第22卷 第3期　　机 械 工 程 学 报　　Vol. 22 №3
1986年9月　　CHINESE JOURNAL OF MECHANICAL ENGINEERING　　Sept. 1986

空间7R机构位移分析的新研究

廖启征　梁崇高　张启先

（北京邮电学院）（北京航空学院）

摘　　要

空间一般七杆7R（R代表转动付）机构的位移分析是机构学中尚未彻底解决的最困难问题之一，F. Freudenstein将它喻为机构运动分析中的珠穆朗玛峰[2]。J. Duffy等发表过一篇关于7R机构位移分析的文章[1]，导出的输入输出方程是32次多项式。但是，最近，人们相信7R机构的输入输出方程应该是16次。笔者应用复数法，经过努力，终于导出了这个16次方程，从而解决了这一难题。

一、分析的步骤及关键

7R机构有七个角位移θ_1，θ_2，……，θ_7，其位移分析的关键就在于避开或消去一系列中间变量θ_3，θ_4，……，θ_7，导出只有输入输出θ_1和θ_2的，不含增根的位移方程。一般方法是，先选方程，再消元。如果选方程能多避开一些中间变量或多选几个方程，则消元后次数就低。否则若按变量个数选方程，如5个未知量选5个方程，则消元后次数将大大高于16次。因此在复杂机构中，如何多选一定数目的方程，往往成为十分关键，但也十分困难的工作。对本文所讨论的空间7R机构，重新研究表明，合适的做法是选律10个方程，全部避开一个角度，如θ_7，并具有以下复指数形式

$$\begin{aligned}&c_{j1}e^{i\theta_5}e^{i\theta_6}+c_{j2}e^{i\theta_5}e^{-i\theta_6}+c_{j3}e^{i\theta_5}+c_{j4}e^{-i\theta_5}e^{i\theta_6}\\&+c_{j5}e^{-i\theta_5}e^{-i\theta_6}+c_{j6}e^{-i\theta_5}+c_{j7}e^{i\theta_6}+c_{j8}e^{-i\theta_6}\\&=c_{j9}+A_j\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ 10\end{aligned}\tag{1}$$

其中$c_{j1}c_{j2}\cdots c_{j9}$都是由结构参数决定的，$A_j$是仅包含$e^{i\theta_1}$，$e^{i\theta_2}$，$e^{i\theta_3}$，$e^{i\theta_4}$四个量的多项式，且具有以下形式

$$A=(a_1e^{i\theta_3}+a_2e^{-i\theta_3}+a_3)e^{i\theta_4}+a_4e^{i\theta_3}+a_5e^{-i\theta_3}+a_6\tag{2}$$

其中各系数a又具有以下形式

$$\begin{aligned}&(b_1e^{i\theta_1}+b_2e^{-i\theta_1}+b_3)e^{i\theta_2}+(b_4e^{i\theta_1}+b_5e^{-i\theta_1}+b_6)e^{-i\theta_2}\\&\qquad+b_7e^{i\theta_1}+b_8e^{-i\theta_1}+b_9\end{aligned}\tag{3}$$

式中各系数b是由结构参数决定的。

其次，消去$e^{i\theta_5}$，$e^{i\theta_6}$。为此取（1）式中$i=1,2,\cdots,8$等8个方程，并把$e^{i\theta_5}e^{i\theta_6}$，

1986年1月收到

$e^{i\theta_5}e^{-i\theta_6}$, $e^{i\theta_5}$, $e^{-i\theta_5}e^{i\theta_6}$, $e^{-i\theta_5-i\theta_6}$, $e^{-i\theta_5}$, $e^{i\theta_6}$, $e^{-i\theta_6}$ 八个量当做该线性方程组的八个未知数，进行求解。接着把结果代入（1）式 $i=9, 10$ 两式中去，于是得到以下形式的两式

$$(d_{j1}e^{i\theta_3}+d_{j2}e^{-i\theta_3}+d_{j3})e^{i\theta_4} + d_{j4}e^{i\theta_3}+d_{j5}e^{-i\theta_3}+d_{j6}=0 \qquad j=1, 2 \tag{4}$$

其中各系数 d 与变量 θ_1, θ_2 有关，并具有（3）式的形式。

然后，把

$$e^{i\theta_j}=(1+it_j)/(1-it_j) \qquad j=1, 2, 3, 4 \tag{5}$$

其中 $t_j=tan(\theta_j/2)$

代入（4）式，去分母，合并同类项，分别取实部与虚部，可得四式，写为

$$(f_{j1}t_3^2+f_{j2}t_3+f_{j3})t_4+f_{j4}t_3^2+f_{j5}t_3+f_{j6}=0 \qquad j=1, 2, 3, 4 \tag{6}$$

其中各系数 f 可表示为如下 t_1 或 t_2 的二次式

$$(g_1t_1^2+g_2t_1+g_3)t_2^2+(g_4t_1^2+g_5t_1+g_6)t_2+g_7t_1^2+g_8t_1+g_9 \tag{7}$$

式中各系数 g 由结构参数决定。于是可按结式，仿文[2]利用 8×8 行列式，从（6）式中消去 t_3, t_4。消元后可得关于 t_1 与 t_2 各为 16 次的方程，任意一量作为输入，另外一量作为输出。下面设 θ_1 为输入。在求出输出角 θ_2 后就可以求解一系列中间变量 θ_3, θ_4, …, θ_7, 其具体过程可参阅[1]。

由上可见，$7R$ 机构位移分析的关键题问就在于寻找具有（1）式形式的 10 个方程。这 10 个方程是

$Z_{56}=Z_{123}$	(8a)	$Z_{056}=Z_{0123}$	(8f)
$Y_{56}=R^0_{1234}$	(8b)	$Y_{056}=R^0_{01234}$	(8g)
$Z_{RW56}=Z_{XY123}$	(8c)	$L_{56}=L_{123}$	(8h)
$Y_{QV56}=R^0_{PQ1234}$	(8d)	$Z_{0056}=Z_{00123}$	(8i)
$Z_{XY56}=Z_{RW123}$	(8e)	$Y_{0056}=R^0_{001234}$	(8j)

其中符号意义见后。这里，最后第 10 个方程（8j）是笔者用复数法新导出的，在文[1][2]中尚无类似形式出现。

关于上述 10 个方程的推导过程，限于篇幅，下面只作简略说明。

二、纯角度关系式

设空间 $7R$ 机构如图 1-1 所示。以 a_{71} 为 X 轴，以 s_7 为 Z 轴建立坐标系 I，以 a_{45} 为 X 轴，以 s_4 为 Z 轴建立坐标系 II。由坐标变换可得封闭方程[3]。

$$[\alpha_{71}][\theta_1][\alpha_{12}][\theta_2][\alpha_{23}][\theta_3][\alpha_{34}][\theta_4] = [\theta_7]^{-1}[\alpha_{67}]^{-1}[\theta_6]^{-1}[\alpha_{56}]^{-1}[\theta_5]^{-1}[\alpha_{45}]^{-1} \tag{9}$$

或

$$[\alpha_{71}][\theta_1][\alpha_{12}][\theta_2][\alpha_{23}][\theta_3][\alpha_{34}][\theta_4] = \{[\alpha_{45}][\theta_5][\alpha_{56}][\theta_6][\alpha_{67}][\theta_7]\}^T \tag{10}$$

其中

$$[\theta]=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad [\alpha]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \tag{11}$$

由于 θ_2, θ_3, …, θ_7 是未知量，在矩阵中是以三角函数形式出现的。为了使变量形式简单，可以把各$[\theta]$化为复指数 $e^{i\theta}$ 的对角矩阵形式。矩阵$[\theta]$的三个特征值是 $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$, 1，及对应三个特征矢量是$(i/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^T$, $(-i/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$。若记

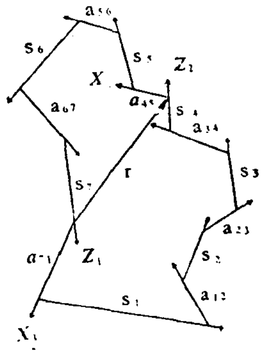

图 1-1

$$P=\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{P}=\begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$M=\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{M}=\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

则得
$$P^{-1}[\theta]P = M \tag{14}$$
并有
$$\bar{P}^T P = \bar{M}^T M = I \tag{15}$$

(10)式两边各以 P^{-1} 左乘，以 P 右乘，并在各矩阵中插入 $PP^{-1}=I$，于是变为

$$\{P^{-1}[\alpha_{71}]P\}\{P^{-1}[\theta_1]P\}\cdots\{P^{-1}[\theta_4]P\} = \overline{(\{P^{-1}[\alpha_{45}]P\}\cdots\{P^{-1}[\theta_7]P\})^T} \tag{16}$$

或简写为

$$M_{71}M_1M_{12}M_2M_{23}M_3M_{34}M_4 = \overline{(M_{45}M_5M_{56}M_6M_{67}M_7)^T} \tag{17}$$

其中单下标矩阵如同(13)式，双下标矩阵为

$$P^{-1}[\alpha]P = M_{jj+1} = \begin{pmatrix} (\cos\alpha+1)/2 & (\cos\alpha-1)/2 & -\sin\alpha/\sqrt{2} \\ (\cos\alpha-1)/2 & (\cos\alpha+1)/2 & -\sin\alpha/\sqrt{2} \\ \sin\alpha/\sqrt{2} & \sin\alpha/\sqrt{2} & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{18}$$

定义(17)左边为

$$\begin{pmatrix} P^0_{1234} & U^0_{1234} & X_{123} \\ Q^0_{1234} & V^0_{1234} & Y_{123} \\ R^0_{1234} & W^0_{1234} & Z_{123} \end{pmatrix} = M_{71}M_1M_{12}M_2M_{23}M_3M_{34}M_4 \tag{19}$$

再定义(17)式右边括号内矩阵的积为

$$\begin{pmatrix} P^0_{567} & U^0_{567} & X_{56} \\ Q^0_{567} & V^0_{567} & Y_{56} \\ R^0_{567} & W^0_{567} & Z_{56} \end{pmatrix} = M_{45}M_5M_{56}M_6M_{67}M_7 \tag{20}$$

为了消去(17)式中的共轭符号，下面证明(19)，(20)两式矩阵中 9 个元素有关系式

$$\bar{P}=V \quad \bar{Q}=U \quad \bar{R}=W \quad \bar{X}=Y \quad \bar{Z}=Z$$

设

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 则\quad QQ=I$$

直接运算可得

$$\overline{M}_{j,j+1} = M_{j,j+1} = QM_{j,j+1}Q \tag{21}$$

$$\overline{M}_j = QM_jQ \tag{22}$$

(17)式右边为

$$\begin{aligned}\overline{(M_{45}M_5M_{56}M_6M_{67}M_7)^T} &= (\overline{M}_{45}\overline{M}_5\cdots\overline{M}_7)^T = (\{QM_{45}Q\}\{QM_5Q\}\cdots\{QM_7Q\})^T \\ &= (QM_{45}M_5M_{56}M_6M_{67}M_7Q)^T \\ &= \left\{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P^0_{567}&U^0_{567}&X_{56}\\Q^0_{567}&V^0_{567}&Y_{56}\\R^0_{567}&W^0_{567}&Z_{56}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}^T \\ &= \begin{pmatrix}V^0_{567}&U^0_{567}&W^0_{567}\\Q^0_{567}&P^0_{567}&R^0_{567}\\Y_{56}&X_{56}&Z_{56}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{23}$$

于是由(17)，(20)，(23)得 9 个角度关系式

$$\begin{aligned}&P^0_{1234}=V^0_{567} \quad U^0_{1234}=U^0_{567} \quad X_{123}=W^0_{567}\\&Q^0_{1234}=Q^0_{567} \quad V^0_{1234}=P^0_{567} \quad Y_{123}=R^0_{567}\\&R^0_{1234}=Y_{56} \quad W^0_{1234}=X_{56} \quad Z_{123}=Z_{56}\end{aligned} \tag{24}$$

这 9 个关系式中，等式两边共 18 个表达式，展开后都是 $e^{i\theta}$ 的多项式，而加上标“0”者表示最后一个下标所代表的 $e^{i\theta_4}$ 或 $e^{i\theta_7}$ 仅是一次的，这是因为最后一个矩阵是对角矩阵 M_4 或 M_7。

9 个关系式中前两行的六个关系式未避开 θ_7，本文未使用。第三行的三个关系式将在后面作为各种关系式的推导基础。$R^0_{1234}=Y_{56}$ 及 $Z_{123}=Z_{56}$ 还满足(1)式的要求，故取为(1)式中 $i=1,2$ 的两个方程。

三、投影关系式

在图 1-1 中定义矢量

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_{71}+\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{a}_{12}+\boldsymbol{s}_2+\boldsymbol{a}_{23}+\boldsymbol{s}_3+\boldsymbol{a}_{34}+\boldsymbol{s}_4 \tag{25}$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{a}_{45}+\boldsymbol{s}_5+\boldsymbol{a}_{56}+\boldsymbol{s}_6+\boldsymbol{a}_{67}+\boldsymbol{s}_7 \tag{26}$$

在坐标系 I 中它们为 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}'_1$，在坐标系 II 中它们为 $\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}'_2$，则有

$$\boldsymbol{r}_1 = -\boldsymbol{r}'_1 \tag{27}$$

$$\boldsymbol{r}'_2 = -\boldsymbol{r}_2 \tag{28}$$

(27)式左乘 P^{-1}，（P 由（13）式给出）

$$P^{-1}\boldsymbol{r}_1 = -P^{-1}\boldsymbol{r}'_1 \text{ 或 } P^{-1}\boldsymbol{r}_1 = -(\boldsymbol{r}'^T_1P)^T \tag{29}$$

定义

$$\begin{aligned}P^{-1}\boldsymbol{r}_1 &= P^{-1}(r_{11},\ r_{12},\ r_{13})^T\\&=(-ir_{11}/\sqrt{2}+r_{12}/\sqrt{2},\ ir_{11}/\sqrt{2}+r_{12}/\sqrt{2},\ r_{13})^T\\&=(X_{PU123},\ Y_{QV123},\ Z_{RW123})^T\end{aligned} \tag{30}$$

及
$$r_1^T P = (r_{11},\ \ r_{12},\ \ r_{13})P$$
$$= (ir_{11}/\sqrt{2} + r_{12}/\sqrt{2},\ -ir_{11}\sqrt{2} + r_{12}/\sqrt{2},\ r_{13})$$
$$= (R^0_{PQ567},\ \ W^0_{UV367},\ \ Z_{XY56}) \tag{31}$$

由（29）式得到三个关系式
$$X_{PU123} = -W^0_{UV367} \tag{32}$$
$$Y_{QV123} = -R^0_{PQ567} \tag{33}$$
$$Z_{RW123} = -Z_{XY56} \tag{34}$$

又由（28）式可以定义
$$P^{-1}r_2 = (X_{PV56},\ \ Y_{QV56},\ \ Z_{RW56})^T \tag{35}$$
$$r_2^T P = (R^0_{PQ1231},\ \ W^0_{UV1231},\ \ Z_{XY123}) \tag{36}$$

而得另外三个关系式
$$X_{PU56} = -W^0_{UV1234} \tag{37}$$
$$Y_{QV56} = -R^0_{PQ1234} \tag{38}$$
$$Z_{RW56} = -Z_{XY123} \tag{39}$$

(32)～(34)，(37)～(39)六个关系式中，由于(32)，(33)未避开 θ_7，本文中未使用。(37),(38),(39)三个关系式在后面也作为各种关系式的推导基础。(38)，(39)，(34)三式满足(1)式的要求，选取为(1)式 $i=3,4,5$ 的三个方程。

下面说明这六个关系式中，左右两边共12个表达式全都是 $e^{i\theta}$ 的二次多项式的形式，但是上标“0”者，最后一个下标所代表的 $e^{i\theta}$ 为一次。

由定义及图1-1，(30)式为
$$P^{-1}r_1 = P^{-1}\{(a_{71},\ \ 0,0)^T + [\alpha_{71}](0,0,s_1)^T + [\alpha_{71}][\theta_1](a_{12},\ \ 0,0)^T$$
$$+[\alpha_{71}][\theta_1][\alpha_{12}](0,0,s_2)^T$$
$$+\cdots+[\alpha_{71}][\theta_1][\alpha_{12}][\theta_2][\alpha_{23}][\theta_3][\alpha_{34}](0,0,s_4)^T\}$$

把 P^{-1} 乘入花括号，并在各矩阵中插入 $PP^{-1}=I$，例如第三项可以如此变化，利用(14)，(18)
$$P^{-1}[\alpha_{71}][\theta_1][\alpha_{12}](0,0,\ s_2)^T$$
$$=\{P^{-1}[\alpha_{71}]P\}\{P^{-1}[\theta_1]P\}\{P^{-1}[\alpha_{12}]P\}\{P^{-1}(0,0,s_2)^T\}$$
$$=M_{71}M_1M_{12}(0,0,s_2)^T$$

其它各项也照此变化后，（30）式可变为
$$\begin{aligned}
&(X_{PU123},\ \ Y_{QV123},\ \ Z_{RW123})^T\\
&=P^{-1}r=(-ia_{71}/\sqrt{2},\ ia_{71}/\sqrt{2},\ 0)^T+M_{71}(0,0,s_1)^T\\
&\quad+M_{71}M_1(-ia_{12}/\sqrt{2},\ ia_{12}/\sqrt{2},\ 0)^T+M_{71}M_1M_{12}(0,0,s_2)^T\\
&\quad+M_{71}M_1M_{12}M_2(-ia_{23}/\sqrt{2},\ ia_{23}/\sqrt{2},\ 0)^T\\
&\quad+M_{71}M_1W_{12}M_2M_{23}(0,0,s_3)^T\\
&\quad+M_{71}M_1M_{12}M_2M_{23}M_3(-ia_{34}/\sqrt{2},\ ia_{34}/\sqrt{2},\ 0)^T\\
&\quad+M_{71}M_1M_{12}M_2M_{23}M_3M_{34}(0,0,s_4)^T
\end{aligned}\tag{40}$$

(31)式也可以做如下类似变化

$$
\begin{aligned}
r_1{}^T P = \{&[\theta_7]^{-1}[a_{67}]^{-1}[\theta_6]^{-1}[a_{56}]^{-1}[\theta_5]^{-1}(a_{45}, 0, 0)^T \\
&+[\theta_7]^{-1}[a_{67}]^{-1}[\theta_6]^{-1}[a_{56}]^{-1}(0, 0, s_5)^T \\
&+\cdots+[\theta_7]^{-1}(a_{67}, 0, 0)^T+(0, 0\, s_7)^T\}^T P \\
=(&i a_{45}/\sqrt{2}, -i a_{45}/\sqrt{2}, 0) M_5 M_{56} M_6 M_{67} M_7 \\
&+(0, 0, s_5) M_{56} M_6 M_{67} M_7 \\
&+(i a_{56}/\sqrt{2}, -i a_{45}\sqrt{2}, 0) M_6 M_{67} M_7+(0, 0, s_6) M_{67} M_7 \\
&+(i a_{67}/\sqrt{2}, -i a_{67}/\sqrt{2}, 0) M_7+(0, 0, s_7)
\end{aligned} \tag{41}
$$

可以看到，所有 $e^{i\theta}$ 都不超过二次，且(41)式中每串矩阵都以对角矩阵 M_7 结束，故 R^0_{PQ567}，W^0_{UV567} 中 $e^{i\theta_7}$ 为一次。

同样 X_{PU56}，Y_{QV56}，Z_{RW56}，R^0_{PQ1234}，W^0_{UV1234}，Z_{XY123} 六式也可以写出其表达式，且其中 $e^{i\theta_4}$ 为一次。

现在来找入(32)、(33)、(34)与(37)、(38)、(39)两组关系式间的关系。由图一及坐标变换得下式

$$r=[a_{71}][\theta_1][a_{12}][\theta_2]\cdots[\theta_4] r_2 \tag{42}$$

左乘 P^{-1}，并在矩阵中插入 $PP^{-1}=I$ 得

$$P^{-1} r_1=M_{71} M_1 M_{12} M_2 \cdots M_4(P^{-1} r_2) \tag{43}$$

由(36) $\quad P^{-1} r_2=\overline{(r_2^T P)^T}=\overline{(R^0_{PQ1234}, W^0_{UV1234}, Z_{XY123})^T}$

再由（30）式的定义，（43）式可变为

$$
\begin{pmatrix} X_{PV123} \\ Y_{QV123} \\ Z_{RW123} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P^0_{1234} & U^0_{1234} & X_{123} \\ Q^0_{1234} & V^0_{1234} & Y_{123} \\ R^0_{1234} & W^0_{1234} & Z_{123} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^0_{UV1234} \\ R^0_{PQ1234} \\ Z_{XY123} \end{pmatrix} \tag{44}
$$

可得

$$X_{PU123}=P^0_{1234} W^0_{UV1234}+U^0_{1234} R^0_{PQ1234}+X_{123} Z_{XY123} \tag{45}$$

$$Y_{QV123}=Q^0_{1234} W^0_{UV1234}+V^0_{1234} R^0_{PQ1234}+Y_{123} Z_{XY123} \tag{46}$$

$$Z_{RW123}=R^0_{1234} W^0_{UV1234}+W^0_{1234} R^0_{PQ1234}+Z_{123} Z_{XY123} \tag{47}$$

若把（44）式方阵移到等式左边，共轭转置，并把下标改变，可得另一组关系

$$
\begin{pmatrix} R_{PQ46} \\ W_{UV56} \\ Z_{XY56} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} Y_{QV56} \\ X_{PV56} \\ Z_{RW56} \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} P_{56} & U_{56} & X_{56} \\ Q_{56} & V_{56} & Y_{56} \\ R_{56} & W_{56} & Z_{56} \end{pmatrix} \tag{48}
$$

$$R_{PQ56}=Y_{QV56} P_{56}+X_{PU56} Q_{56}+Z_{RW56} R_{56} \tag{49}$$

$$W_{UV56}=Y_{QV56} U_{56}+X_{PU56} V_{56}+Z_{RW56} W_{56} \tag{50}$$

$$Z_{XY56}=Y_{QV56} X_{56}+X_{PU56} Y_{56}+Z_{RW56} Z_{56} \tag{51}$$

这两组关系式都是恒等式。对于每个 $e^{i\theta}$，等式左边全不超过二次，故右边也不应超过二次。但右边因为是乘积，形式上是四次的。这说明在用右边的式子计算左边的式子时，只要跳过高次项，不去计算它就可以了。这给编制计算机程序带来了极大的方便。在后面的关系式计算中，这一方法是普遍地应用的。

四、其它关系式

取以下三个角度关系式，三个投影关系式为基础，进行扩展。

$$X_{56}=W^{0}_{1234} \tag{52}$$

$$Y_{56}=R^{0}_{1234} \tag{53}$$

$$Z_{56}=Z_{123} \tag{54}$$

$$X_{PU56}=-W^{0}_{UV1234} \tag{55}$$

$$Y_{QV56}=-R^{0}_{PQ1234} \tag{56}$$

$$Z_{RW56}=-Z_{XY123} \tag{57}$$

由于避开了 θ_7，而 θ_1 为输入，故五个未知量为 θ_2，θ_3，$\cdots\theta_7$。三个角度关系式，只有两个是独立的，可由下式看到

$$\overline{(M_{56}M_6\cdots M_7)^T}(M_{56}M_6\cdots M_7)=I$$

∴　$$2X_{56}Y_{56}+Z^2_{56}=1$$

同样　$$2W^0_{1234}R^0_{1234}+Z^2_{123}=1$$

而三个投影关系式，其几何意义是向三个坐标轴的投影，它们是互相独立的。故 5 个未知量 5 个独立方程，方程组解确定。但没有达到(1)式的要求，尚须补充。

用 (52)×(56)+(53)×(55)+(54)×(57) 再利用 (47) 及 (51) 可补充一个方程

$$X_{56}Y_{QV56}+Y_{56}X_{PU56}+Z_{56}Z_{RW56}$$

$$=-(W^0_{1234}R^0_{PQ1234}+R^0_{1234}W^0_{UV1234}+Z_{123}Z_{XY123}$$

或　$$Z_{XY56}=-Z_{RW123} \tag{58}$$

这就 (34) 式。

下面还可补充 7 个方程，全部利用六个基础关系式相乘相加（减）而得到。

用 2×(55)×(56)+(57)×(57)，其中 $e^{i\theta_4}$ 被消去得

$$2X_{PU56}Y_{QV56}+Z^2_{RW56}=2W^0_{UV1234}R^0_{PQ1234}+Z^2_{XY123}$$

或　$$L_{56}=L_{123} \tag{59}$$

用 (57)×(52)−(55)×(54)得

$$Z_{RW56}Y_{56}-X_{PU56}Z_{56}=W^0_{UV1234}Z_{123}-Z_{XY123}W^0_{1234}$$

或　$$X_{056}=W^0_{01234} \tag{60}$$

用 (57)×(53)−(56)×(54) 得

$$Z_{RW56}X_{56}-Y_{QV56}Z_{56}=R^0_{PQ1234}Z_{123}-Z_{XY123}R^0_{1234}$$

或　$$Y_{056}=R^0_{01234} \tag{61}$$

用 (55)×(53)−(56)×(52)，其中 $e^{i\theta_4}$ 被消去得

$$X_{PU56}Y_{56}-Y_{QV56}X_{56}=R^0_{PQ1234}W^0_{1234}-W^0_{UV1234}R^0_{1234}$$

或　$$Z_{056}=Z_{0123} \tag{62}$$

用 (59)×(52)−2×(58)×(55) 得

$$L_{56}X_{56}-2Z_{XY56}X_{PU56}=L_{123}W^0_{1234}-2Z_{RW123}W^0_{UV1234}$$

或　$$X_{0056}=W^0_{001234} \tag{63}$$

用 (59)×(53) − 2×(58)×(56) 得

$$L_{56}Y_{56}-2Z_{XY56}Y_{QV56}=L_{123}R^{0}_{1234}-2Z_{RW123}R^{0}_{PQ1234}$$

或

$$Y_{0056}=R^{0}_{001234} \tag{64}$$

用 (59)×(54) − 2×(58)×(57) 得

$$L_{56}Z_{56}-2Z_{XY56}Z_{RW56}=L_{123}Z_{123}-2Z_{RW123}Z_{XY123}$$

或

$$Z_{0056}=Z_{00123} \tag{65}$$

(59)～(65) 这 7 个方程同样都是各个 $e^{i\theta}$ 的二次多项式，而上标"0"者，最后一个下标所代表的 $e^{i\theta}$ 为一次。但限于篇幅证明从略。

(52)～(65) 共 14 个方程，除去以下四个方程，全部符合(1)式的要求。

$$X_{56}=W^{0}_{1234} \qquad X_{PU56}=-W^{0}_{UV1234}$$

$$X_{056}=W^{0}_{01234} \qquad X_{0056}=-W^{0}_{001234}$$

五、数字计算检验

采用文[1]中的结构尺寸，编制程序，在IBM PC/XT 兼容机 KOSMIC KH-16 上进行了计算，选择输入角步长为 1°，采用双精度计算。计算结果见图 1-2，与文[1]中结果一致，但输入输出方程是 16 次的。

最后顺便指出，文中所述复数法还可用于导出 6R-P 及 5R-C（P代表移动副，C代表圆柱副）等机构的输入输出方程。

J. Daffy 教授在一次通信中指出，7R 机构的输入输出方程应当是16次的。笔者对他提供的建议表示衷心的感谢。

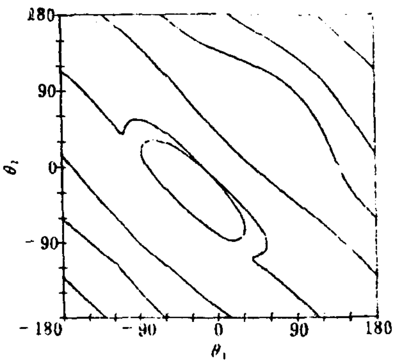

图 1-2

参 考 文 献

〔1〕 J. Daffy and C. Crane, A Displacement Analysis of the General Spatial 7-Link, 7R Mechanism, Mechanism and Machine Theory, Vol 15, pp153-169, 1980

〔2〕 J. Duffy, Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators, Edward Arnold London, 1980

〔3〕 张启先，空间机构的分析与综合，机械工业出版社，1984 年

A NOVEL APPROACH TO THE DISPLACEMENT ANALYSIS OF GENERAL SPATIAL 7R MECHANISM

Liao Qizheng
(Beijing Institute of Posts and Telecommunications)
Liang Chonggao
(Beijing Institute of Posts and Telecommunications)
Zhang Qixian
(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

ABSTRACT

The displacement analysis of the general spatial 7R mechanism is one of the most difficult tasks in the kinematic analysis of spatial mechanisms. In the paper published in 1980 by J. Duffy and C. Crane, the input-output equation for this mechanism was shown to be 32nd degree. Recently J. Duffy began to believe that the proper order of the input-output equation should be lower. In the present paper the input-output equation without any unwanted roots has been worked out to be 16th degree by using a complex number method, which is much simpler in computer programming than the others. A numerical verification shows that the real roots are agreed with those obtained by J. Duffy.