，用铰链连接于 C 点，并用绳子 DE 互相联系。梯放在光滑的水平地板上，在其上 K 点处站一人，重 Q 公斤。求在 A 点与 B 点的反作用力，绳的张力和铰链 C 内的反作用力，如 $AC=BC=2l$，$DC=EC=a$，$BK=b$，又 $\angle CAB=\alpha$



解：$\boldsymbol{T}_2=-\boldsymbol{T}_1$，又以 x_C'、y_C' 表 C 点左梯对右的水平与铅垂作用，若对左梯的作用表为 x_C、y_C。有 $x_C'=-x_C$，$y_C'=-y_C$。

整梯有平衡方程

$N_1+N_2-2P-Q=0,$

$4l\cos\alpha\cdot P+b\cos\alpha\cdot Q-4l\cos\alpha\cdot N_1=0$

得 $\quad N_1=P+\dfrac{b}{4l}Q,\qquad N_2=P+(1-\dfrac{b}{4l})Q.$

再考察左梯之平衡，有：

$T_1-x_c=0,\ N_1-y_c-P=0,$

$a\sin\alpha\cdot T_1+l\cos\alpha\cdot P-2l\cos\alpha\cdot N_1=0$

得 $\quad y_c=N_1-P=\dfrac{b}{4l}Q,$

$x_c=T_1=\dfrac{l}{a}(2N_1-P)\cot\alpha=\dfrac{l}{a}(P+\dfrac{b}{2l}Q)\cot\alpha.$

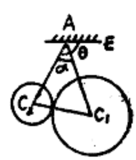
1.1—4 有一园板半径为 r 重 P，以一绳系于 O 点，绳长为 b；另有一重 Q 长 $2a$ 之杆亦系于 O 点，绳与杆皆可绕过 O 点的水平轴转动，问当平衡时绳 b 与铅垂线间夹角 φ 满足何种关系？

解：平衡条件是合力为 0 合矩为 0。由图示 $OA=b$，$oc=a$。故 $\quad bP\sin\varphi-aQ\sin(\alpha-\varphi)=0$

得 $\quad (bP+aQ\cos\alpha)\sin\varphi=aQ\sin\alpha\cos\varphi,$

又 $\quad \sin\alpha=r/b,\ \cos\alpha=\sqrt{b^2-r^2}/b$

故 $$\cot\varphi=\frac{bP+aQ\dfrac{\sqrt{b^2-r^2}}{b}}{aQ\cdot\dfrac{r}{b}}=\frac{b^2P}{aQr}+\sqrt{\frac{b^2}{r^2}-1}$$



1.2—5 两光滑均匀球 C_1 及 C_2，其重量为 P_1 及 P_2，以二绳悬于 A 点，且知 $AC_1=AC_2$，$\angle C_1AC_2=\alpha$。试求绳 AC_2 与水平面 AE 之夹角 θ 及绳中张力 T_1、T_2 以及两球间的压力 N。

解：可仅在 AC_1C_2 组成的铅垂平面内考虑问题。

1．设 $\quad AC_1=AC_2=L$，则体系质心的 x 坐标为

$$x_c = \frac{L}{P_1 + P_2}\left[P_1\cos(\theta - \alpha) + P_2\cos\theta\right],$$

平衡时 $x_c = 0$,因而 $\operatorname{tg}\theta = -(P_1\cos\alpha + P_2)/P_1\sin\alpha$

2. $\overrightarrow{AC}_1 = L\cos(\theta - \alpha)\boldsymbol{i} + L\sin(\theta - \alpha)\boldsymbol{j}$,

$\overrightarrow{AC}_2 = L\cos\theta\boldsymbol{i} + L\sin\theta\boldsymbol{j}$

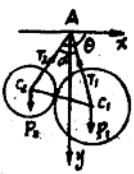
$\boldsymbol{P}_1 = P_1\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{T}_1 = -T_1\cos(\theta - \alpha)\boldsymbol{i} - T_1\sin(\theta - \alpha)\boldsymbol{j}$

对C_2取矩有 $\overrightarrow{C_2C_1} \times \boldsymbol{P}_1 + \overrightarrow{C_2C_1} \times \boldsymbol{T}_1 = (\overrightarrow{AC}_1 - \overrightarrow{AC}_2) \times (\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{T}_1) = 0$.

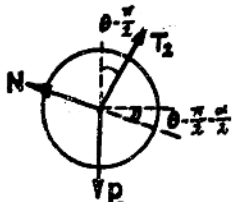
故 $P[\cos(\theta - \alpha) - \cos\theta] + T_1[\sin(\theta - \alpha)\cos\theta - \sin\theta\cos(\theta - \alpha)]$

$$= 2P\sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2} - 2T_1\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

得 $$T_1 = P_1\frac{\sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$



同理可得 $$T_2 = P_2\frac{\sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$



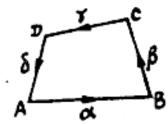
3. 再考虑 C_2球的平衡有

$$N\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = T_2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -T_2\cos\theta.$$

得 $$N = -P_2\frac{\cos\theta}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

1.2—6 四边形 $ABCD$ 的边上作用有沿边 AB、BC、CD、DA的力，力的大小分别与边长成α、β、γ、δ倍，证

明如此系统保持平衡，则　$\alpha\gamma=\beta\delta$。



解：对A点取矩：

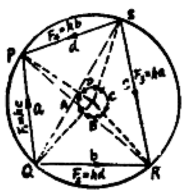
$$\beta\overline{AB}\cdot\overline{BC}\sin\angle B+\gamma\overline{CD}\cdot\overline{AD}\sin\angle D=0,$$

对C取矩：$\delta\overline{AD}\cdot\overline{CD}\sin\angle D+\alpha\overline{AB}\cdot\overline{CB}\sin\angle B=0$,

即　$\beta\overline{AB}\cdot\overline{BC}\sin\angle B=-\gamma\overline{CD}\cdot\overline{DA}\sin\angle D$,

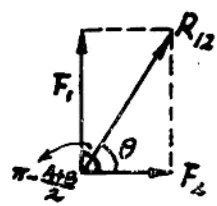
$\alpha AB\cdot\overline{BC}\sin\angle B=-\delta\overline{CD}\cdot\overline{DA}\sin\angle D$。

以此二式相除得　　$\alpha\gamma=\beta\delta$。



1.2—7　有四边形内接于园，证明沿此四边作用着与对边成比例的力时将保持平衡，且 其逆命题亦真，即如平衡，力必与对边成比例。

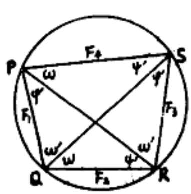
解：作四边形$PQRS$，设其边长分别为a、b、c、d，作用力为F_1、F_2、F_3及F_4，并作各边所对的园心 角A、B、C、D，设F_1、F_2之合力为R_{12}，F_3、F_4之合力为R_{34}，则有



$$R_{12}=\sqrt{F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$=k\sqrt{c^2+d^2-2cd\cos\frac{A+B}{2}}$$

但在 $\triangle PRS$有 $\overline{PR}^2=c^2+d^2-2cd\cos(\pi-\frac{C+D}{2})$



$$=c^2+d^2-2cd\cos\frac{A+B}{2},$$

故　$R_{12}=k\,\overline{PR}$。同理可证

$$R_{34}=k\overline{PR}.$$

由力图知$\dfrac{\sin\theta}{kc}=\dfrac{\sin\dfrac{A+B}{2}}{R_{12}}$