

相变和临界现象 (III)

于 涿 郝柏林

(中国科学院理论物理研究所)

本文第(I)篇¹⁾介绍了连续相变的主要特点和平均场理论的基本概念,第(II)篇²⁾从平均场理论与统计模型严格解以及精密的实验结果的矛盾出发,叙述了重正化群方法所导致的重大进展。本篇着重讨论相变理论的新发展,使我们对一些物理和几何概念有了更深刻的认识。并稍为涉及相变与其它物理问题的联系。公式、图表和引文仍与前两篇连续编号。

八、涨落和空间维数的关系

为什么伊辛模型在一维无相变?为什么海森堡模型和其他模型在二维以下没有长程序?为什么在四维以上空间中平均场理论才是“唯一正确”的?这主要是因为空间维数不同时,涨落起的作用不同。

设想一个一维的铁磁链,绝对零度时磁矩按同一方向排列。当 $T > 0K$ 时,允许有一些反向排列的段落。假定 N 个磁矩中有 n 个这种副向的“界面”,每个界面能量是 c 。由于界面可处在不同位置,体系的熵增加到

$$S = k \ln \frac{N!}{(N-n)!n!} \quad (36)$$

自由能的变化是

$$\Delta F = nc - TS \quad (37)$$

利用斯特林公式容易求出

$$\frac{\partial \Delta F}{\partial n} = c - kT \ln \frac{N-n}{n} < 0 \quad (38)$$

界面越多,自由能越低,因此涨落破坏了长程序。

离散情况下的涨落作用和连续对称的情形很不相同。取一个边长为 L 的 d 维晶格(图9),沿某一方向有自旋倒向的界面,界面的面积比例于 L^{d-1} 。与自旋全平行的基态相比,多出一个表面能

$$\Delta E \propto cL^{d-1} \quad (39)$$

如果 $d > 1$,则当 $L \rightarrow \infty$ 时, ΔE 也趋向无穷,即有无穷高的位垒,它不能靠熵的增加补偿。因此,涨落的作用受到抑制,不再能破坏长程序。

对于连续对称,情形很不一样(见图10)。假定在某一方向上加边界条件,使左右两端面间自旋夹角为 θ 。由于自旋方向可以连续变化,平均到每一层上的

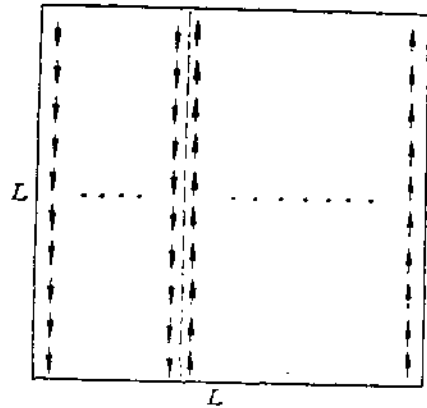


图 9

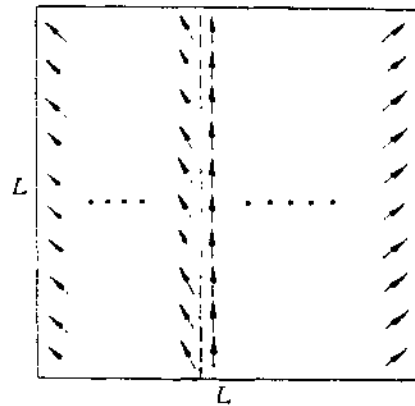


图 10

角度变化是 θ/L , 它和自旋平行状态的能量差是 $c \left(1 - \cos \frac{\theta}{L}\right) L^{d-1}$ 。与基态的总能量差是 L 层能量差之和,即

$$\Delta E \propto c \left(1 - \cos \frac{\theta}{L}\right) L^{d-1} \cdot L \approx \frac{c}{2} \theta^2 L^{d-1}$$

只有 $d > 2$ 时才会出现无穷高的势垒。因此,对于连

1) 见《物理》1980年第9卷第4期,以下简称为(I)。

2) 见《物理》1980年第9卷第5期,以下简称为(II)。

续对称,是否存在长程序的“边界维数”是 $d = 2$, 正是根据这一点发展了 $\epsilon = d - 2$ 的展开技术。

正如文章(1)中讲过的,临界点附近的涨落是一种无能隙的长波(即波矢 $k \rightarrow 0$)元激发。不管是连续还是离散对称,都有 $T \rightarrow T_c$ 时能隙趋向于零的“软模”。对于连续对称的情形,还有所谓戈尔茨通玻色子,它在任何温度下能隙都为零。正是这些恢复对称的元激发破坏了长程序。前面结合图 10 所作的讨论还可以表述得更数字化一点。没有能隙的元激发的能量 $\epsilon(k) \propto k^2$ 。如果要计算它们对总能量的修正,就要把各种“中间态”的贡献都加起来。这时微扰论中的“能量分母”就是 $\epsilon(k)$, 因此要计算的积分是

$$\int \frac{d^d k}{k^2}$$

当 $d \geq 2$ 时,这个积分在 $k \rightarrow 0$ 时发散(在场论中称为“红外”发散),说明涨落的作用很大,建立不了长程序。对此还可以给予比较直观的物理解释:把一维和二维的波矢 k 的空间都扩大成三维的,满足长波条件 $k \leq \delta$ 的区域在一维情形下是一个厚度为 δ 的薄片,二维是半径为 δ 的圆柱,三维是半径为 δ 的球,权重越来越小。涨落在任何情况下都存在,但空间维数越高,它的作用越受到抑制。

平均场理论在四维以上正确,道理也是类似的。考虑长波元激发的相互作用对总能量的贡献时,要计算的积分是

$$\int \frac{d^d k}{\epsilon(k) \cdot \epsilon(k)} \sim \int \frac{d^d k}{k^4}$$

如果 $d > 4$, 没有红外发散,这些涨落的权重太小。平均场理论在四维以上成为一种没有相互作用的“自由场”理论。因此, $d = 4$ 也是一个特别的“边界维数”。

这样我们就看到,人类生活的三维空间巧妙地夹在两个“边界维数”之间,恰好容许有丰富多采的相变现象和远非平庸的理论解释。然而,这并不是说,更低维和更高维的空间没有现实的物理意义。许多物理系统具有在一维或二维为主的相互作用,作者之一在多年前就讨论过这种一维或二维“发达”的系统^[11]。低维系统的物理学是一个方兴未艾的领域,而四维时空中的相变问题涉及基本粒子理论的某些根本问题,它们都超出了本文的范围。

顺便指出,实际计算前面写出的两类积分时,还会遇到 $k \rightarrow \infty$ 时的“紫外”发散问题。不过在研究关联长度发散的相变现象时,完全可以忽略晶格常数 a 尺度上的运动,自然地把积分在 $k \leq \frac{1}{a}$ 处截断。如何处理这些发散积分,得出与截断无关的物理结果,这正是“重正化”的原旨。前两个积分与所谓“质量重正化”和“电荷重正化”有关系。相变的物理图象赋予重正化手续以直观的解释。

空间维数 d 和内部自由度数目 n 都等于 2 的情况有些特殊。早在 1966 年就严格证明,连续对称即 $n \geq 2$ 的情形下, $d = 2$ 时没有自发破缺。但几乎同时有人从级数展开中看到存在相变的迹象。这究竟是什么状态呢?原来这是一方面没有长程序,另一方面又发生相变的特殊情形。这时,除原有的元激发外,还有一类总体性(或称拓扑性)的激发态。设想一个平面铁磁体,自旋按同心圆排列。这类状态的能量和熵都有对数奇异性。 T_c 以下,左旋和右旋的两种“漩涡”可以处于互相束缚的状态,能量是有限的, T_c 以上才离解。由于自旋的平均值是零,所以没有长程序,然而由自旋波决定的关联长度却趋于无穷。关联函数

$$G(r) \propto r^{-\nu(T)} \quad (40)$$

中的临界指数 ν 与温度有关。仔细的理论分析表明 $\nu(T_c) = 1/4$ 。这是一种比普通二类相变更弱的相变,不仅没有体积变化和潜热,比热也是连续的。有奇异性的是更高阶的导数^[12]。

客观世界中有没有这类系统?有!非常薄的液氦和液晶膜、平面各向异性很强的铁磁体和某些层状化合物都具有接近这类模型的特性。不久前在液氦薄膜的研究中,证实超流部分的密度在 T_c 有一跃变^[13],这与理论预言一致。这类弱相变的实验和理论研究当前很活跃。

九、怎样理解连续变化的空间维数?

涨落和维数的关系,从一个侧面说明了空间维数在相变和临界现象中的重要作用。为什么对连续对称模型存在自发破缺的“边界维数”正好是 2,而平均场理论成立的“边界维数”正好是 4,还可以有一些“几何”解释。怎样理解从四维往下降的 $\epsilon = 4 - d$ 展开或者从二维往上升的 $\epsilon = d - 2$ 展开?看来我们对于空间维数的认识应当深化,还须要有连续变化的空间维数。

其实,数学已经为我们准备了必要的概念。维数和测度有密切关系:用半径为 R 的小圆来覆盖一块面积 S , 所需小圆的数目比例于 S/R^2 ; 同样,用半径为 R 的小球来覆盖一块体积 V , 所需球数比例于 V/R^3 。一般情形下,用高维球来覆盖一个 d 维对象 A , 所需球数大致是 $N \propto A/R^d$ 。如果保持 R 不变,把 A 的线度增大 k 倍成为 A_1 , 则 A_1 作为 d 维对象可能比原来大 k 倍: $A_1 = kA$ 。为了覆盖 A_1 , 所需球数为 $N_1 \propto A_1/R^d = kA/R^d$ 。另一方面,如果保持 A 不变,把球的半径缩小 l 倍,所需球数自然也是 $N_l \propto A/(R/l)^d = l^d A/R^d$ 。比较这两个式子,得到重要关系式

$$l^d = k. \quad (41)$$

它可以作为空间维数的新定义:如果一个对象的线度放大 l 倍,它本身就成为原来的 k 倍,而且 $l^d = k$, 则这个对象的维数就是 d 。对于普通的点、面、线、体,这

十、动态临界现象

样定出的维数仍是 $D, 1 < D < 2$ 。我们也可以构造具有“自相似”的内部层次的几何对象。例如,把 $(0, 1)$ 区间三等分舍去中段,剩下的两段各自三等分舍去中段,如此无穷分割下去。取 $(0, 1)$ 的一段为对象 A , 取 $l = 3$ 倍,它又充满 $(0, 1)$ 区间,取 $(1/3, 2/3)$ 和 $(2/3, 1)$ 这一段与原来自完全相同的两个对象,于是 $3^d = 2, d = \log_3 2 = 0.6309\dots$ 。这就是 1919 年豪斯道夫引入的维数概念^[11]。它不必取整数值。本节中的 d 都是指这种豪斯道夫维数。空间维数用 D 代表。读者可能已经注意到,这类“自相似”的变换手续,和前面提到的自旋集团的归并有共同之处。

包含随机因素的几何对象,可能具有更高层次的豪斯道夫维数。例如,考虑一个完全随机的无规行走粒子。从布朗运动的初等理论知道:每步长 l , 行走 N 步后首尾距离的平方平均值是 $\langle r^2 \rangle = R^2 N$ 。 $\langle r^2 \rangle$ 可以看作是无规行走的尺度,而覆盖数目是 $N = \langle r^2 \rangle / R^2$, 由此看出无规行走的豪斯道夫维数是 $d_{RW} = 2$, 即两倍于力学运动轨迹的维数。

在 D 维空间中考察两个几何对象 A 和 B 的相交部分 $A \cap B$ 的维数,数学公式

$$d_{A \cap B} = d_A + d_B - D \quad (42)$$

的正确性可用一些直观的例子检验: $D = 3$ 维空间中面与面交于线,面与线交于点,线与线基本上不相交。如果把 (42) 式用于无规行走,立刻得到两个不等式,首先,要求两个无规行走至少相交于点,即

$$d_{RW} + d_{RW} - D \geq 0,$$

其次,相交部分的维数不比单个无规行走更高,即

$$d_{RW} + d_{RW} - D \leq d_{RW}.$$

由此得到

$$2 = d_{RW} \leq D \leq 2d_{RW} = 4. \quad (43)$$

这里恰好出现了两个“边界维数”:二维以下空间容纳不了相交的无规行走,而四维以上空间中无规行走基本上不相交,即不发生相互作用。

把 (41) 式写成

$$d = \frac{\ln k}{\ln l},$$

并与文章 (II) 中 (35) 式比较,可见临界指数 ν 的倒数可以看成某种豪斯道夫维数。平均场理论中 $\nu = 1/2$, 恰好与纯无规行走的维数 $d_{RW} = 2$ 一致。因此它在四维以上空间中才是准确的。重正化群方法和实验测量都给出 $\nu > 1/2$, 乃是记忆效应的无规行走。这个类比在高分子溶液的统计理论中有直接的物理意义。那里每个高分子链就是一个无规行走的轨迹。如果计入分子本身占有的空间,排除无规行走的自交,就是一种记忆效应,于是 ν 获得大于 $1/2$ 的正确数值。

到目前为止,我们只讨论了临界点附近的热力学平衡性质,没有涉及系统随时间的演化。实际上临界点附近各种非平衡性质也有许多异常,而且比静态现象更为丰富。这里研究的对象包括扩散、热导、粘滞流等输运过程,系统对随时间变化的外场的响应,外界扰动除去后趋向平衡的弛豫过程等。与平衡性质不同,这些物理量不仅与体系在某一时刻的状态有关,而且依赖于它的时间演化。但是,它们大多可以直接测量,例如用超声吸收和核磁共振测弛豫时间,用光或中子的非弹性散射测动态结构因子——时间关联函数的傅里叶变换,还可间接地定出输运系数。

动态现象中最有代表性的事实是所谓临界慢化,即逼近临界点时序参量和其它“慢模”的弛豫时间趋向无穷。基于文章 (I) 中介绍的物理图象,很容易理解这一点。在临界点附近关联长度趋向无穷,出现许多大尺度的涨落或“花斑”,趋向平衡的时间必然很长。在气液临界实验中往往要花几天或几个月的时间才能达到新的平衡状态。

在动态临界现象的描述中,相应于平均场理论的是所谓“常规”理论。它假定序参量趋向平衡的速度比例于自由能(或有效哈密顿量)对序参量的导数。还是以自旋系统为例,准到二次项的自由能写成

$$F = \sum_k \frac{1}{2} (at + k^2) M_k M_{-k} \quad (44)$$

这里 M_k 是序参量的傅氏分量, t 是约化温度, $a > 0$ 。序参量随时间的变化用唯象方程

$$\frac{dM_k}{dt} = -\Gamma \frac{\partial F}{\partial M_{-k}} = -(at + k^2) \Gamma M_k \quad (45)$$

描述。弛豫时间是

$$\tau_k^{-1} = (at + k^2) \Gamma. \quad (46)$$

临界点上 $t = 0$, 对于 $k \rightarrow 0$ 的长波涨落,只要输运系数 Γ 是有限量, τ 就会趋向无穷大。根据文章 (I) 中第 (6) 式,弛豫时间还可通过磁化率表示,即

$$\tau_0 = \chi \Gamma^{-1}. \quad (47)$$

这说明弛豫时间和磁化率的发散是由同一原因引起的。 $\frac{\partial F}{\partial M}$ 表示“恢复力”的大小, $\tau^{-1} \rightarrow 0$ 表明几乎没有恢复力。与平均场理论类似,这种常规理论能定性解释临界慢化现象,但定量上与实验不符,这里假定输运系数 Γ 与温度无关,实际上由于不同运动模式间的非线性耦合,它和不同尺度的涨落有关,因而要随温度变化。

1) 作者感谢 G. Parisi 在一次讨论中引起对豪斯道夫维数的注意。

近十多年来,动态临界现象的研究也有很大进展。重正化群方法出现以前,主要有两方面:一是模-模耦合理论,一是关于动态标度律和普适性的假定。前者主要是考虑不同运动模式之间的非耗散型耦合,能够相当好地描述一部分输运系数的反常,动态标度律是静态标度律的自然推广,对于时间演化过程多引入一个标度参数,假定弛豫时间是

$$\tau_k = \xi^z / (k\xi)^d, \quad (48)$$

这里 ξ 是关联长度,对于常规理论,由(46)式知

$$Z = 2, f(x) \sim (1+x^2)^{-1}. \quad (49)$$

动态标度律假定,只要将长度、时间、磁场、磁矩等作相应的标度,临界点附近的广义磁化率就不再显含约化温度 t ,由此可以推出一些动态临界指数间的关系。

七十年代以来,重正化群方法也被推广到研究动态临界现象,不仅论证了动态标度律,重复了模-模耦合理论的结果,而且可以分析后者所不能处理的耗散型耦合,动态临界现象也有普适类,但比静态普适类分得更细。动态临界指数不仅与 (d, n) 有关,还取决于体系有那些守恒量、不同模式之间的耦合类型等等。因此,同一个静态普适类的物理系统可能分属不同的动态普适类。

总的说来,动态临界现象的研究还处于发展过程中。现有的理论分析主要是借助于一些模型、用比较唯象的方式描述。较为完整的微观理论还有待建立,不少实验现象也还没有得到解释,详情可参阅文献[22]。

十一、远离平衡的突变现象

对称破缺和突变不是平衡态附近特有的现象,它更广泛地存在于远离平衡的体系中。一般地说,平衡态附近的体系以趋向平衡为主要倾向,远离平衡后却可能趋向新的更有序的定态。当然,这种状态要靠外部的能量或质量流来支持。自然界中这类现象不胜枚举。研究得很早的一个例子是流体力学的不稳定性^[13],取两块导热平板,中间有静止液体。如果下板的温度高于上板,且温度趋于临界值,就出现美丽的对流花纹(图11)。激光、半导体器件中的电流不稳定性、质量欠佳的日光灯管在一定条件下的辉纹放电、带有周期性时空结构的自催化反应、具有非线性输运性质的生物膜等等,都是远离平衡突变现象的例子。

长期以来,这些现象都是分别进行研究的。平衡态相变理论的进展,对各种相变的普适描述,启发人们在远离平衡的现象中也作类似的尝试。果然,各有千秋的突变现象确实具有深刻的相似之处。平衡态相变的一些概念很容易推广到非平衡突变的情形。这里主要指平均场理论的结果,重正化群方法所考虑的效应在大多数情况下并不重要。

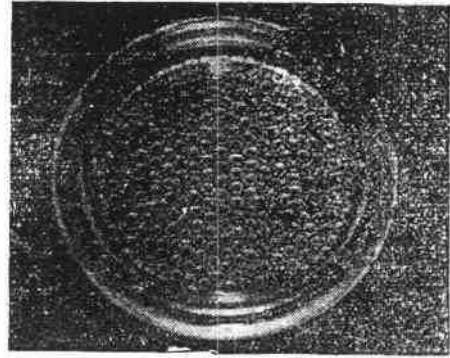


图11 对流图案

在非平衡相变中也可以引入序参量和对称破缺的概念。序参量 η 通常是指失稳运动模式的幅度。在流体不稳定性中,对流的速度是序参量;在激光中,受激发射模的振幅是序参量。与连续相变类似,只有当相应的外参量 λ 超过阈值 λ_c 时才会出现新的有序状态,而且

$$|\eta| \propto (\lambda - \lambda_c)^{1/2}, \quad (50)$$

即临界指数 β 也等于 $1/2$ 。在流体不稳定性中,破缺的是空间平移对称,激光现象中破缺的是定态本身的时间平移对称,复数序参量 η 取了一个特定的相位。后一点不可能发生在平衡相变中,因为周期运动伴随着能量的耗散。

与平衡态相变类似,这里也有恢复对称的运动模式。如果取了热力学极限,它们就是通常的流体力学模。对于有限的体系,这是序参量的一种扩散型运动。经历各种可能的状态后,序参量的平均值趋向于零,体系越大,达到这种状态所需的时间越长,因此,仍可在每个时刻用瞬时的序参量描述。这是与平衡态相变不同的特点。

在阈值附近,序参量的涨落反常增大,同时出现“临界慢化”,相应的临界指数也与平衡态一样,即

$$\tau \sim \langle |\eta|^2 \rangle^{-1} \sim (\lambda - \lambda_c)^{-1} \quad (51)$$

造成这一现象的原因,也在于失稳点附近恢复力趋近于零。

在临界点附近,关联长度反常增大。按平均场理论,

$$\xi = \xi_0 \left(\frac{\lambda_c}{\lambda - \lambda_c} \right)^{1/2}, \quad (52)$$

然而现在 ξ_0 是一个宏观尺度的量。这是因为在非平衡定态中序参量靠外源支持,直接与宏观变量耦合,通常存在一个宏观的特征长度。根据平均场理论的适用范围(金兹堡判据),对于三维情形,

$$\xi_c \sim (\xi_0^d)^{2/(4-d)} = \xi_0^{2/d}. \quad (53)$$

由于 ξ_0 是宏观大小的量,总有 $\xi_c \rightarrow 0$,即平均场理论永远成立。从物理上考虑,这是因为关联长度超过 ξ_0 之后,就谈不上标度不变性了。最近有人对流体失稳

现象作了精密的测量,发现各种临界指数确实与平均场理论的预言一致。

远离平衡的突变现象与平衡态相变之间如此深刻的类比决不是偶然的。虽然失稳现象中没有平衡分布的概念,但只要细致平衡,就可以在相当普遍的前提下证明存在定态分布,引入相应的势函数,其作用与自由能类似。换言之,细致平衡是共性的原因。

上面主要讲了与平衡相变相似的一面。其实,矛盾的特殊性才使我们对事物有更深刻的认识。远离平衡的突变现象必然伴随着耗散,与体系的尺寸和历史有密切关系。这些都与平衡态相变完全不同。尺寸效应可能使远离平衡的现象中不会有真正的“连续相变”。

平衡态附近的相变研究已经初具轮廓,远离平衡突变现象的研究方兴未艾,不同的流派从各自的角度进行探索,取了各种名称。有的叫“耗散结构”^[14],有的叫“协同学”^[15],有的叫“突变论”^[16],实际研究的都是同类现象(还可参阅文献[27])。

十二、结束语

连续相变研究的进展是理论与实验相互促进的过程。统计模型的严格解证明了理论的潜力,在平均场理论的天地里打开了缺口,大量使用计算机的级数展开揭示了更多的矛盾,但决定性的因素还是精密的实验测量。它充分暴露了平均场理论的弱点,把尖锐的矛盾提到理论面前。标度律和普适性的概念在促成现代相变理论的过程中起了很重要的作用。建立了正确的物理图象,形成了反映客观的概念,豁然贯通的最后一击来自统计物理与量子场论在概念和方法上的相互交流。

五十年代末期,量子场论方法在统计物理中的广泛应用带来过一批丰硕成果。最初在铁磁,后来在超导体理论中形成的对称破缺概念,经过量子场论的锤炼,又回到统计物理中,对平衡和非平衡相变的研究起了促进作用。重正化群方法和相变物理图象的结合,促成了临界现象理论的突破。当前,不少作者又试图借助相变的概念来解释夸克禁闭和量子场论中的一些根本问题。理论形式的一致,反映了客观世界的统一。统计物理和量子场论都是研究无穷多自由度的体系,统计涨落和量子涨落有深刻的类似之处。涨落场论和量子场论这对“孪生兄弟”将会继续并肩前进,在相变和临界现象的研究中揭示更深刻的物理内容。

参 考 文 献

- [18] 陈春先,郝柏林,科学通报,10(1961),30.
- [19] J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, in Progress in Low Temperature Physics, ed. by D. F. Brewer, North-Holland, VIIB(1978), 341—433.
- [20] D. J. Bishop, J. D. Reppy, Phys. Rev. Lett., 40(1978), 1727.
- [21] B. B. Mandelbrot, Fractals, Form, Chance and Dimension, W. H. Freeman, San Francisco, 1977.
- [22] P. C. Hohenberg, P. I. Halperin, Revs. Mod. Phys., 49(1977), 435.
- [23] C. Normand, Y. Pomeau, M. G. Velarde, Revs. Mod. Phys., 49(1977), 581.
- [24] G. Nicolis, I. Prigogine, Self-organization in Non-equilibrium systems, Wiley-Interscience, (1977).
- [25] H. Haken, Synergetics, Springer-Verlag, (1977).
- [26] P. Thom, Stabilité Structurelle et Morphogénèse, Benjamin, (1972).
- [27] Proceedings, of the XVII International Solvay Conference on Physics, November 20—23, 1978, Wiley-Interscience.

一种聚焦的光学纤维透镜

殷宗敏 祝颂来 陈尧生

(中国科学院西安光学精密机械研究所)

在本世纪六十年代末期,国际上出现了一种聚焦的光学纤维^[1,2],命名为自聚焦纤维(Selfoc),它和普通的光学纤维结构不同,没有外套层,它的折射率分布自轴沿半径方向逐渐变小,所以它的传光原理也不是光的全反射。这种纤维的传光效率高,能够聚光、成像,类似于光学系统的透镜。透镜是用改变厚度的方法来改变光程,使传播的光线曲折,而自聚焦纤维则是用改变折射率的方法来改变光程,同样使传播的光线曲折(图1),这两种结构不同的光学元件都能使物象之

间的对应点达到等光程,所以它们的作用是基本相同的。

一、光线在纤维中的轨迹

自聚焦纤维的折射率分布遵从如下关系:

$$n = n_0 \left(1 - \frac{1}{2} A r^2 \right) \quad (1)$$

式中 n_0 是轴上折射率, A 是折射率分布常数, r 是纤

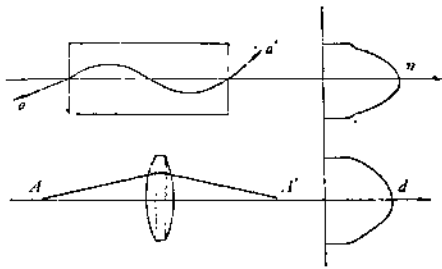


图1 自聚焦纤维和透镜

轴上某点至轴的距离,

设轴向为 z , r 向为 x , 则在 $x-z$ 平面内光线方程为

$$n \frac{d^2x}{dz^2} = \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial z} \cdot \frac{dx}{dz} \quad (2)$$

假设 n 和 z 无关, 而 $1/2 Ax^2 \ll 1$, 故得 $x-z$ 平面内的近轴光线方程为

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -Ax \quad (3)$$

该方程的通解为

$$x = B \cos \sqrt{A}z + C \sin \sqrt{A}z \quad (4)$$

$$p = dx/dz = -B\sqrt{A} \sin \sqrt{A}z + C\sqrt{A} \cos \sqrt{A}z \quad (5)$$

设入射光线在纤维端面 ($z=0$ 处) 相对于轴上的入射位置为 $x=x_0$, 而它折射至纤维内的斜率为 $dx/dz=p_0$, 则得系数 $B=x_0$, $C=p_0/\sqrt{A}$, 故(4)和(5)式可写为

$$x = x_0 \cos \sqrt{A}z + p_0/\sqrt{A} \sin \sqrt{A}z \quad (6)$$

$$p = -x_0\sqrt{A} \sin \sqrt{A}z + p_0 \cos \sqrt{A}z \quad (7)$$

轨迹方程(6)也可写为

$$x = D \sin(\sqrt{A}z + \phi) \quad (8)$$

式中 $D = (x_0^2 + p_0^2/A)^{1/2}$, $\tan \phi = x_0\sqrt{A}/p_0$,

所以在自聚焦纤维中, 光线轨迹通常是一个初相不为零的正弦曲线(图2).

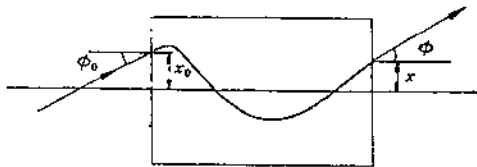


图2 子午光线在纤维中的轨迹

根据方程(6)和(7), 可以写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{A}z & \frac{1}{n_0\sqrt{A}} \sin \sqrt{A}z \\ -n_0\sqrt{A} \sin \sqrt{A}z & \cos \sqrt{A}z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

这就是光线的轨迹表达式, 表示当入射光线的位置 x_0

和斜率 p_0 已知时, 就能通过计算而求得射出光线的位置 x 和斜率 p .

设自聚焦纤维最大半径为 R , 轴上和边缘折射率之差为 Δn , 则由(1)式可得

$$\Delta n = \frac{1}{2} n_0 A R^2 \quad (10)$$

当光线在轴上入射, 且又是最大的人射角时, 振幅必定为 R , 则由公式(6)可知

$$x = p_0/\sqrt{A} \sin \sqrt{A}z = R \sin \sqrt{A}z \quad (11)$$

故有 $p_0 = \sqrt{A}R = \tan \theta = \sqrt{\frac{2\Delta n}{n_0}}$ (12)

即为 $\sin \theta = \sqrt{\frac{2\Delta n}{n_0 + 2\Delta n}}$

所以 $\sin \phi = n_0 \sqrt{\frac{2\Delta n}{n_0 + 2\Delta n}} = \sqrt{2n_0 \Delta n}$ (13)

故光线轨迹的周期长度 l 可写为

$$l = \frac{2\pi}{\sqrt{A}} = \sqrt{2} \pi R \sqrt{\frac{n_0}{\Delta n}} \quad (14)$$

对于空间光线, 它在纤维中的轨迹不在一个平面内, 所以不是正弦曲线, 而是一条空间的螺旋曲线, 如图3所示.

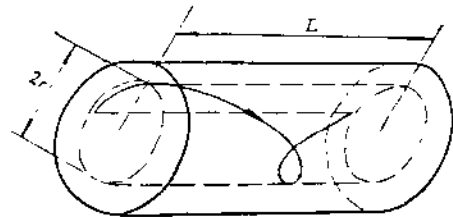


图3 空间光线在纤维中的轨迹

自聚焦纤维的两端直径不一样, 如图4所示, 有关系式

$$r = r_1 - kz \quad (15)$$

式中

$$k = \frac{r_1 - r_2}{z_0}$$

r 是垂直于轴的任一横截面的半径, r_1 和 r_2 分别为粗端和细端的半径, z_0 为纤维的长度. 这种纤维称为锥形自聚焦纤维^[3]. 由于它的半径各处不一样, 所以它的折射率变化为

$$n = n_0 \left[1 - \frac{1}{2} A \frac{r^2}{\left(1 - k \frac{z}{z_0}\right)^2} \right] \quad (16)$$

同样, 我们可以求解光线方程而得到光线在锥形自聚焦纤维中的轨迹为