

上海大学出版社

2005年上海大学博士学位论文 2



超细长弹性杆非线性力学的建模与分析

- 作者：薛 纭
- 专业：一般力学与力学基础
- 导师：陈立群



2005 年上海大学博士学位论文 2

超细长弹性杆非线性 力学的建模与分析

作 者：薛 纭
专 业：一般力学与力学基础
导 师：陈立群

上海大学出版社

· 上 海 ·

Shanghai University Doctoral
Dissertation (2005)

Modeling and Analysis of Nonlinear Mechanics of a Super-thin Elastic Rod

Candidate: Xue Yun

Major: General and Fundamental Mechanics

Supervisor: Prof. Chen Lique

Shanghai University Press
• Shanghai •

上海大学

本论文经答辩委员会全体委员审查,确认符合上海大学博士学位论文质量要求.

答辩委员会名单:

主任:	梅凤翔	教授, 北京理工大学应用力学系	100081
委员:	刘延柱	教授, 上海交通大学工程力学系	200030
	李俊峰	教授, 清华大学工程力学系	100084
	程昌钧	教授, 上海大学力学系	200436
	郭兴明	教授, 上海市应用数学和力学研究所	200072
导师:	陈立群	教授, 上海大学力学系	200436

评阅人名单:

梅凤翔	教授, 北京理工大学应用力学系	100081
陆启韶	教授, 北京航空航天大学理学院	100083
李俊峰	教授, 清华大学工程力学系	100084

评议人名单:

张 伟	教授, 北京工业大学机械工程学院	100022
王德石	教授, 武汉海军工程大学兵器工程系	430033
金栋平	教授, 南京航空航天大学振动所	210016
郭永新	教授, 辽宁大学物理系	110036

答辩委员会对论文的评语

薛纭同学的博士学位论文的选题属于一般力学和固体力学的交叉领域,具有重要的理论意义和应用背景.

论文取得的成果与创新点包括以下几个方面:

(1) 建立了弹性细杆静力学问题的分析力学框架,包括基本概念、微分变分原理、积分变分原理、微分方程以及初积分等.

(2) 引进复刚度和复柔度概念,将弹性细杆的 Schrödinger 方程从圆截面推广到非圆截面.

(3) 用一次近似理论讨论了 Kirchhoff 方程常值特解的 Lyapunov 稳定性,并研究了受曲面约束的圆截面弹性细杆的平衡问题.

(4) 给出了双重自变量离散系统的动态稳定性的定义,讨论了非圆截面直杆平衡的动态稳定性.

论文选题新颖,有相当难度,理论性强,是一篇优秀的博士论文.论文反映出作者较全面地掌握了与本课题相关的国内外发展动态,显示了作者具有坚实宽广的基础理论和系统深入的专门知识,具有很强的独立科研能力.

在答辩中论述清楚,回答问题正确.

答辩委员会表决结果

经答辩委员会投票表决,全票(5票)通过薛纭同学的博士学位论文答辩,并建议授予博士学位。

答辩委员会主席：**梅凤翔**

2004年6月25日

摘 要

以 DNA 等一类生物大分子为背景的超细长弹性杆非线性力学是经典力学与分子生物学的交叉领域,在方法内容上是用一般力学的概念和方法研究杆的变形和运动,因而也是动力学与弹性力学的交叉领域,是当前一般力学的前沿课题之一.本文研究非圆截面超细长弹性杆的建模问题,在研究内容和研究方法上进行调研,将分析力学的理论和方法系统地应用到杆的建模理论中去,将 Schrödinger 方程从圆截面推广到非圆截面;研究了曲面上杆的平衡问题,讨论了 Kirchhoff 方程的相对常值特解及其 Lyapunov 稳定性;研究了杆的变形和运动的几何关系,以及动力学问题,应用一次近似方法,讨论了具有原始扭率的直杆平衡的 Lyapunov 动态稳定性.全文包括以下八个方面:

1) 简要阐述了弹性细杆力学的应用背景和 DNA 双螺旋结构,重点阐述了超细长弹性杆的研究历史和现状.表明了一般力学和分子生物学,以及和弹性力学的交叉性.

2) 概述了超细长弹性杆力学的基本理论与基本方法,指出了 Kirchhoff 理论的基本假定及其适用前提和意义;给出了弹性细杆平衡位形的几何描述;列举了弹性细杆静力学与重刚体动力学之间的“Kirchhoff 动力学比拟”;在 Saint-Venant 原理的意义上建立了 Kirchhoff 方程的定解问题,明确了弹性细杆平衡的 Lyapunov 稳定性和 Euler 稳定性以及平衡稳定性在概念上的异同.简述了弹性细杆静力学的 Cosserat 理论.

3) 将分析力学的理论和方法移植到弹性细杆静力学,建立了弹性细杆平衡问题的分析力学框架.以杆横截面为对象,分析了自由度、约束、约束方程和约束力,建立了各种形式的 D'Alembert-Lagrange 原

理、Jourdain 原理和 Gauss 原理,建立了 Hamilton 原理和 Hamilton 正则方程;导出了 Lagrange 方程、Nielsen 方程、Appell 方程和 Boltzmann-Hamel 方程.对于受几何或非完整约束的杆,导出了带乘子的 Lagrange 方程;对于杆中心线存在尖点的情形,导出了与分析力学碰撞方程形式相同的近似计算公式.

4) 根据作者提出的弹性细杆的复刚度和复柔度概念,将弹性细杆的 Schrödinger 方程从圆截面推广到非圆截面,在此基础上导出了无扭转杆关于曲率的 Duffing 方程,用一次近似理论讨论了特解的 Lyapunov 稳定性,作出了 Duffing 杆的 3 维数值模拟图;作为 Schrödinger 方程的应用,讨论了几何特性用曲率、挠率和截面扭角表示时的圆截面杆平衡的反问题.

5) 分别计算了 Kirchhoff 方程相对惯性参照系、截面主轴坐标系以及中心线 Frenet 坐标系的常值特解,并用一次近似理论讨论了它们的 Lyapunov 稳定性,在参数平面上画出了稳定域.讨论中进行了动力学比拟.

6) 研究受曲面约束的圆截面弹性细杆的平衡问题.提出曲面约束的基本假定,建立受曲面约束的圆截面弹性细杆的 Kirchhoff 方程;作为应用,讨论了约束是圆柱面的情形,导出方程的螺旋杆特解,进行数值模拟并作出杆中心线在不同起始条件下的 3 维几何图象.

7) 研究 Kirchhoff 杆动力学.分析截面运动和变形的几何关系,导出截面弯扭度与角速度的基本方程,建立了 Kirchhoff 杆的动力学方程;研究了杆的动态稳定性,给出了双重自变量离散系统的动态稳定性的定义,讨论了具有原始扭率的非圆截面直杆平衡的动态稳定性.

8) 总结和展望.从本构关系、约束或介质环境、反问题、数值计算以及与分子生物学的结合等诸方面对超细长弹性杆非线性力学的未来的发展作出展望,提出新的课题.

关键词: 超细长弹性杆, Kirchhoff 理论, 分析力学, Schrödinger 方程

Abstract

Nonlinear mechanics for a super-thin elastic rod with the biological background of DNA supercoiling macromolecules is an interdisciplinary area of classical mechanics and molecular biology. It is also one of dynamics and elastic theory because elastic bodies are analyzed via the theory of dynamics. It is in frontiers of general mechanics (dynamics, vibration and control). This dissertation investigates the modeling of a constrained super-thin elastic rod and analyses of the stability in equilibrium. The existing research results are summarized. Analytical mechanics is systematically applied to model an elastic rod. The Schrödinger equation expressed by complex curvatures or complex bending moments is, respectively, extended from circular to non-circular cross section. Equilibrium of a rod constrained on a surface is investigated. Special solutions of the Kirchhoff equation related to various reference frames, such as inertia coordinate systems, principal coordinate systems fixed in cross section and the Frenet coordinate systems of central line of a rod, are obtained and their Lyapunov stability is analyzed. Geometrical relationships between deformation and kinematics of a cross section are derived. Dynamical equations of a cross section of a rod are established and theorems on the first-approximation stability are developed. The dissertation consists of eight parts shown bellow:

(1) The application background of elastic rod mechanics and DNA supercoiling structure are outlined. The super-thin elastic rod research history and current developments are detailed. It shows the interdisciplinary of classical mechanics, molecular biology and elastic mechanics for this subject.

(2) The basic theory and method of a super-thin elastic rod mechanics are addressed. The fundamental hypothesis, application conditions and significances of the Kirchhoff theory are presented. Geometrical description of a thin elastic rod equilibrium position is given. Examples of “the Kirchhoff dynamical analogy” between statics of a super-thin elastic rod and dynamic of a heavy rigid body are presented. Determination solution of Kirchhoff equation on Saint-Venant’s principle is established. It is distinguished that the concepts among Lyapunov stability, Euler stability and stability of a state of equilibrium. The Cosserat theory on statics of a thin-elastic rod is introduced.

(3) By applying the theory and method of analytical mechanics to the modeling of a thin-elastic rod, the framework of analytical mechanics is constructed for the equilibrium of a super-thin elastic rod. For the cross section of a rod, concepts such as freedom, constraints and constrained equations and constrained forces are analyzed. And various variational principles of mechanics, such as the D’Alembert-Lagrange principle, the Jourdain principle, and the Gauss principles are established. The principles are applied to derive the Hamilton canonical equation, the

Lagrange equation, the Nielsen equation, the Appell equation and the Boltzmann-Hamel equation. For the case that a rod is subjected to constraints, the Lagrange equation with undetermined multiplier is presented. In the neighborhood of a singular point, the equation of equilibrium is transformed into the same form as the one for collisions.

(4) The Schrödinger equation expressed by complex curvatures or complex bending moments are generalized from circular to non-circular cross section by means of complex rigidity or complex flexibility respectively. When the principal coordinate system fixed in the cross section coincides with the Frenet one of the centerline of a rod, the Schrödinger equation leads to the Duffing equation about the curvature of the centerline of a rod. Lyapunov stability of its special solutions is investigated based on the first-approximation stability theory. The 3-dimensional numerical simulation of the Duffing rod is performed. As an application of the Schrödinger equation, inverse problem is treated when the behavior in geometry is expressed by curvature, torsion and angle of cross section related to Frenet coordinate.

(5) Special solutions of the Kirchhoff equation related to various reference frames, such as inertia coordinate systems, principal coordinate systems fixed in cross section and Frenet coordinate systems of central line of a rod, are obtained. The first-approximation stability theory is applied to study the Lyapunov stability of those special solutions. Stable areas are determined in the parameter plane. Dynamical analogy is

made in these discussions.

(6) The equilibrium of a super-thin elastic rod with circular cross section constrained to a surface is analyzed. The Kirchhoff equation is established for constrained rod. The equation is applied to the case in which the constrained surface is a cylinder, and a special solution of a helical rod is derived. The 3-dimentional plots of the rod at different initial conditions are drawn according to numerical computation.

(7) Dynamics of a Kirchhoff rod is studied. The geometrical relationships between the motion and the deformation of a cross section are analyzed, and the dynamical equation of a cross section is established. Equilibrium stability of a rod is studied in the sense of dynamics. Definitions of stability of discrete dynamical system with two independent variables, i. e. time and arc coordinate, are given and theorems on the first-approximation stability for the system are developed.

(8) Conclusions of the paper are given. Future research topics proposed. Those topics include a rod with nonlinear constitutive relations and/or subjected to various kinds of constrains, inverse problem of rod mechanics, numerical simulation for more general case, and problems arising from molecular biology.

Key word: super-thin elastic rod, Kirchhoff theory, analytical mechanics, Schrödinger equation

目 录

第一章 前言	1
1.1 引言	1
1.2 超细长弹性杆非线性力学的应用背景	1
1.3 超细长弹性杆非线性力学研究的历史和现状	3
1.4 超细长弹性杆非线性力学研究的意义和应用前景	8
1.5 论文内容概述	9
1.6 作者的主要工作和本文的特点	11
第二章 超细长弹性杆非线性力学的理论与方法概述	12
2.1 引言	12
2.2 超细长弹性杆的 Kirchhoff 假定	12
2.3 超细长弹性杆平衡位形的离散化	13
2.4 超细长弹性杆平衡的 Kirchhoff 方程及其动力学比拟	19
2.5 Saint-Venant 原理与 Kirchhoff 方程的定解问题	23
2.6 超细长弹性杆平衡问题建模的分析力学方法	24
2.7 超细长弹性杆平衡的 Euler 稳定性、Lyapunov 稳定性和平衡稳定性	26
2.8 关于数值方法	29
2.9 动力学比拟中出现的问题	30
2.10 弹性细杆平衡问题的 Cosserat 理论	30
2.11 小结	32

第三章 超细长弹性杆建模的分析力学方法	34
3.1 引言	34
3.2 约束、约束方程和约束力	34
3.3 虚位移及其限制方程	37
3.4 超细长弹性杆静力学的微分变分原理	41
3.5 超细长弹性杆静力学的积分变分原理	49
3.6 Lagrange 方程、Nielsen 方程和 Appell 方程以及 首次积分问题	52
3.7 中心线存在尖点与碰撞现象	55
3.8 小结	56
第四章 超细长非圆截面弹性杆平衡的 Schrödinger 方程	57
4.1 引言	57
4.2 Kirchhoff 方程及其首次积分	58
4.3 Schrödinger 方程的建立	59
4.4 无扭转杆关于曲率的 Duffing 方程	64
4.5 准对称截面杆的近似平衡方程及半解析解	68
4.6 平衡的反问题及其解法初步	70
4.7 小结	71
第五章 Kirchhoff 方程的相对常值特解及其 Lyapunov 稳定性	73
5.1 引言	73
5.2 Kirchhoff 方程相对固定坐标系的常值特解及其稳定性	75
5.3 Kirchhoff 方程相对主轴坐标系的常值特解及其稳定性	82
5.4 Kirchhoff 方程相对 Frenet 坐标系的常值特解及其 稳定性	84

5.5 小结	88
第六章 受曲面约束的弹性细杆的平衡问题	90
6.1 引言	90
6.2 曲面上圆截面弹性细杆的平衡微分方程	90
6.3 受圆柱面约束的弹性细杆的平衡问题及其数值模拟	94
6.4 小结	102
第七章 超细长弹性杆动力学及其平衡的 Lyapunov 稳定性 ...	103
7.1 引言	103
7.2 截面运动和变形的几何关系	103
7.3 超细长弹性杆的动力学方程	108
7.4 双重自变量离散系统的稳定性基本概念及其一次近似方法	113
7.5 非圆截面直杆平衡的动态稳定性	115
7.6 小结	122
第八章 总结与展望	123
8.1 总结	123
8.2 展望	124
参考文献	126
致谢	141

第一章 前言

1.1 引言

经典力学和分子生物学这两门学科在 20 世纪 70 年代找到了结合点, DNA 等一类生物大分子以超细长弹性杆为力学模型用 Kirchhoff 弹性杆理论研究其平衡和稳定性问题, 形成一个分子生物学与力学交叉的新的研究领域. 这一学科的交叉起因于分子生物学需要研究生物分子的空间形态, 它是其生物化学性质的重要决定因素之一, 而其力学模型属于 Kirchhoff 弹性杆理论的研究范畴. 分子生物学背景为弹性细杆力学不断提出新的研究课题, 经典力学为分子生物学现象作出力学解释, 这种交叉与渗透极大地促进了学科的发展, 反映了当代科学发展的基本趋势.

本章首先简述超细长弹性杆的应用背景和 DNA 双螺旋结构, 重点阐述弹性细杆研究的历史和现状、概述本选题的意义以及本文的主要工作及其特点.

1.2 超细长弹性杆非线性力学的应用背景

长期以来, 弹性细杆力学作为弹性力学的分支是以柱、电缆、绳索、钻杆等为其工程背景加以研究的. 而促成其近代发展是却是分子生物学.

在分子生物学领域中, Watson 和 Crick(1953 年 4 月 25 日的英国《自然》杂志)提出 DNA 分子的双螺旋三维结构模型成为 20 世纪最伟大的科学发现之一, 他俩因此荣获 1962 年诺贝尔奖^[1,2]. 从此以