

- [8] Whitney, D. E. and Junkel, E. F., Applying Stochastic Control Theory to Robotic Sensing, Teaching and Long Term Control. Proc. Amer. Control Conference, Alexandria, U. S. A., 1982, 1175—1185
- [9] Raibert, M. H. and Horn, B. K. P., Manipulator Control Using the Configuration Space Method. The Industrial Robot, 1978, 69—73
- [10] Futami, S., Kyura, N. and Hara, S., Vibration Absorption Control of Industrial Robots by Acceleration Feedback. IEEE Trans. Industrial Electronics, 1983, 30(3):299—305
- [11] McInroy, J. E. and Saridis, G. N., Acceleration and Torque Feedback for Robotic Control: Experimental Results. Journal of Robotic Systems, 1990, 7(6):813—832

Pole Placement Control of Robot Based-On Acceleration Sensor

LIU Deman and LIU Zongfu

(Department of Automatic Control, Northeastern University • Shenyang, 110006, PRC)

WU Chendong

(Department of Automatic Control, Shenyang Architectural and Civil Engineering Institute • Shenyang, 110015, PRC)

YIN Chaowan

(Forth Laboratory, Shenyang Institute of Automation • Shenyang, 110003, PRC)

Abstract: This paper proposed a pole placement control method for industrial robot. This control method has following advantages; First, its integral effect eliminates minor disturbances and steady errors; Second, the poles of the closed-loop system can be placed arbitrarily, therefore, it can guarantee stability of the closed-loop system and specify the transient response of state variables; Third, the acceleration feedback is added to suppress the vibration of robotic manipulator caused by inductance of armature circuit. Finally, the computer simulation and experiment results for PUMA562 are given to demonstrate the effectiveness of proposed control method.

Key words: Robot; accelerometer; linearization; pole placement; integral effect; simulation and experiment

本文作者简介

刘德满 1963年生, 1984年在武汉钢铁学院获学士学位, 并分别于1987年和1991在东北工学院获工学硕士和博士学位. 主要研究领域为非线性控制, 自适应控制, 智能控制等, 现从事机器人智能控制的研究.

刘宗富 1929年生, 1950年毕业于同济大学电机工程系, 后到东北工学院任教, 1956年晋升为讲师, 1958年获副博士学位, 1978年晋升为副教授, 1983年晋升为教授, 现为自动化学会电气自动化专业委员会委员, 正从事于交流电力拖动系统及机器人控制系统的研究.

吴成东 1960年生, 1983年毕业于沈阳建筑工程学院, 并留校任教, 1988年在清华大学自动化系获得硕士学位, 1991年考入东北工学院自动控制系统攻读博士学位, 现从事机器人智能控制的研究, 发表论文40余篇.

尹朝万 1940年生, 1964年毕业于华中工学院自动控制系统, 后工作于中国科学院自动化研究所, 1972年进入中国科学院沈阳自动化研究所, 1985年晋升为副研究员, 1990年晋升为研究员, 现任机器人学开放研究实验室副主任, 现正从事于CIMS系统和机器人体系结构的研究.

一种新的机器人手臂控制方法*

周学才

(广东工学院电工系·广州, 510090)

郑时雄

张启先

(华南理工大学机械系·广州, 510641) (北京航空航天大学机电系·北京, 100083)

摘要: 从机器人手臂的关节电机力学出发, 本文提出了一种独立于现行机器人关节控制器的离线补偿方法. 通过对一 2 自由度机器人的数值研究, 证明该法不仅能有效地克服由于惯性负载、关节间耦合与重力效应给控制系统带来的动态精度问题, 而且还可以消除由于控制系统本身的固有特性所决定的系统的跟踪误差.

关键词: 关节控制系统; 动态精度; 指令轨迹; 补偿指令轨迹; 实时轨迹

1 引言

目前, 对于工业机器人手臂的控制, 都是把机器人手臂的每个关节当作一个简单的伺服机构来处理^[1]. 这种方法忽视了整个手臂机构的动力特性. 事实上, 工业机器人是一个高度非线性系统, 惯性负载、关节间耦合与重力效应都是位置相依项. 而且, 高速运动时, 惯性负载变化巨大, 足以使常规的反馈控制策略失效, 结果使机器人末端执行器作业精度降低. 而要保证其作业精度, 就必须限制机器人在规定的速度之下作业, 这无疑降低了机器人的工作效率. 解决这一问题的有效办法之一是采用数字控制. 计算机根据机器人手臂的动力学模型预先计算出由于惯性负载、关节间耦合与重力效应等产生的加到机器人各关节上的扰动力矩值, 并把这些值向前分别馈入相应的关节控制器, 以补偿系统的跟踪误差. 这就是所谓的“前馈补偿”方法. M. B. Leahy 和 G. N. Saridis 曾对 PUMA560 机器人应用这一思想, 结果将机器人单关节控制器的峰值跟踪误差 (peak trajectory tracking errors) 减小到原来的 $\frac{1}{3}$ ^[2]. R. H. Middleton 等人也曾就一 3 自由度机器人应用该思想进行了数值仿真, 收到了类似的效果^[3]. 但是, 这种方法的补偿过程须在线进行, 不可避免地存在控制时间问题和控制器的重新设计问题. 由于要重新改变机器人的结构以及制作技术上的困难, 使得这种方法的实施在很大程度上受到限制.

为克服上述困难, 本文从机器人电机力学出发, 提出了一种新的机器人手臂离线控制方法.

2 机器人关节控制系统的数学模型

现行的大多数工业机器人的关节都采用直流电机来驱动. 如果把这类机器人的每个关节都当作连续时间系统来处理, 同时考虑机器人手臂的动力学特性, 并忽略电枢电感的作用, 可将机器人关节控制系统的力学模型表示如下^[1]:

* 国家机器人学开放研究实验室基金资助项目.

本文于 1992 年 4 月 17 日收到, 1993 年 8 月 19 日收到修改稿.

$$\theta_L(s) = \frac{K_s(K_f + sK_v)\theta_L^*(s) - nR_s D(s)}{s^2 R_s J_{eff} + s(R_s f_{eff} + K_s K_b + K_s K_v) + K_s K_f} \quad (1)$$

式中 s 为拉普拉斯算子; R_s 为电机电枢电阻(Ω); θ_L 为负载轴的角位移(rad); θ_L^* 为指令角位移(rad); J_{eff} 为折合到电机轴的电机和负载综合有效惯性矩(kgm^2); f_{eff} 为折合到电机轴的电机和负载综合有效粘滞摩擦系数(kgm^2/s); n 为齿数比(<1.0); K_s 为电机-力矩比常数(Nm/A); K_b 为比例常数(Vs/rad); K_f 为位置反馈增益(V/rad); K_v 为误差微分反馈增益(V/s); D 为系统的扰动力矩(Nm).

这是一带有扰动输入的双输入单输出二阶系统. 其中扰动输入主要是由惯性负载、关节间耦合与重力效应所产生的, 它是位置及时间的函数. 由于它的存在, 机器人在高速作业时, 必然产生动态跟踪误差. 对此, 必须采取有效措施, 来补偿这部分干扰对系统的作用, 以保证机器人的动态性能.

事实上, 由式(1)所表示的机器人关节控制系统在参数均为正的情况下, 总是稳定的^[1]. 这样, 如果系统参数一经确定, 对于给定的初始条件, 系统的输出与输入就具有——对应的关系. 换言之, 对于给定的期望作业轨迹或指令轨迹, 系统总有唯一的响应轨迹与之对应. 反过来, 如果系统的输出轨迹恰好等于期望作业轨迹, 从(1)式总可以找到与之对应的输入轨迹. 如果在相同的条件下, 把所得到的这一输入轨迹作为系统的指令轨迹(为区别一般的指令轨迹, 以下称它为补偿指令轨迹), 则系统的输出响应轨迹必然等于或十分接近期望作业轨迹. 这就引出了本文要介绍的控制方法.

3 机器人关节控制系统的补偿指令轨迹与动力补偿

3.1 补偿指令轨迹的建立

在(1)式中, 令

$$\begin{cases} \frac{R_s J_{eff}}{K_s K_v} = A, & \frac{R_s f_{eff}}{K_s K_v} + \frac{K_b}{K_v} + 1 = B, \\ \frac{K_f}{K_s} = C, & \frac{n R_s}{K_s K_v} = E. \end{cases} \quad (2)$$

可将(1)式在时域中表达为

$$\ddot{\theta}_L(t) + C\dot{\theta}_L(t) = A\ddot{\theta}_L^*(t) + B\dot{\theta}_L^*(t) + C\theta_L^*(t) + ED(t). \quad (3)$$

假定系统在所考虑的时间区间 $[0, t]$ 中是稳定的, 在初始条件

$$\begin{cases} \theta_L(t)|_{t=0} = \theta_L(0), & \dot{\theta}_L(t)|_{t=0} = \dot{\theta}_L(0) = 0, \\ \theta_L^*(t)|_{t=0} = \theta_L^*(0) \end{cases}$$

之下, 对机器人的第 j ($j=1, 2, \dots, m$; m 为机器人的自由度) 个驱动关节, 求解(3)式, 得

$$\begin{aligned} \theta_{L_j}^*(t) &= A_j \ddot{\theta}_{L_j}(t) + (B_j - A_j C_j) \dot{\theta}_{L_j}(t) + e^{-C_j t} [\theta_{L_j}(0) - (B_j - A_j C_j) \theta_{L_j}(0)] \\ &\quad + C_j e^{-C_j t} [1 - (B_j - A_j C_j)] \int_0^t e^{C_j \tau} \dot{\theta}_{L_j}(\tau) d\tau \\ &\quad + E_j e^{-C_j t} \int_0^t e^{C_j \tau} D_j(\tau) d\tau, \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (4)$$

设采样周期为 T , 采样时间为 $t_K = KT$, ($K=0, 1, \dots, N$; N 为采样点数) 对 $\theta_{L_j}(t)$, $\dot{\theta}_{L_j}(t)$, $D_j(t)$ 进行等间隔采样, 并在每个小区间 $[t_K, t_{K+1}]$, ($K=0, 1, \dots, N-1$) 分别对 $\theta_{L_j}(t)$, $e^{C_j} \theta_{L_j}(t)$ 和 $e^{C_j} D_j(t)$ 作三次样条插值, 可将(4)式进一步改写为

$$\begin{aligned}\theta_{L_j}^*(t_k) = & A_j \dot{\theta}_{L_j}(K) + (B_j - A_j C_j) \theta_{L_j}(K) + e^{-C_j(KT)} [\theta_{L_j}(0) - (B_j - A_j C_j) \theta_{L_j}(0)] \\ & + C_j e^{-C_j(KT)} [1 - (B_j - A_j C_j)] I_a(K-1) + e^{-C_j(KT)} I_b(K-1), \\ & j = 1, 2, \dots, m; \quad K = 0, 1, \dots, N-1.\end{aligned}\quad (5)$$

式中

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{L_j}(K) = & \frac{\theta_{L_j}(K+1) - \theta_{L_j}(K)}{T} - \frac{T}{3} \mu_K - \frac{T}{6} \mu_{K+1}, \\ \begin{cases} I_a(K) = \sum_{i=0}^K \left\{ -\frac{T^3}{24} (\mu_{a_i} - \mu_{a_{i+1}}) + \frac{T}{2} [f_a(i+1) - f_a(i)] \right. \\ \quad \left. - \frac{T^3}{2} (\mu_{a_{i+1}} - \mu_{a_i}) + f_a(i)T - \frac{T^3}{6} \mu_{a_i} \right\}, \\ I_a(-1) = 0, \\ f_a(i) = e^{C_j(iT)} \theta_{L_j}(i), \end{cases} \\ \begin{cases} I_b(K) = \sum_{i=0}^K \left\{ -\frac{T^3}{24} (\mu_{b_i} - \mu_{b_{i+1}}) + \frac{T}{2} [f_b(i+1) - f_b(i)] \right. \\ \quad \left. - \frac{T^3}{2} (\mu_{b_{i+1}} - \mu_{b_i}) + f_b(i)T - \frac{T^3}{6} \mu_{b_i} \right\}, \\ I_b(-1) = 0, \\ f_b(i) = e^{C_j(iT)} D_j(i), \end{cases} \\ \dot{\theta}_{L_j}(K) = \dot{\theta}_{L_j}(t_K), \quad \theta_{L_j}(K) = \theta_{L_j}(t_K); \quad D_j(K) = D_j(t_K).\end{aligned}$$

$\mu_K, \mu_{aK}, \mu_{bK}$ 可按文献[4]提供的算法求出。

(5)式包含了机器人各关节反馈控制系统的全部特性。其中, $\theta_{L_j}(t_K), \dot{\theta}_{L_j}(t_K)$ 分别为关节 j 的期望作业轨迹和轨迹速度, 它们由用户指定; A_j, B_j, C_j, E_j 为机器人第 j 关节控制系统本身的固有特性参数, 它们可在设计时给定或通过实测来标定; $D_j(t_K)$ 为由机器人重力负载(包括有效作业载荷)和杆件的离心效应等所引起的加到关节 j 控制系统的扰动力矩, 它可以通过调用机器人逆动力学来求解。因而(5)式给出了任一采样瞬时由机器人关节控制系统本身固有特性所决定的、对应于期望作业轨迹的指令轨迹。为区别通常所说的指令轨迹, 我们称它为“补偿指令轨迹”, 并以 $\theta_{L_j}^*(t_K)$ 标记。对于指定的机器人关节和期望作业轨迹, 由(5)式可以计算出与之对应的补偿指令轨迹。

3.2 动力补偿方法的实施

毫无疑问, 对于工程实际中使用的机器人, 只要以本文(5)式给出的补偿指令轨迹代替通常的指令轨迹, 加到该机器人各关节控制系统的输入端, 就可保证机器人手末端准确地跟踪预先所设定的期望作业轨迹。

控制过程如下:

- 1) 通过实测或参数识别方法标定机器人的几何参数^[6]、动力学参数^[6]以及关节控制系统参数^[7];
- 2) 给定机器人的期望作业轨迹及轨迹速度;
- 3) 调用机器人动力学算法求解各关节所受扰动力矩 $D_j(t_K)$ ^[1];
- 4) 由(5)式计算机器人各关节补偿指令轨迹;
- 5) 以4)的结果作为指令轨迹启动机器人作业。

完成上述过程之后,机器人就可准确地跟踪期望作业轨迹.

4 数值实例

作者曾就一 2 自由度机器人进行了研究.该机器人的几何、动力学及关节控制系统参数如表 1 所示.

表中 m_j 为杆件 j 的质量; l_j 为杆件 j 的长度; $\bar{x}_j, \bar{y}_j$ 为杆件 j 的质心坐标; I_{a_j} 为关节 j 电机反射惯量.

表 1 2 自由度机器人参数

关节 j	θ_{L_j} (rad)	l_j (m)	m_j (kg)	$\bar{x}_j$ (m)	$\bar{y}_j$ (m)	I_{a_j}	A_j	B_j	C_j	E_j
1	θ_{L_1}	0.4381	23.11	-0.2159	0.0	2.3616	0.03855	0.77097	3.85484	0.02016
2	θ_{L_2}	0.4381	10.02	-0.2159	0.0	0.5827	0.015	0.45	3.39	0.0185

$$\text{所取指令轨迹为 } \begin{cases} \theta_{L_1}^*(t) = 0.3391667 \cos(2\pi t), \\ \theta_{L_2}^*(t) = -0.8 \cos(\pi t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

各关节扰动力矩为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_1 l^2/3 + 4m_2 l^2/3 + m_2 l^2 \cos(\theta_{L_1}^*) & m_2 l^2/3 + (m_2 l^2/2) \cos(\theta_{L_2}^*) \\ m_2 l^2/3 + (m_2 l^2/2) \cos(\theta_{L_2}^*) & m_2 l^2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{L_1}^* \\ \ddot{\theta}_{L_2}^* \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} I_{a_1} \ddot{\theta}_{L_1}^* \\ I_{a_2} \ddot{\theta}_{L_2}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\{m_2 l^2 (\dot{\theta}_{L_2}^*)^2/2\} \sin(\theta_{L_2}^*) - m_2 l^2 \dot{\theta}_{L_1}^* \dot{\theta}_{L_2}^* \sin(\theta_{L_2}^*) \\ 0.5 m_2 l^2 (\dot{\theta}_{L_1}^*)^2 \sin(\theta_{L_2}^*) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0.5 m_1 g l \cos(\theta_{L_1}^*) + 0.5 m_2 g \cos(\theta_{L_1}^* + \theta_{L_2}^*) + m_2 g l \cos(\theta_{L_1}^*) \\ 0.5 m_2 g l \cos(\theta_{L_1}^* + \theta_{L_2}^*) \end{bmatrix}, \\ &g = 9.806 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

式中

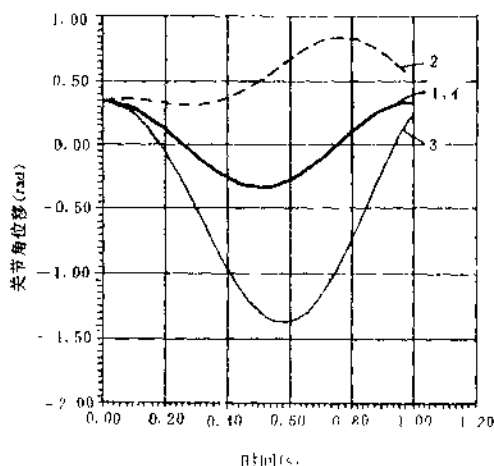


图 1 关节 1 补偿控制结果

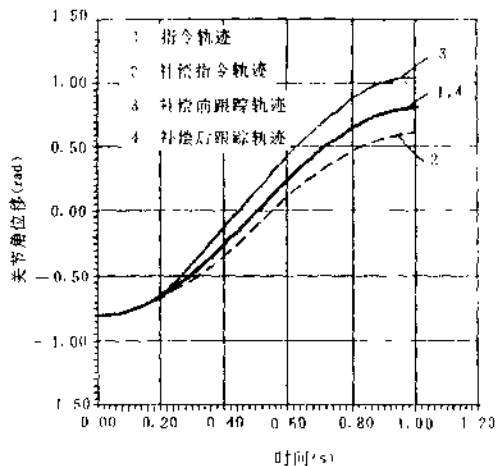


图 2 关节 2 补偿控制结果

图 1~2 为按本文方法对该机器人实施控制后计算机的输出结果.结果表明,经过补偿控制后的实到轨迹与期望作业轨迹完全重合,从而大大地提高了机器人的动态跟踪精

度.事实上,本文所提出的补偿控制方法,在理想的情况下是一种完全补偿方法.在工程实际上,该法的控制效果要受到系统特性参数估计精度的影响.

5 结 论

本文提出了一种利用关节补偿指令轨迹来改善机器人动态精度的方法.该法在理想情况下是一种完全补偿方法.此外,整个控制过程离线进行,不需对机器人硬件作任何改动,因而应用前景是可观的.

致谢 本文在撰写过程中承蒙李伯天教授提出宝贵意见,特此鸣谢.

参 考 文 献

- [1] R. C. 冈萨雷斯, S. G. 李春, 杨静宇等译. 机器人学. 北京: 中国科技出版社, 1989
- [2] Leahy, M. B. Jr. and Sandis, G. N.. Compensation of Industrial Manipulator Dynamics. The International Journal of Robotics Research, 1989, 8(4), 73—84
- [3] Middleton, R. H. et al.. A Method for Improving the Dynamic Accuracy of a Robot Performing a Repetitive Task. The International Journal of Robotics Research, 1989, 8(5), 67—74
- [4] 周学才. 一种改善测量系统动态特性的数字补偿方法. 计量学报, 1992, 13(2), 154—159
- [5] 周学才, 谢存禧. 机器人理论关节参数的标定方法及软件设计. 机器人, 1991, 13(4), 47—54
- [6] Lim, T. G.. A Parameter Identification Method for Robot Dynamic Models Using a Balancing Mechanism. Robotica, 1989, 7, 327—337
- [7] 周学才, 张启先. 机器人关节控制系统参数的识别方法. 机械工程学报, 1993, 29(1), 102—108

A New Method for the Robot Arm Control

ZHOU Xuecai

(Department of Electrical Engineering, Guangdong University of Technology • Guangzhou, 510090, PRC)

ZHENG Shixiong

(1st Department of Mechanical Engineering, South China University of Technology • Guangzhou, 510641, PRC)

ZHANG Qixian

(Department of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics • Beijing, 100083)

Abstract: Based on the joint motor dynamics of robot arms, an off-line compensating method which is independent of the current robot joint controllers has been developed in this paper. With the method, the dynamic accuracy problem caused by the effects of inertial and gravitational forces and derived directly from the joint control system itself could be successfully eliminated according to the reasonable example on the case of the robot with two degrees of freedom.

Key words: joint control system; dynamic accuracy; command path; compensating command path; attained path

本文作者简介

周学才 1955年生. 1982年毕业于吉林工业大学机械系. 1989年于华南理工大学机械系取得硕士学位; 1993年于北京航空航天大学机电系取得博士学位. 现为广东工学院电工系机器人研究室讲师. 主要从事机器人精度控制, 计算机管理系统, 测试技术等方面研究. 近年来在国内外发表学术论文近20篇, 曾获国家机器人工程中心实验室主任

基金奖。

郑时雄 1939 年生, 1962 年毕业于华南理工大学机械工程系, 现为该校机械一系教授, 全国工业自动化系统标准化技术委员会工业机器人分标委委员。在国内外发表学术论文 40 余篇, 专著 2 部。主要研究方向为机器人精度、机器人性能标准化、控制模式以及柔性装配系统等。

张启先 1931 年生, 教授, 博士生导师。1948 年厦门大学航空工程系毕业, 1962 年获苏联列宁格勒多科性工学院技术科学博士学位。长期从事机构学和机器人学的研究。在国内外发表近百篇学术论文并著有《空间机构的分析综合》等书。现主持“多指关节柔性手”和“七自由度实验机器人”等的研制工作。

国际会议消息

(转载 IFAC NEWSLETTER 1993, No. 6)

Title	1995	Place	Deadline	Further Information
IFAC Workshop Control Applications in Marine Systems-CAMS 95	May 10-13	Trondheim Norway	1 Nov. 1994	A. Prof. Thor I. Fossen, CAMS-95 Secr. Dept. of Engg. Cybernetics Norwegian Institute of Technology N-7034 Trondheim, Norway FAX+47/73594399 e-mail: tif@itk.unit.no
Intl. Conference Computer Applications in Biotechnology	May 14-17	Garmisch- Partenkirchen Germany	Aug. 1994	Prof. Axel Munack Federal Agricultural Res. Center Inst. of Biosystems Engg. -FAL Bundesallee 50, D-3300 Braunschweig Germany FAX+49/531 596 309
IFAC Conference Dynamics and Control of Chemical Reactors, Distillation Columns and Batch Processes-DYCORD '95	June 7-9	Copenhagen Denmark	31 Aug. 1994	Danish Automation Society Symbion Science Park Copenhagen Fruebjergvej 3, DK-2100 Copenhagen Denmark FAX+45/3120 5521
IFAC Conference Intelligent Autonomous Vehicles	June 12-14	Espoo Finland	30 Sept. 1994	Finnish Society of Automation Asemapiällikönkatu 12 C SF-00520 Helsinki Finland FAX+358/0/1461 650
1995 American Control Conference (in cooperation with IFAC)	June 21-23	Seattle, WA USA	15 Sept. 1994	Prof. M. Tomizuka, Dept. of M. E. University of California Berkeley, CA 94720, USA FAX 510/642 6163 e-mail: tomizuka@culer.berkeley.edu
IFAC Conference System Structure and Control	July 5-7	Nantes France	1 Aug 1994	Mr. J. J. Loiseau, CNRS LAN-ECN 1, rue de la Noë F-44072 Nantes Cedex 03 France FAX+33/40/372522 e-mail: loiseau@lan01.ensm-nantes.fr

A Necessary and Sufficient Condition for Feedback Strictly Positive Real Output*

CHEN Pengman

(Mathematics Division, China Institute of Metrology, Hangzhou, 310034, PRC)

CHENG Daizhan and QIN Huashu

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing, 100080, PRC)

Abstract: This paper concerns with the problem of feedback strictly positive real system with multi-input. The sufficient and necessary condition for a linear system having feedback strictly positive real output is obtained in this paper. The condition itself is succinct in expression and is easy to check.

Key words: feedback strictly positive real system; Hurwitz polynomial; feedback strictly positive real output

1 Introduction

Consider a linear control system $\Sigma(C, A, B)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, m, n ($m \leq n$) positive integer.

Definition 1.1 If there exist $n \times n$ positive definite symmetric matrices P, Q (denoted by $P > 0, Q > 0$, 0 , $n \times n$ zero matrix) and $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ such that

$$\begin{cases} P(A + BK) + (A + BK)^T P = -Q, \\ PB = C^T. \end{cases} \quad (1.1)$$

Then $\Sigma(C, A, B)$ is said to be a feedback strictly positive real system, or $\Sigma(C, A, B)$ is said to have feedback strictly positive real output.

The concept of feedback positive real system was first proposed by Kokotovic and Sussmann, when they studied global stabilization of nonlinear system in [1]. In fact, there are many applications of feedback strictly positive real property in other control fields, for example, in designing robust controllers^[2] and in assigning optimal poles^[3] etc. For the case of scalar input, Stalford, H. L. and Chao, C. H. have proved that when the pair (A, b) is in the controllable canonical form, system $\Sigma(c, A, b)$ has feedback strictly positive real output iff c is a stable $(n-1)$ -vector^[2]. For the case of multiple inputs, they obtained some necessary conditions in investigating the design problem of robust controllers^[4]. In this paper, we obtain the sufficient and necessary condition for a linear system to have feedback strictly positive real output in both cases; with the assumption of (A, B) being a controllable pair and without this assumption. That is, system $\Sigma(C, A, B)$ has feedback strictly positive real output iff $CB > 0$ and $\det(sI_n - A)\det(C^*$

* This article is supported by the National Natural Science Foundation of China; the Laboratory of Management, Decision and Information.

Manuscript received Apr. 27, 1992; revised Jun. 7, 1993.