

渐开线少齿差行星齿轮传动 几何计算研究

西安冶金建筑学院

1978年6月

渐开线少齿差行星齿轮传动几何计算研究

西安冶金建筑学院机电系 李建华

内 容 提 要

渐开线少齿差行星齿轮传动几何参数的选择计算是设计工作中首先要解决的一个关键问题。以往由于选择变位系数的方法比较复杂而又不够系统,给设计工作造成很大不便。本文介绍一种新计算方法——逐步逼近法,可以快速、准确地求解最佳点变位系数,为系统地解决几何参数的选择计算提供了可靠的手段。文中还就各几何参数对最佳点变位系数的影响作了系统的研究。附录中列出常用参数范围内的最佳变位系数及相应的其他几何参数,可供设计时使用。

一、概 述

渐开线少齿差行星齿轮传动属于K—H—V传动,一般当内外齿轮的齿数差 $Z_p = Z_2 - Z_1 = 1 \sim 4$ 时,称为少齿差传动。在实际应用中可有两种装置形式。

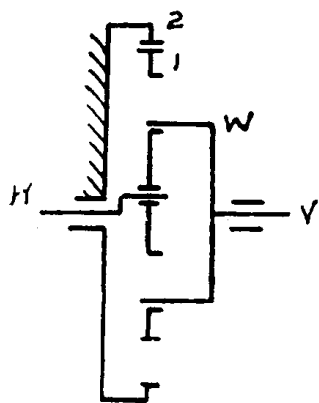


图 1

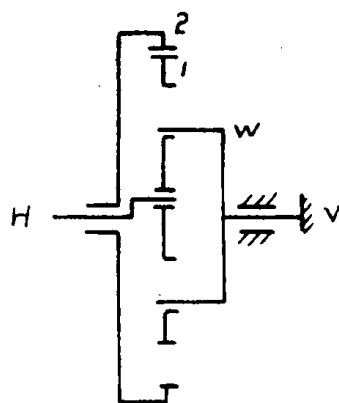


图 2

图 1 所示机构,固定内齿轮 2,以转臂 H 为主动构件,行星齿轮 1 为从动构件,通过 W 机构由轴 V 输出,其传动比为

$$i_{H,2}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

则

$$i_{H,1}^H = \frac{\omega_H}{\omega_1} = -\frac{Z_1}{Z_p} \quad (1)$$

主从动轴转向相反,显然,如 $Z_p = 1$,则 $i_{H,1}^H = -Z_1$ 。

图2所示机构, 固定V轴, 以转臂H为主动构件, 以内齿轮2为从动构件, 则其传动比为

$$i_{12}^H = \frac{-\omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

则

$$i_{H2} = \frac{\omega_H}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_p} \quad (2)$$

主从动轴转向相同, 如 $Z_p = 1$, 则 $i_{H2} = Z_2$ 。

由此可见, 利用一级少齿差传动即可得到大传动比, 特别是一齿差更为突出, 一级传动比可达100左右。由于这一特点, 应用少齿差传动, 比起一般常用的2K—H行星传动机构要紧凑得多, 更不用说与定轴齿轮传动相比了。此外, 少齿差传动效率也比较高, 一般可达90%左右, 而其它传动型式——如普通齿轮传动、蜗轮传动等, 当采用较大传动比时, 需用多级传动, 难以达到这样高的效率。从另一方面看, 渐开线少齿差传动的传动平稳性虽不及摆线针轮传动, 效率也较低, 但是由于渐开线齿轮传动比摆线针轮传动的加工设备简单得多, 便于推广使用, 在中小功率的大传动比方面很受欢迎。

二、渐开线少齿差传动几何计算特点

由于渐开线少齿差传动的特殊几何条件, 使在正常参数范围内应用标准齿轮成为不可能, 例如为了避免节点对方的齿顶干涉(图3), 应满足

$$R_{e2} + A \geq R_{e1}$$

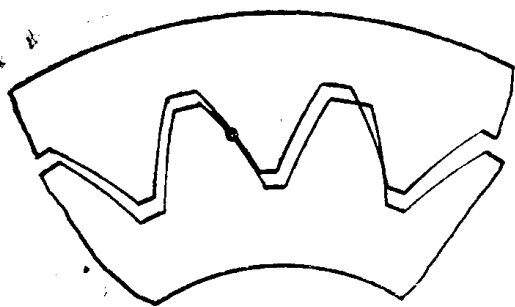


图3

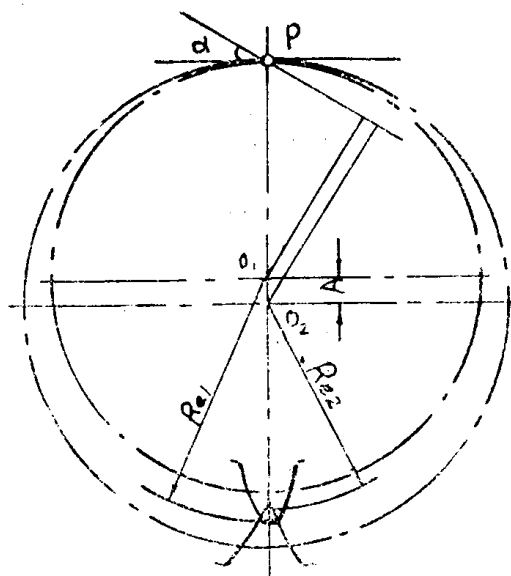


图4

即

$$\frac{m}{2}(Z_2 - 2f_0) + \frac{m}{2}(Z_2 - Z_1) \geq \frac{m}{2}(Z_1 + 2f_0)$$

则

$$Z_p \geq 2f_0$$

由上式可以看出, 如果采用 $f_0 = 1$ 的标准齿轮, 显然应满足 $Z_p \geq 2$, 也就是说一齿

差传动根本不能用,二齿差为临界状态,而齿廓重迭干涉(图4)的限制条件更为不利,因而,在实用参数范围内,应用标准齿轮的少齿差传动不具有现实可能性。只有采取加大原始齿形角 α_0 ,降低齿顶高系数 f_0 及应用正变位传动三方面措施才得以实现。由于刀具原始齿形角在标准齿轮刀具已属定值,无法改变,所以实际上只有降低 f_0 及应用正变位传动两种办法,目前这两种措施通常是并行采用的。由此决定了少齿差传动的几何参数的选择计算具有许多特点。一般说来,首先应根据各限制条件来确定最有利的变位系数,然后再根据变位系数进行其他参数的计算。下面我们将要看到,确定变位系数是与模数无关的,所以我们在计算时特别引进一套与模数无关的参数,这对于明确概念及简化计算公式是很有必要的。当然,在确定变位系数后进而进行齿轮其他具体几何尺寸及测量尺寸的计算时,就应计及模数的具体数值。表1列出主要几何参数的计算公式

少齿差传动几何参数计算公式

表1

原始参数: 模数 m ; 外齿轮齿数 Z_1 ; 内齿轮齿数 Z_2 ; 插齿刀齿数 Z_c ; 原始齿形角 α_0 ; 齿顶高系数 f_0 ; 标准径向间隙系数 C_0			
序号	名称	符号	公 式
1	齿 差 数	Z_p	$Z_p = Z_2 - Z_1$
2	制 造 啮 合 角	α_c	滚齿时: $\alpha_{c1} = \alpha_0$ 插齿时: $\alpha_{c1} = \cos^{-1} \frac{Z_1 + Z_c}{Z_1 + Z_c + 2\xi_1} \cos \alpha_0$ $\alpha_{c2} = \cos^{-1} \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 - Z_c + 2\xi_2} \cos \alpha_0$
3	分 度 圆 齿 厚 增 量 系 数	Δ	滚齿时: $\Delta_1 = 2\xi_1 \tan \alpha_0$ 插齿时: $\Delta_1 = (Z_1 + Z_c)(\text{inv} \alpha_{c1} - \text{inv} \alpha_0)$ $\Delta_2 = (Z_2 - Z_c)(\text{inv} \alpha_0 - \text{inv} \alpha_{c2})$
4	传 动 啮 合 角	α	$\text{inv} \alpha = \text{inv} \alpha_0 - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{Z_p}$
5	中 心 距 系 数	A'	$A' = \frac{Z_p \cos \alpha_0}{2 \cos \alpha}$
6	中 心 距	A	$A = mA'$
7	中心分离系数	λ	$\lambda = A' - Z_p/2$
8	齿顶缩短系数	v	$v = \lambda - \xi_2 + \xi_1$
9	齿 顶 高 系 数	f'	$f'_1 = f_0 + \xi_1 - v$ $f'_2 = f_0 - \xi_2 - v$

续表

10	齿顶高	h'	$h'_1 = mf'_1$ $h'_2 = mf'_2$
11	齿根高系数	f''	$f''_1 = f_0 + c_0 - \xi_1$ $f''_2 = f_0 + c_0 + \xi_2$
12	齿根高	h''	$h''_1 = mf''_1$ $h''_2 = mf''_2$
13	基圆半径	r_0	$r_{01} = \frac{mZ_1}{2} \cos \alpha_0$ $r_{02} = \frac{mZ_2}{2} \cos \alpha_0$
14	分度圆半径	r_f	$r_{f1} = \frac{mZ_1}{2}$ $r_{f2} = \frac{mZ_2}{2}$
15	齿顶圆系数	R'_e	$R'_{e1} = \frac{Z_1}{2} + f'_1$ $R'_{e2} = \frac{Z_2}{2} - f'_2$
16	齿顶圆半径	R_e	$R_{e1} = mR'_{e1}$ $R_{e2} = mR'_{e2}$
17	齿顶圆压力角	α_e	$\alpha_{e1} = \cos^{-1} \frac{Z_1 \cos \alpha_0}{2R'_{e1}}$ $\alpha_{e2} = \cos^{-1} \frac{Z_2 \cos \alpha_0}{2R'_{e2}}$
18		α_x	$\alpha_{x1} = \cos^{-1} \frac{Z_1 \cos \alpha_0}{Z_1 + 2\xi_1 - c_0 - v}$ $\alpha_{x2} = \cos^{-1} \frac{Z_2 \cos \alpha_0}{Z_2 + 2\xi_2 + c_0 + v}$
19	外齿轮跨齿数	n_1	$n_1 \approx \frac{\alpha_{x1}}{180^\circ} \cdot Z_1 + 0.5$ (取整)
20	外齿轮公法线长度系数	L'_1	$L'_1 = \pi \cos \alpha_0 \left[n_1 - 0.5 + \frac{\Delta_1}{\pi} + \frac{Z_1 \operatorname{inv} \alpha_0}{\pi} \right]$
21	外齿轮公法线长度	L_1	$L_1 = mL'_1$

22	内齿轮跨齿沟数	k_2	$k_2 \approx \frac{\alpha_{x2}}{180^\circ} \cdot Z_2 + 0.5$ (取整)
23	内齿轮公法线长度系数	L'_2	$L'_2 = \pi \cos \alpha_0 \left[k_2 - 0.5 - \frac{\Delta_2}{\pi} + \frac{Z_2 \operatorname{inv} \alpha_0}{\pi} \right]$
24	内齿轮公法线长度	L_2	$L_2 = m L'_2$
25		α_p	$\alpha_p = \operatorname{tg} \alpha_{x2} - \operatorname{inv} \alpha_0 - \frac{\pi}{2Z_2} + \frac{\Delta_2}{Z_2}$
26	内齿轮量棒直径系数	d'_p	$d'_p = Z_2 \cos \alpha_0 \left(\operatorname{inv} \alpha_0 + \frac{\pi}{2Z_2} - \frac{\Delta_2}{Z_2} - \operatorname{inv} \alpha_p \right)$
27	内齿轮量棒直径	d_p	$d_p = m d'_p$
28	内齿轮跨棒距系数	M'	偶数齿时: $M' = \frac{Z_2 \cos \alpha_0}{\cos \alpha_p} - d'_p$ 奇数齿时: $M' = \frac{Z_2 \cos \alpha_0}{\cos \alpha_p} \cos \frac{90^\circ}{Z_2} - d'_p$
29	内齿轮跨棒距	M	$M = m M'$
30	内齿轮跨棒距偏差	$\Delta_m M$	偶数齿时: $\Delta_m M = \frac{\Delta_m L_2}{\sin \alpha_p}$ 奇数齿时: $\Delta_m M = \frac{\Delta_m L_2}{\sin \alpha_p} \cdot \cos \frac{90^\circ}{Z_2}$
31	内齿轮跨棒距公差	δM	偶数齿时: $\delta M = \frac{\delta L_2}{\sin \alpha_p}$ 奇数齿时: $\delta M = \frac{\delta L_2}{\sin \alpha_p} \cdot \cos \frac{90^\circ}{Z_2}$

1. 内齿轮传动啮合方程式

一变位外齿轮和一变位内齿轮啮合时, 由于两节圆相切并作纯滚动, 如令侧隙为零, 则可得

$$t' = s'_1 + W'_1 = s'_1 + s'_2 \quad (3)$$

式中 t' ——节圆上周节

s'_1 、 s'_2 ——分别为外齿轮和内齿轮节圆上齿厚

W'_1 ——外齿轮节圆上齿间

代入齿厚计算公式则可得

$$t \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} = (s_1 + s_2) \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} + 2 \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha} \left(\frac{m Z_1}{2} - \frac{m Z_2}{2} \right) (\operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_0) \quad (4)$$

经整理后得

$$\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{inv} \alpha_0 - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{Z_p} \quad (5)$$

当用标准插齿刀加工外齿轮时（以下计算公式均是在插齿刀变位系数为零的情况下得出的），分度圆增量系数

$$\Delta_1 = (Z_1 + Z_c)(\operatorname{inv} \alpha_{c1} + \operatorname{inv} \alpha_0) \quad (6)$$

当用插齿刀加工内齿轮时

$$\Delta_2 = (Z_2 - Z_c)(\operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_{c2}) \quad (7)$$

当用滚刀加工外齿轮时

$$\Delta_1 = 2\xi_1 \operatorname{tg} \alpha_0 \quad (8)$$

式(5)称为无侧隙啮合方程式，是变位齿轮传动几何关系的基本方程式，当变位系数 ξ_1, ξ_2 决定后，则可计算出分度圆增量系数，而后代入式(5)求得传动啮合角 α ， α 确定后即可计算齿轮的其他几何参数。

由于外齿轮用插齿刀与用滚刀加工时所得 Δ_1 数值是不等的，则传动啮合角也不等，所以其几何参数一般是不能相互代替的；至于内齿轮，则不能用一般的滚刀进行加工，所以只有插齿刀加工一种情况。

2. 渐开线少齿差行星齿轮传动限制条件

由于渐开线少齿差行星齿轮传动的内在特性，使几何参数的选择计算显得特别复杂，因此，一直被认为是最困难的工作。而几何参数的选择计算工作最主要的是要判明这种传动在几何参数的计算方面存在着哪一些限制条件，然后才有可能根据这些限制条件来进行参数的选择计算。分析起来，一对内啮合齿轮从加工、安装到运转过程，有如下几类限制条件，列于表2

少齿差传动限制条件

表 2

序号	名 称	计 算 公 式
1	切削外齿轮不产生根切限制条件	滚齿时： $\xi_1 \geq f_0 + c_0 - \frac{Z_1}{2} \sin^2 \alpha_0$ 插齿时： $\xi_1 \geq \frac{1}{2} [(Z_c + 2f_0 + 2c_0)^2 + Z_1(Z_1 + 2Z_c) \cos^2 \alpha_0]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(Z_1 + Z_c)$
2	切削外齿轮不产生顶切限制条件	$\xi_1 \geq \frac{(Z_1 + 2f_0 - 2v)^2 - Z_1^2 - (Z_c^2 + 2Z_1 Z_c) \sin^2 \alpha_0}{4(Z_c - 2f_0 - 2v)}$
3	切削内齿轮不产生顶切限制条件	$\xi_2 \geq \frac{Z_2^2 - (2Z_2 Z_c - Z_c^2) \sin^2 \alpha_0 - (Z_2 - 2f_0 + 2v)^2}{4(Z_c - 2f_0 - 2v)}$
5	保证内齿轮齿顶部分为渐开线限制条件	$\xi_2 \geq f_0 - v - \frac{Z_2}{2} (1 - \cos \alpha_0)$

4	切削内齿轮不产生让刀干涉限制条件	$\xi_2 \leq \frac{Z_2}{Z_c} (f_0 + c_0) + f_0 - v$ $\xi_2 \geq \frac{Z_c - Z_2 + 2(f_0 + c_0)}{2} + f_0 - v$ $\sin^{-1} \sqrt{\frac{\left(\frac{R_{e2}}{R_{ec}}\right)^2 - \left(\frac{Z_2}{Z_c}\right)^2}{1 - \left(\frac{Z_2}{Z_c}\right)^2}} + \text{inv}\alpha_{ec} - \text{inv}\alpha_{e2}$ $\geq \frac{Z_2}{Z_c} \left[\sin^{-1} \sqrt{\frac{\left(\frac{R_{ec}}{R_{e2}}\right)^2 - \left(\frac{Z_c}{Z_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{Z_c}{Z_2}\right)^2}} + \text{inv}\alpha_{ec} - \text{inv}\alpha_{e2} \right]$
6	保证外齿轮齿顶厚度限制条件	$\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_{e1}} \left[\frac{\pi}{2} + \Delta_1 - Z_1 (\text{inv}\alpha_{e1} - \text{inv}\alpha_0) \right] \geq 0.25 \sim 0.4$
7	保证内齿轮顶厚度限制条件	$\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_{e2}} \left[\frac{\pi}{2} + \Delta_2 + Z_2 (\text{inv}\alpha_{e2} - \text{inv}\alpha_0) \right] \geq 0.25 \sim 0.4$
8	不产生节点对方齿顶干涉限制条件	$\xi_2 - \xi_1 \leq \frac{Z_1}{2} \left(\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha} + 1 \right) - 2f_0 + 2v$
9	不产生内齿轮齿顶和外齿轮齿根干涉限制条件	$Z_2 \text{tg}\alpha_{e2} - Z_1 \text{tg}\alpha \geq (Z_1 + Z_c) \text{tg}\alpha_{e1} - Z_c \text{tg}\alpha_{ec}$
10	不产生外齿轮齿顶和内齿轮齿根干涉限制条件	$Z_1 \text{tg}\alpha_{e1} + Z_1 \text{tg}\alpha \leq (Z_2 - Z_c) \text{tg}\alpha_{e2} + Z_c \text{tg}\alpha_{ec}$
11	不产生齿廓重迭干涉限制条件	$G_s = Z_1 (\text{inv}\alpha_{e1} + \delta_1) - Z_2 (\text{inv}\alpha_{e2} + \delta_2) + Z_1 \sin\alpha \geq 0$ $\delta_1 = \cos^{-1} \frac{R_{e2}'^2 - R_{e1}'^2 - A'^2}{2A'R_{e1}'}$ $\delta_2 = \cos^{-1} \frac{R_{e2}'^2 - R_{e1}'^2 + A'^2}{2A'R_{e2}'}$
12	保证连续运转限制条件	$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \left[Z_2 (\text{tg}\alpha - \text{tg}\alpha_{e2}) - Z_1 (\text{tg}\alpha - \text{tg}\alpha_{e1}) \right] \geq 1$

3. 渐开线少齿差传动的最佳参数

图5 是一组特定参数的内啮合齿轮传动的部分限制曲线,多方面的研究表明,在实用的参数范围内,这些条件中,齿廓重迭干涉和连续运转限制曲线是最为关键的,当满足 $G_s = 0$ 及 $\varepsilon = 1$ (或 $E = \varepsilon - 1 = 0$) 两条件曲线时,其它条件一般也可满足。图中曲线(13)是齿顶缩短系数 $v = 0$ 的曲线,这条曲线不应视为限制曲线,但是在常用的参数

范围内, 这条曲线与曲线 (11) 及曲线 (12) 恰围成一封闭三角形。在此封闭图形内选取变位系数是比较适宜的, 因此作为辅助曲线也有存在的价值。同时必须指出, 在特定的参数范围内, 如齿顶系数较小的一齿差传动中, 曲线 (13) 可能位于曲线 (11) 和曲线 (12) 交点的右方, 三曲线围成一相反的封闭三角形, 此时, 三角封闭图形内就不是适用范围了。

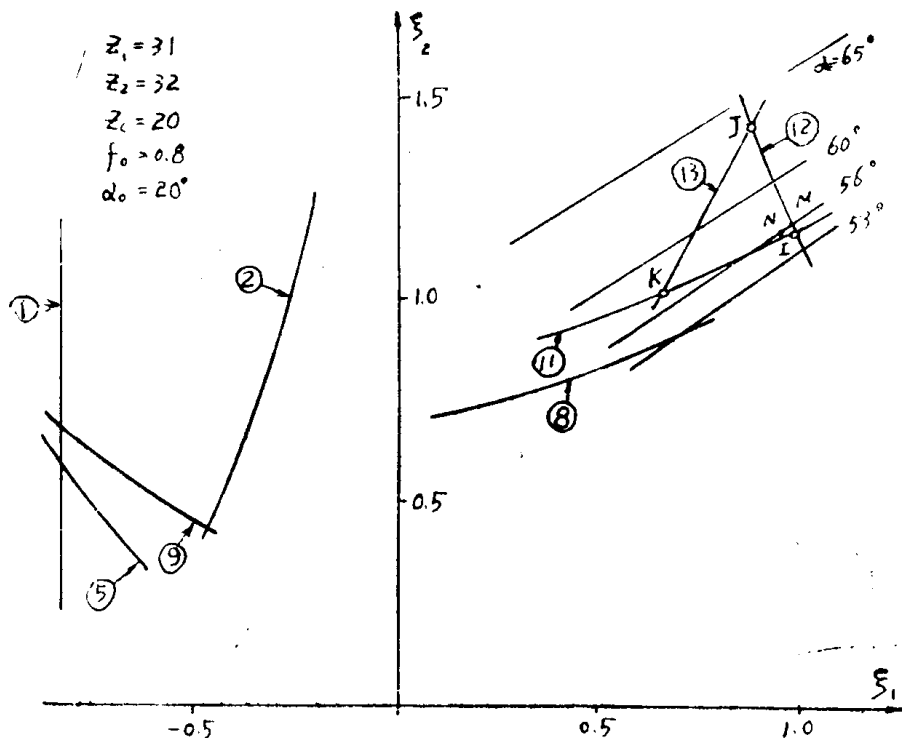


图5

由上述可知, 变位系数 (ξ_1, ξ_2) 可以在三曲线所围成封闭图形内选取比较合适, 但并不是任何点都很合理, 我们就以有代表意义的三曲线的交点 I, J, K, 来看: I 点是 $G_s = 0$ 及 $E = 0$ 两曲线的交点, 即 G_s 及 E 值的临界点, 当取此点的变位系数时, 可以在保证传动连续性的条件下得到最小的啮合角数值; K 点虽可得到较大的重迭系数, 但啮合角数值也增大; 而 J 点的啮合角数值最大。综合起来可以看出, I 点是最好的点, 因为啮合角 α 值小可以降低轴承负荷, 而轴承又往往是这一类型减速器的薄弱环节, 特别是对于一、二齿差传动, 啮合角本来就嫌过大, 一般当一齿差时 $\alpha > 50^\circ$, 二齿差时 α 也将近 40° , 如果参数选择得不合适, 数值还要更大。因此, 在设计时尽可能降低啮合角的数值是非常重要的。由此可以得出结论: $G_s = 0$ 及 $E = 0$ 两曲线交点 I 是满足各限制条件下的最佳点, 此时的变位系数为最佳变位系数。

至于重迭系数 ε 的数值, 对于少齿差, 特别是一、二齿差, 一般认为不必取得过大, 一般取 $\varepsilon = 1$ 或略大于 1 即可, 这是因为内啮合齿轮两齿廓同向, 内外齿廓极为接近, 因而在实际工作中有许多对轮齿可以同时啮合, 所以没有必要如一般齿轮传动那样取较大的重迭系数。上海电动葫芦厂制造的 GD 型 0.5^T 电动葫芦减速器甚至应用 $\varepsilon = 0.877$ 的内啮合传动, 经四万次满负荷试验, 证明啮合情况良好, 国外也有类似情况报导, 但目前在理论上的论证及实验资料都还感到不足。如果需要提高 ε 数值, 则可沿 $G_s = 0$ 曲线向左选

取,使不至于过分的加大啮合角数值。

一般设计时,都希望求得最佳点参数,如果应用封闭图来选取是极为麻烦的,因为“确定变位系数极为困难和复杂,熟练的工程师也要花几天时间”。况且每一张封闭图只适用于一组特定参数,而实际上可能使用的参数组合不下万种,要绘制如此数量的封闭图实际上是不可能的,即便使用电子计算机进行计算绘制也是很费时间的。日本主要应用综合线图进行选择,这种方法的缺点与前一种相似,绘制也很麻烦,因为“要把这些参数组合起来,而且要作位数很多的精密计算,因此变位齿轮干涉界限线图的制作是一项相当困难的工作”。一些文献中提出最好是用解析法求解最佳变位系数,但又苦于找不到合适的公式来解超越方程组。

近年来国内一些同志致力于研究算法,并取得了一些可喜成果,但还没有直接求解最佳变位系数的方法,只是先假定啮合角 α 或同时假定 α 和 ξ_1 ,再在此基础上求解,这样一来,所求得的点并不是最佳点,而是靠近最佳点的某一特定点(参看图5中的M点及N点),所以啮合角也必然偏大,而啮合角的大小恰恰是衡量这种传动的主要质量指标,本来应该取尽可能小的数值为宜。此外由于未能求得最佳点的数值,就很难对几何参数进行有说服力的系统研究。

三、逐步逼近法

为了解决上述矛盾,直接求解最佳变位系数,作者提出了一个新解法——逐步逼近法。

1. 求超越方程组的逐步逼近法——平面问题的二分法。

在计算数学里,为了求解高次代数方程,常应用二分法。

如图6所示,设 $f(x)$ 是 x 的连续函数,并且 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 两端的函数值 $f(a)$, $f(b)$ 异号,为了明确起见,设 $f(a) < 0$, $f(b) > 0$,则根据连续函数性质,方程 $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 区间必有实根,可用二分法逐次逼近一个实根。把区间 $[a, b]$ 二等分,计算中点函数值 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$,如 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$,就得到一实根,

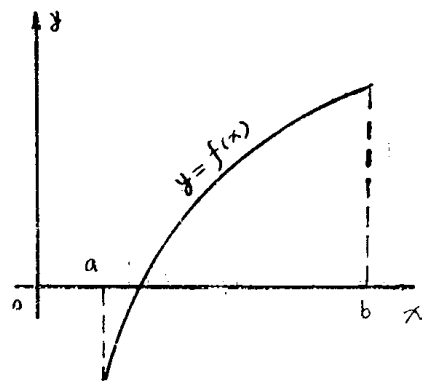


图6

否则,如 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$,令 $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$;反之令 $b_1 = \frac{a+b}{2}$, $a_1 = a$,得到新区间 $[a_1, b_1]$,再把区间等分,计算函数值 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ 等……,直至某一次 $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$,则求得实根。

现在我们将这个方法加以改造推广,得出了一个新方法——平面二分法,用来解超越方程组。

设有一超越方程组(代数方程组也适用)

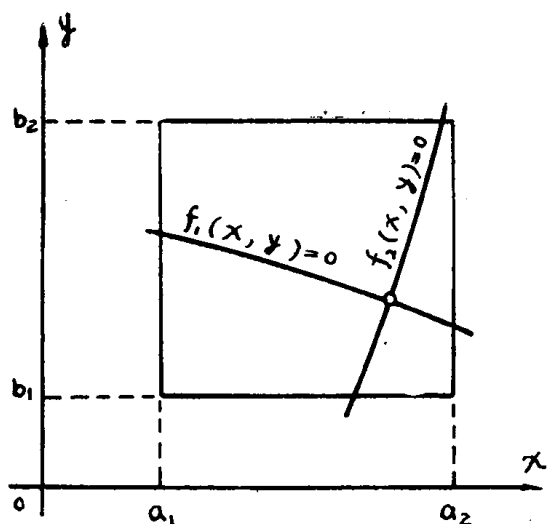


图 7

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

$f_1(x, y) = 0$ 及 $f_2(x, y) = 0$ 为连续函数, 今存在一平面区域 $[a_1, a_2], [b_1, b_2]$ (图 7), 方程组有唯一解, 且 $f_1(x, y)$ 在 $[a_1, a_2]$ 区间内对应于任一 x 值均有零解; $f_2(x, y)$ 在 $[b_1, b_2]$ 区间内对应于任一 y 值均有零解, 则可按下面方法求解:

首先取适当增量 dx_0, dy_0 , 今定为正数。在平面域内取一点 (x_0, y_0) 可计算

$$\begin{cases} \Phi_0 = f_1(x_0, y_0) \\ \psi_0 = f_2(x_0, y_0) \end{cases}$$

若 $|\Phi_0| \leq \varepsilon_1$ 及 $|\psi_0| \leq \varepsilon_2$ 则 x_0, y_0 为方程组的解, 其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 为予先选定的足够小的实数, 今取正数。

若 $|\Phi_0| > \varepsilon_1$ 或 $|\psi_0| > \varepsilon_2$

令

$$x_1 = x_0 + dx_0$$

$$y_1 = y_0 + dy_0$$

计算得

$$\begin{cases} \Phi_1 = f_1(x_1, y_1) \\ \psi_1 = f_2(x_1, y_1) \end{cases}$$

若 Φ_1 与 Φ_0 异号

$$\text{令 } dx_1 = -\frac{1}{2}dx_0$$

ψ_1 与 ψ_0 异号

$$\text{令 } dy_1 = -\frac{1}{2}dy_0$$

否则, 若 $|\Phi_1| > |\Phi_0|$

$$\text{令 } dx_1 = -dx_0$$

$$|\Phi_1| \leq |\Phi_0|$$

$$\text{令 } dx_1 = dx_0$$

若 $|\psi_1| > |\psi_0|$

$$\text{令 } dy_1 = -dy_0$$

$$|\psi_1| \leq |\psi_0|$$

$$\text{令 } dy_1 = dy_0$$

令

$$x_2 = x_1 + dx_1$$

$$y_2 = y_1 + dy_1$$

代入方程组计算, 依此类推, 计算得

$$\begin{cases} \Phi_i = f_1(x_i, y_i) \\ \psi_i = f_2(x_i, y_i) \end{cases}$$

若 Φ_i 与 Φ_{i-1} 异号

$$\text{令 } dx_i = -\frac{dx_{i-1}}{2}$$

Φ_i 与 Φ_{i-1} 同号

$$\text{令 } dx_i = dx_{i-1}$$

若 ψ_i 与 ψ_{i-1} 异号

$$\text{令 } dy_i = -\frac{dy_{i-1}}{2}$$

ψ_i 与 ψ_{i-1} 同号

$$\text{令 } dy_i = dy_{i-1}$$

再代入方程组计算, 及至某一次, 得

$$|\Phi_n| \leq \varepsilon_1 \quad \text{及} \quad |\psi_n| \leq \varepsilon_2$$

则 x_n, y_n 为方程组的解

2. 少齿差传动最佳点的计算方法

应用上述平面问题的二分法, 可以直接求解渐开线少齿差传动的最佳点参数, 首先应建立联立方程组

$$\begin{cases} G_s = f(\xi_1, \xi_2) = 0 \\ E = f(\xi_1, \xi_2) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

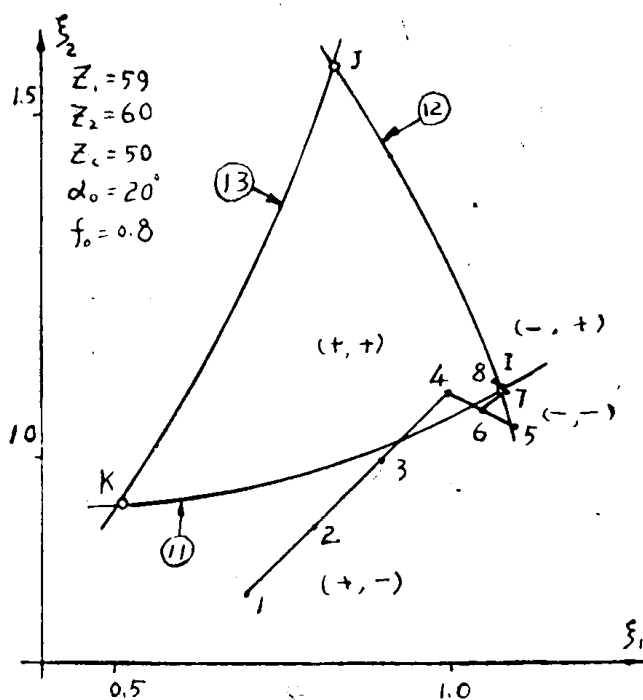


图 8

这里需要说明, 由于渐开线少齿差传动计算公式比较复杂, 我们不是把一组 (ξ_1, ξ_2) 直接代入式 (9) 中计算, 而是按表 2 所列公式, 逐式计算, 最后才能得出 G_s 及 E 值。

图 8 表示上述计算方法的逼近过程, 由图可以看出, $G_s = 0$ 及 $E = 0$ 两曲线将平面域分成四个象限, 其 (E, G_s) 值的符号为

I	II	III	IV
(-, +)	(+, +)	(+, -)	(-, -)

我们的任务是最后求得 II 象限内一个足够靠近最佳点 I 的点作为其解, 至于这个解的精确程度可以由计算者根据实际需要任意选定, 本方法可以得到任意精确程度的解。附录中所列计算结果的精确范围为

$$0 \leq G_s \leq 2 \times 10^{-4} \quad 0 \leq E \leq 2 \times 10^{-4}$$

对于工程应用来说, 这个精度已经是非常高的了, 作为研究工作也已足够, 当然, 如有必要, 精度仍可提高。

我们将上述计算方法编成电算程序, 列于附录 1, 本程序按 ALGOL—60 语言编制, 适用于 TQ—16 及 709 机。

本程序可适用于任意齿差数 Z_p ; 任意原始齿形角 α_0 ; 任意齿顶高系数 f_0 ; 任意齿轮齿数 Z_1 及 Z_2 ; 任意插齿刀齿数 Z_c ; 任意标准径向间隙系数 C_0 ; 并且外齿轮可分别插制或滚制两种情况; 任意精确程度; 对于齿廓重迭干涉验标系数 G_s 及重迭系数 ε 要求值亦可以任意选取, 本文附录中所列计算结果选取 $G_s = 0$, $\varepsilon = 1$ 。本程序还可以适应单组参数计算或多组参数计算。对于进行各参数的选择比较的研究工作及编制系列表格, 后者是很必要的。

综上所述, 逐步逼近法的特点在于:

(a) 逐步逼近法可以直接求解最佳点参数, 这是到目前为止其它计算方法所没有能够解决的问题。

(b) 逐步逼近法所求得的结果精确度高, 可以满足设计、生产和科研工作中所提出的要求, 所得结果表明, 啮合角数值比其他方法所得为低。

(c) 逐步逼近法计算结果的精确度只与所选定的 ε_1 及 ε_2 有关, 与计算过程中的确定值无关, 不必象绘制封闭图那样需要准确地算出曲线上的点, 而只要判断 G_s 及 E 的正负值即可, 所以计算速度快。

(d) 逐步逼近法既适用于手标, 更适用于电算, 这就从根本上保证了计算的快速和准确, 为解决设计、生产和科研工作中的大量系列运算提供了可靠的方法。

(e) 逐步逼近法计算程序具有广泛的适应性, 除前述对各种参数的计算均适应外, 还可同时进行各种限制条件的验算, 如本程序对表 2 所列几种限制条件都进行了验算, 因而所得结果可以直接应用。本程序同时输出 $Z_1, Z_2, \xi_1, \xi_2, R'_{s1}, R'_{s2}, n_1, L'_1, k_2, L'_2, d_r, M', \sin d_r, \alpha$ 及 A' 共 15 组参数, 可以代替几乎全部几何计算工作量。

四、参数的影响和选择

1、齿差数 Z_p 和啮合齿轮齿数的选择

由公式(1)及(2)可知; 少齿差传动的传动比 i 是由齿差数 Z_p 和内、外齿轮齿数所决定的。当传动比 i 大时, 应选用较小的 Z_p ; i 小时, 可选用较大的 Z_p 。而齿数 Z_1 及 Z_2 也

不宜过大,对于动力传动, Z_{max} 可选用 80~100,过大的齿数反而可能招致机构尺寸的扩大,因而传动比 i 可大致推荐如下范围。如果是传递运动为主的大传动比减速机构可不受此限

传动比 i 的推荐数值

表 3

Z_p	1	2	3~4
i	<80~100	<40~50	10~35

如果机构总传动比 i 超过 100,建议改一级一齿差传动为二级二~四齿差传动(图 9),这样不仅可以使机构更为紧凑,而且也可以降低啮合角数值,并且不必另用输出机构。

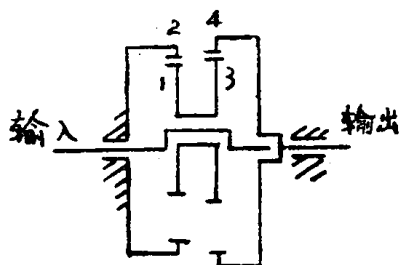


图 9

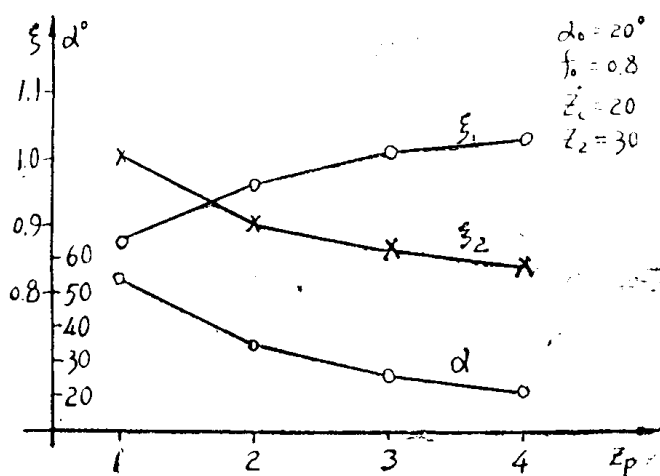


图 10

图 10 给出 $\alpha_0 = 20^\circ$, $f_0 = 0.8$, $Z_c = 20$, $Z_2 = 30$ 时 1~4 齿差的不同变位系数及啮合角数值。一般情况下,当改一齿差为二齿差时,啮合角可由 $52^\circ \sim 54^\circ$ 降到 $34^\circ \sim 36^\circ$,所以在传动比很大时,我们并不觉得应该特别推荐采用一齿差传动。

2. 齿顶高系数的影响和选择

由前述可知,为了避免齿廓重迭干涉,应采用较小的齿顶高系数 f_0 ,一般文献推荐 $f_0 = 0.6 \sim 0.8$,而从实际应用情况来看,大多数用 $f_0 = 0.8$,我们对齿顶高系数的影响作了较为全面的系统计算,图 11 表示一组一齿差传动在 $f_0 = 0.6 \sim 0.8$ 时,最佳点变位系数和啮合角的变化情况,图 12 表示当 $f_0 = 0.6 \sim 1.0$ 时 1~4 齿差的啮合角变化情况,由图可知,随着 f_0 的增加,啮合角 α 值也增加,对于一、二齿差, α 值本身就已嫌过大,所以宜采用较小的 f_0 数值;而对于三、四齿差,则可采用较大的 f_0 数值,这样可以减少刀具刃磨工作量。所以我们推荐对于一、二齿差, $f_0 = 0.6 \sim 0.8$; 对于三、四齿差, $f_0 = 0.8 \sim 1.0$ (二齿差也可用此范围),这里要特别提一下,如果选 $f_0 = 1.0$,则可以应用不加修磨的标准插齿刀进行加工。这时的啮合角数值,对于 $Z_p = 4$, $\alpha = 21^\circ \sim 23^\circ$, $Z_p = 3$,

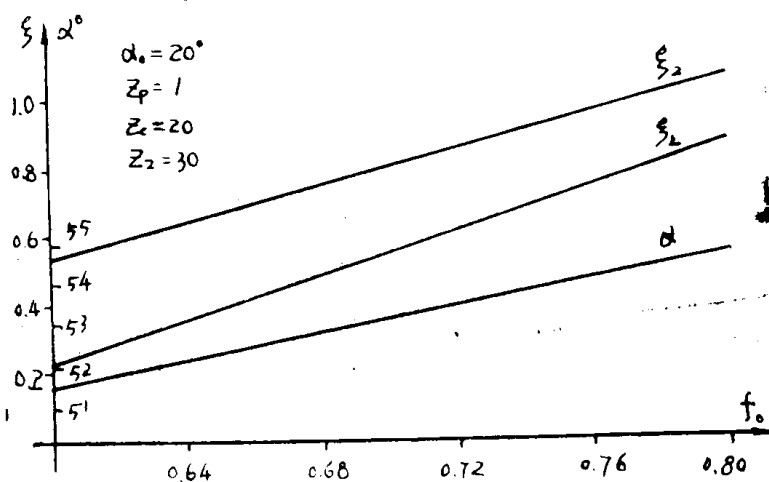


图11

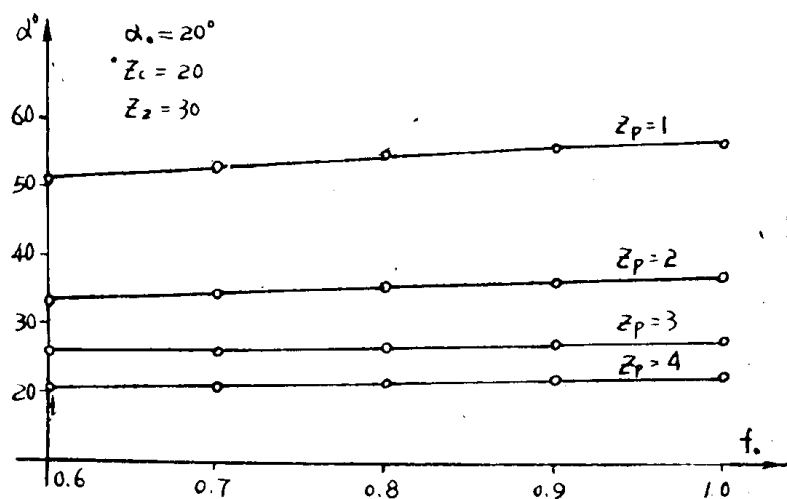


图12

$\alpha = 26^\circ \sim 29^\circ$; $Z_p = 2$, $\alpha = 35^\circ \sim 37^\circ$; $Z_p = 1$, $\alpha = 52 \sim 57^\circ$ 。可见对于 $Z_p = 2 \sim 4$ ，啮合角数值还不至于很大，特别是三，四齿差，完全可以应用，从图 11 还可看出， $f_0 - \alpha$ 接近线性关系，因此对于附录中未载入 f_0 数值，可用插值法求得。

3. 插齿刀齿数的选择

当 Z_1 、 Z_2 选定后，原则上可允许采用不同齿数的插齿刀进行加工，由图 13 所示的 $\alpha - Z_c$ 曲线可知，插齿刀齿数 Z_c 愈是接近被加工齿轮齿数，啮合角数值愈小，但其差值过小会引起加工内齿轮的让刀干涉，附录中所列计算取最小差值 $(Z_2 - Z_c)_{min} = 10$ 。一般说来， Z_c 不要取得过小，但是如果加工条件所限，稍小些也无妨。图 14 表明，固定 Z_c 增加 Z_2 ，起初啮合角上升较快，到后来变化就不大了。

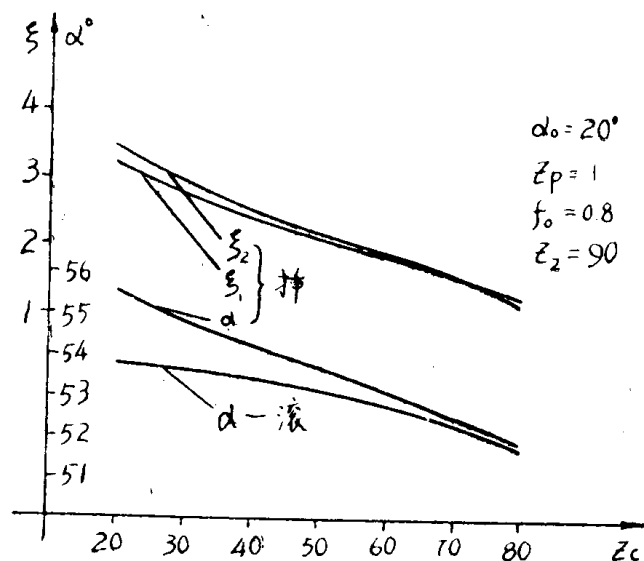


图13

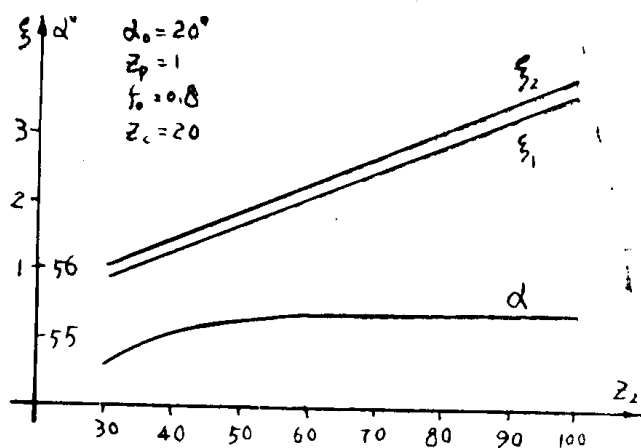


图14

这里附带提出两个问题:

(a) 在一些文献中, 因为选用其它近似计算方法, 常要先选取啮合角 α , 一般推荐的 α 数值都偏大, 根据我们的计算结果表明, 如果参数选择合适, α 值可选得更低些, 表 4 列出一般文献中推荐的 α 值和根据本方法计算出来的最佳点的啮合角 α 的比较。

一般推荐与计算结果 α 值比较 ($\alpha_0 = 20^\circ$; $f_0 = 0.8$) 表 4

Z_p	1	2	3	4
一般文献推荐范围	$54^\circ \sim 56^\circ$	$38^\circ \sim 40^\circ$	$29^\circ \sim 31^\circ$	$26^\circ \sim 28^\circ$
本方法计算结果范围	$52 \sim 54^\circ$	$34 \sim 36^\circ$	$26^\circ \sim 28^\circ$	$20^\circ \sim 22^\circ$