

教育部高等学校  
一九七八年計算結構力学  
学术交流会议论文集

第二集

大 连

一九七八年十一月

# 目 录

|                                              |                                         |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 开洞剪力墙的差分方程解法                                 | 清华大学 古国纪                                |
| 有抗震墙的多层刚架在地震作用下的计算                           | 清华大学建工系高层建筑计算组                          |
| 节理岩体内地下工程围岩应力有限元非线性分析                        |                                         |
|                                              | 清华大学 张万琪, 崔景浩 商业部设计院 施祥善                |
| 柴油机活塞顶部温度场及应力场的有限元法计算                        |                                         |
|                                              | 西安交通大学 叶维平 何新楷, 郭干慈, 童云生                |
| 孔底应变测量法中应力系数矩阵的确定                            |                                         |
| ——有限单元法在轴对称结构分析中的应用                          | 兰州大学 顾淑贤, 王甲英                           |
| 铁路棚洞结构的优化设计                                  | 兰州大学 俞焕然, 唐燮黎                           |
| 变厚度矩形板的稳定与振动                                 | 华中工学院 黄玉盈                               |
| 一维凸函数优化的一个快速的新算法                             | 华中工学院 云天銓                               |
| 离散变量结构的最优设计                                  | 华中工学院 张维衡                               |
| 有限单元法对墙梁分析                                   | 华南工学院 罗崧发 蒋发祥, 黄澄宇                      |
| 刚性道面的计算                                      | 中山大学 陈树坚                                |
| 有限元法在轧钢机一些构件计算中的应用                           | 中山大学 陈树坚                                |
| 桨叶的耦合振动                                      | 中山大学 蔡承武 陈树辉                            |
| 用有限单元法计算三维弹性体应力时对小于 $90^\circ$ 的任意对称面边界条件的处理 |                                         |
|                                              | 重庆大学 刘崇德、李代高, 代维城                       |
| 对 $WN S4-8-1$ 型 燃气自动化工业用锅炉有限元应力分析的初步探讨       |                                         |
|                                              | 重庆锅炉厂 李长春 重庆大学 陈泽光、伊享云、刘相臣、江秉琛, 高芝暉 范镜泓 |
| 关于满应力设计的原理分析和静定、静不定结构的重量特性计算                 | 西北工业大学 冯元生                              |
| 大型天线结构的保型优化设计                                |                                         |
|                                              | 上海科学技术大学 王生洪、李志良、汪勤恣、李康元、陈振华            |
| 一个大型通用程序的设计                                  |                                         |
| ——介绍平面杆系结构通用计算程序第四版                          |                                         |
|                                              | 北京工业大学土建系计算结构力学教研组 袁耀明、陶振宗              |
| 组合结构通用程序——JJZ3                               | 北京工业大学土建系计算结构力学教研组 赵超燮 陶振宗              |
| 剪力墙结构的动力有限元分析 (弹性力学平面动力问题)                   |                                         |
|                                              | 北京工业大学土建系计算结构力学教研组 冯福瑞                  |
| 横向铰结的四边形板弯曲单元                                | 北京工业大学土建系道桥教研室 席振坤                      |
| T 型梁桥的有限元法分析                                 |                                         |
|                                              | 北京工业大学土建系 郭文渝, 赵超燮 河北省交通规划设计院 肖江声       |
| 用完全协调三角元分析简支斜板桥                              |                                         |
|                                              | 北京工业大学土建系 高征銓 赵超燮 中国科学院计算中心 崔俊芝         |

|                                                |              |                    |
|------------------------------------------------|--------------|--------------------|
| 谈计算结构力学·····                                   | 大连工学院工程力学研究所 | 钱令希                |
| 利用动态规划计算公路桥梁断面的最大内力·····                       | 大连工学院工程力学研究所 | 钟万勰                |
| 线性规划在结构优化设计的一个应用及其稀疏算法·····                    | 大连工学院工程力学研究所 | 程耿东                |
| 振动力学特征值问题的研究及其在构架式基础动力计算中的应用·····              | 大连工学院工程力学研究所 | 钟万勰, 林家浩, 程耿东, 田玉山 |
| 群论在结构分析中的应用(续一)——在 $C_{nv}$ 群上对称的壳体结构分析——····· | 大连工学院工程力学研究所 | 钟万勰, 裘春航           |
| 空腹桁架桥的结构分析(一)——空间作用——·····                     | 大连工学院工程力学研究所 | 曹富新, 解明雨, 邹洪地      |
| 空腹桁架桥的结构分析(二)——内力包络图——·····                    | 大连工学院工程力学研究所 | 时战, 张允真            |
| 空腹桁架桥的结构分析(三)——节点应力分析——·····                   | 大连工学院工程力学研究所 | 解明雨, 张允真, 邹洪地      |
| 使应力具有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 阶奇异等参元素的充要条件·····     | 大连工学院数学教研室   | 劳洁声, 刘秀兰           |
| 带有离散支承的旋转体计算·····                              | 大连工学院        | 何穷, 朱学仁            |

52 54

19

# 开洞剪力墙的差分方程解法

清华大学 古国纪

## 摘 要

开洞剪力墙的分析,目前比较流行的方法是將柱列之间的横梁,用连续的剪切夹层代替,导出微分方程求出解析解。这个方法比较简洁,很受欢迎。这个方法的前提是横梁刚度要比柱刚度小许多,并且横梁沿高度的分布要较密,即整个高度上层数较多。如果不符合这些要求,那么这个方法的可靠性和精确性是值得探讨的。

本文不用连续剪切夹层代替横梁,仍将开洞剪力墙看成是桿件构成的刚架,导出差分方程,求出解析解。当层数很大,层高和总高比趋于零时,这个解就和剪数夹层解一致。利用这个解析解可以讨论开洞剪力墙的一些内力分布的规律,并检验连续剪切夹层法的误差。

## 一、基本方程

设剪力墙简化成如图1所示的刚架,由于柱较宽,因此横梁两端有一段是刚性域。设柱和梁的截面沿整个结构高度上的各层是不变的。采用以下记号(参看图1)。

$x$ ——层号,由顶层到底层  $x=1, 2, \dots, n$ 。

$y$ ——跨号,由左端到右端各跨  $y=1, 2, \dots, n_1$ 。

柱号,由左端到右端各柱  $y=1, 2, \dots, n_1+1$ 。

$J_{ly}$ ——第  $y$  跨梁的截面惯性矩。

$F_{ly}$ ——第  $y$  跨梁的截面面积。

$J_y$ ——第  $y$  列柱的截面惯性矩。

$F_y$ ——第  $y$  列柱的截面面积。

$2a_y$ ——第  $y$  跨梁的净跨(或除去刚性域外的跨度)

$2C_y$ ——第  $y$  跨梁的总跨度(柱的中心距)

$h$ ——层高

$H$ ——总高度

$n$ ——总层数

$n_1$ ——总跨数

$C_{ly}, C_{ry}$ ——分别为第  $y$  跨梁在净跨中点到左端结点的距离和净跨中点到右端结点距离。

$E$ ——弹性模量

$E_x, E_y$ ——算符, 对某  $x, y$  的函数  $f(x, y)$  的作用 ( $x$  和  $y$  均为整数) 是

$$E_x f(x, y) = f(x+1, y)$$

$$E_x^{-1} f(x, y) = f(x-1, y)$$

$$E_y f(x, y) = f(x, y+1)$$

$$E_y^{-1} f(x, y) = f(x, y-1)$$

$k$ ——计算杆件剪变形的截面形状系数。

我们用力法求解, 计算中考虑了横梁的剪切变形、柱的轴向变形和剪变形, 不考虑横梁的轴向变形。

易知, 这样的体系, 每个格间将有三个多余未知力, 但我们不选择一个统一的静定基本结构。为了使力法方程简化, 我们选择不同的静定基本结构, 使每一个单位未知力的内力分布图都具有局部的性质, 并尽可能彼此正交。为此, 对任一格间  $(x, y)$  (这里  $x$  为层码,  $y$  为跨号), 选择三个单位未知力的内力如图 2 所示, 其中图 2(a) 表示第一

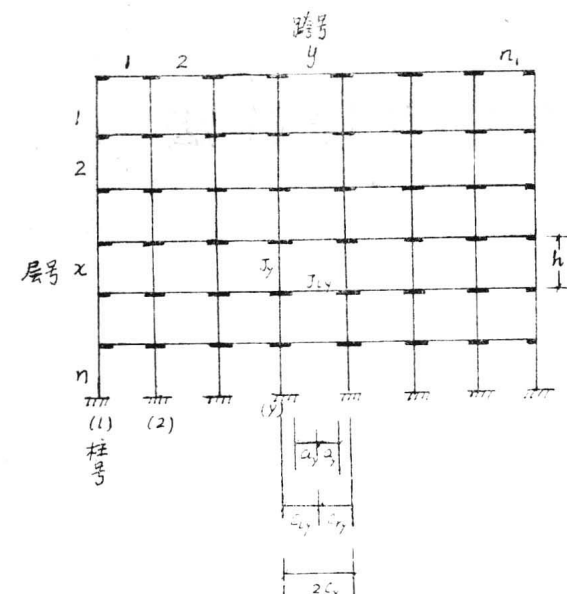


图 1

种未知力  $X_1(x, y) = 1$  相应的弯矩图, 这个弯矩图只在格间  $(x, y)$  范围内存在, 其他地方为零, 其中  $\psi_y$  是一个待定的数。和这个图相应的其他内力是: 上侧横梁有剪力  $Q_1 = +1$ , 下侧横梁  $Q_1 = -1$ , 左侧  $y$  柱有轴力  $N_1 = -1$ , 右侧  $y+1$  柱有轴力  $N_1 = +1$ 。图 2(b) 表示第二种未知力  $X_2(x, y)$ , 相应的弯矩图, 它没有相应的剪力和轴力分布。图 2(c) 表示第三种未知力  $X_3(x, y)$  相应的弯矩图, 和它相应的柱的剪力是左柱  $y$ :  $Q_3 = +2$ , 右柱  $y+1$  剪力  $Q_3 = -2$ 。对每一个  $(x, y)$  格间都可以选择这样三个未知力和它们的单位内力图。对于通过  $(x, y)$  格间中心点的水平线说来图 2(a)、(b) 的内力是上下对称的, 有内力地区的结构也是对称的, 而图 2(c) 内力则是上下反对称的, 因此, 求力法方程系数时, 图 2(a)、(b) 将和图 2(c) 正交。适当选择  $\psi_y$ , 则能使图 2(a) 和图 2(b) 也正交。这样则每一个格间三种内力图之间都是互相正交。

关于荷载作用下的静定基本结构内力图, 作法如下。首先, 由于不考虑横梁轴向变形,

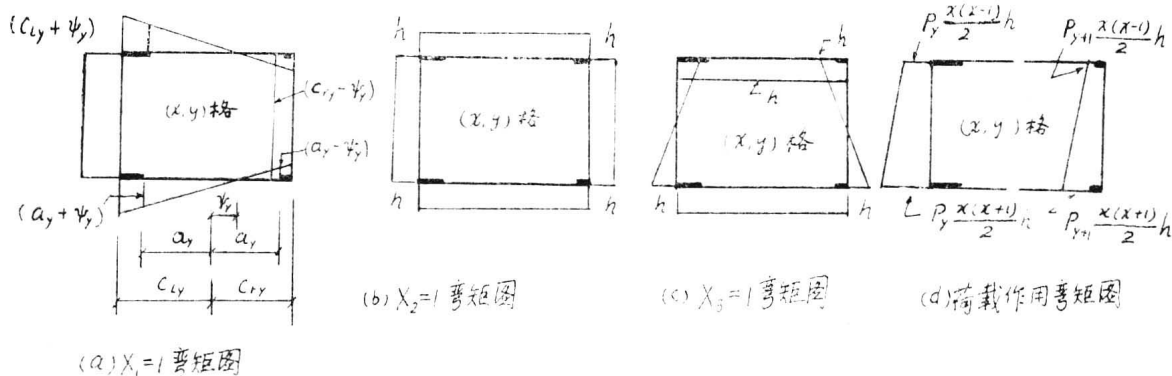


图 2

同一层内的水平荷载可以任意水平移动而不会改变其内力分布图(横梁轴力除外)。因此,可以将同一层内(例如 $x$ 层)水平荷载的总值 $P(x)$ 按各柱的惯性矩 $J_y$ 分配到各柱结点上,因此第 $y$ 列柱 $x$ 层的结点上荷载:

$$P_y(x) = \frac{J_y}{\sum_y J_y} \cdot P(x)$$

然后,将所有横梁截断,作为基本结构,再求上述荷载作用下的内力图。图2(d)表示各层荷载相同时,即 $P_y(x) = P_y$ 时 $y$ 柱 $x$ 层的弯矩图,相应的剪力值为 $Q_p = +P_y x$ ,横梁上没有内力分布。

考虑 $(x, y)$ 格间三个未知力 $X_1, X_2, X_3$ 所对应的三个广义位移为零,可得原体系的力法方程,其形式如下:

$$\begin{aligned} [\delta] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + [\delta^{+\bullet}] E_x \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + [\delta^{-\bullet}] E_{\bullet}^{-1} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + [\delta^{+y}] E_y \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \\ + [\delta^{-y}] E_y^{-1} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \Delta_{3P} \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

这里 $[\delta], [\delta^{+\bullet}], \dots, [\delta^{-y}]$ 都是 $3 \times 3$ 的矩阵,并且应当是 $y$ 的函数。 $(\delta^{+\bullet})$ 中右上角不是幂次而是记号。 $[\delta]$ 是格间 $(x, y)$ 内三个单位未知力引起的本格间的位移。 $[\delta^{+\bullet}]$ 是下一层的格间,即 $(x+1, y)$ 格间的三个单位未知力引起的 $(x, y)$ 格间位移。 $[\delta^{-\bullet}]$ 是上一层格间单位未知力引起的本格间位移,而 $[\delta^{+y}]$ 、 $[\delta^{-y}]$ 则分别为右侧和左侧格间单位未知力引起的位移。 $\begin{Bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \Delta_{3P} \end{Bmatrix}$ 则是荷载引起的基本体系位移。上式表明 $(x, y)$ 格间的位移是由该格间及四周

相邻格间未知力以及荷载引起的。

$[\delta]$ 的元素可由图2中(a)、(b)、(c)三图相乘而得,如前所述,由于对称性:

$$\delta_{13} = \delta_{23} = 0$$

选择 $\phi$ ,使 $\delta_{12} = 0$ ,办法如下:由图2中(a)、(b)图相乘得:

$$\delta_{12} = \frac{h^2(C_{Ly} + \phi_y)}{EJ_y} - \frac{h^2(C_{ry} - \phi_y)}{EJ_{y+1}} + \frac{2a_y h \phi_y}{EJ_{ly}} \cdot 2 = 0$$

由此解出:

$$\frac{\phi_y}{h} = \frac{\frac{C_{ry}}{h} \frac{J_y}{J_{y+1}} - \frac{C_{Ly}}{h}}{\left[ 1 + \frac{J_y}{J_{y+1}} + 2 \left( \frac{2a_y J_y}{h J_{ly}} \right) \right]} \quad (2)$$

当选择 $\phi_y$ 满足上式(2)时,即有 $\delta_{12} = 0$ 。

$[\delta]$ 的其他元素如下:

$$\begin{aligned} \delta_{11} = & \frac{(C_{Ly} + \phi_y)^2 h}{EJ_y} + \frac{(C_{ry} - \phi_y)^2 h}{EJ_{y+1}} + \frac{2}{3} \frac{(a_y + \phi_y)^3}{EJ_{ly}} + \frac{2}{3} \frac{(a_y - \phi_y)^3}{EJ_{ly}} \\ & + \frac{h}{EF_y} + \frac{h}{EF_{y+1}} + \frac{k \cdot A a}{GF_{ly}} = \alpha_1 \beta \frac{h^3}{EJ_y} \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}\delta_{33} &= \alpha_3 \beta \frac{h^3}{E J_y}, \quad \delta_{22} = \alpha_2 \beta \frac{h^3}{E J_y} \\ \beta &= \frac{2a_y J_y}{h J_{Ly}} \\ \alpha_1 &= \frac{1}{\beta} \left[ \left( \frac{C_{Ly}}{h} + \frac{\phi_y}{h} \right)^2 + \left( \frac{C_{ry}}{h} - \frac{\phi_y}{h} \right)^2 \frac{J_y}{J_{y+1}} + \frac{J_y}{F_y h^2} \left( 1 + \frac{F_y}{F_{y+1}} \right) \right] + 2\beta_1 \\ \alpha_2 &= \left( 1 + \frac{J_y}{J_{y+1}} \right) \frac{1}{\beta} + 2 \\ \alpha_3 &= \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{J_y}{J_{y+1}} \right) \frac{1}{\beta} + 2 + 4 \frac{kE}{G} \cdot \frac{J_y}{F_y h^2} \cdot \left( 1 + \frac{F_y}{F_{y+1}} \right) \frac{1}{\beta} \\ \beta_1 &= \frac{1}{6} \frac{a_y^2}{h^2} \left[ \left( 1 + \frac{\phi_y}{a_y} \right)^2 + \left( 1 - \frac{\phi_y}{a_y} \right)^2 \right] + \frac{kE}{G} \cdot \frac{J_{Ly}}{F_y h^2}\end{aligned} \quad (3)$$

注意以上各量一般情形下均随 $y$ 而变。

因而 $[\delta]$ 为:

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{bmatrix} \beta \frac{h^3}{E J_y} = [\alpha] \beta \frac{h^3}{E J_y} \quad (4)$$

由 $(x, y)$ 格间的单位内力图与下上、右左相邻格间之内力图相乘可依次得出式(1)中其他四个矩阵如下:

$$\begin{aligned}[\delta^{-x}] &= \begin{array}{ccc|ccc} & -\beta_1 & -\frac{\phi_y}{h} & \cdots & \frac{\phi_y}{h} & \\ & -\frac{\phi_y}{h} & -1 & \cdots & +1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & -\frac{\phi_y}{h} & -1 & \cdots & +1 & \\ & -\beta_1 & -\frac{\phi_y}{h} & \cdots & \frac{\phi_y}{h} & \\ & -\frac{\phi_y}{h} & -1 & \cdots & -1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \frac{\phi_y}{h} & 1 & \cdots & +1 & \end{array} \quad \beta \frac{h^3}{E J_y} = [\beta^+] \beta \frac{h^3}{E J_y} \\ [\delta^{-y}] &= \begin{array}{ccc|ccc} & \gamma_{11}^+ & \gamma_{12}^+ & \cdots & 0 & \\ & \gamma_{21}^+ & \gamma_{22}^+ & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{33}^- & \\ & \gamma_{11}^- & \gamma_{12}^- & \cdots & 0 & \\ & \gamma_{21}^- & \gamma_{22}^- & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{33}^+ & \end{array} \quad \frac{h^3}{E J_y} \\ [\delta^{+x}] &= \begin{array}{ccc|ccc} & \gamma_{11}^+ & \gamma_{12}^+ & \cdots & 0 & \\ & \gamma_{21}^+ & \gamma_{22}^+ & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{33}^- & \\ & \gamma_{11}^- & \gamma_{12}^- & \cdots & 0 & \\ & \gamma_{21}^- & \gamma_{22}^- & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{33}^+ & \end{array} \quad \frac{h^3}{E J_y} \\ [\delta^{+y}] &= \begin{array}{ccc|ccc} & \gamma_{11}^+ & \gamma_{12}^+ & \cdots & 0 & \\ & \gamma_{21}^+ & \gamma_{22}^+ & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{33}^- & \\ & \gamma_{11}^- & \gamma_{12}^- & \cdots & 0 & \\ & \gamma_{21}^- & \gamma_{22}^- & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{33}^+ & \end{array} \quad \frac{h^3}{E J_y}\end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11} &= \left( \frac{C_{ry}}{h} - \frac{\phi_y}{h} \right) \left( \frac{C_{ly+1}}{h} + \frac{\phi_{y+1}}{h} \right) \frac{J_y}{J_{y+1}} \\
 \gamma_{12} &= \left( \frac{C_{ry}}{h} - \frac{\phi_y}{h} \right) \frac{J_y}{J_{y+1}} \\
 \gamma_{21} &= - \left( \frac{C_{ly+1}}{h} + \frac{\phi_{y+1}}{h} \right) \frac{J_y}{J_{y+1}} \\
 \gamma_{22} &= - \frac{J_y}{J_{y+1}} \\
 \gamma_{33} &= - \frac{1}{3} \frac{J_y}{J_{y+1}} \\
 \gamma_{11} &= \left( \frac{C_{ly}}{h} + \frac{\phi_y}{h} \right) \left( \frac{C_{ry-1}}{h} - \frac{\phi_{y-1}}{h} \right) \\
 \gamma_{12} &= - \left( \frac{C_{ly}}{h} + \frac{\phi_y}{h} \right) \\
 \gamma_{21} &= \left( \frac{C_{ry-1}}{h} - \frac{\phi_{y-1}}{h} \right) \\
 \gamma_{22} &= -1 \\
 \gamma_{33} &= - \frac{1}{3}
 \end{aligned} \tag{6}$$

设各层荷载均相等, 第 \$y\$ 个柱子上结点荷为 \$P\_y\$ 则荷载引起的位移为:

$$\Delta_{1P} = (C_{ly} + \phi_y) h^2 \cdot \frac{P_y}{2} x^2 \cdot \frac{1}{E J_y} + (C_{ry} - \phi_y) h^2 \frac{P_{y+1}}{2} x^2 \cdot \frac{1}{E J_{y+1}}$$

注意前述规定: 同层荷载按各柱 \$J\$ 之比分布于结点, 故

$$\frac{P_y}{J_y} = \frac{P}{\sum_y J_y}$$

上式可化为

$$\begin{aligned}
 \Delta_{1P} &= \frac{h^2 P x^2}{2 E \sum_y J_y} [(C_{ly} + \phi_y) + (C_{ry} - \phi_y)] = \frac{h^2 P x^2}{E \sum_y J_y} C_y = \\
 &= \left( \frac{J_y}{\sum_y J_y} \cdot \frac{C}{h} \cdot \frac{P}{\beta} x^2 \right) \cdot \beta \frac{h^3}{E J_y} = \delta_{1P} \cdot \beta \frac{h^3}{E J_y}
 \end{aligned}$$

类似地求出:

$$\Delta_{2P} = 0$$

$$\Delta_{3P} = \left\{ \frac{2 k E}{G} \left( - \frac{J_y}{\sum_y J_y} \right) \left( \frac{J_y}{F_y h^2} - \frac{J_{y+1}}{F_{y+1} h^2} \right) \frac{P}{\beta} x \right\} \cdot \beta \frac{h^3}{E J_y} = \delta_{3P} \cdot \beta \frac{h^3}{E J_y} \tag{8}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \Delta_{3P} \end{array} \right\} = \frac{J_y}{\sum_y J_y} \frac{C_y}{h} \frac{1}{\beta} P x^2 \quad \beta \frac{h^3}{E J_y} = \left\{ \begin{array}{l} \delta_{1P} \\ \delta_{2P} \\ \delta_{3P} \end{array} \right\} \beta \frac{h^3}{E J_y} \tag{9}$$

$$\frac{2 k E}{G} \frac{J_y}{\sum_y J_y} \left( \frac{J_y}{F_y h^2} - \frac{J_{y+1}}{F_{y+1} h^2} \right) \frac{1}{\beta} P x$$

方程 (1) 即有若干列孔洞的剪力墙的基本方程, 其中系数和自由项矩阵如 (5)、(9) 所示。下面将分别就不同情况讨论问题的解法。

## 二、有单列孔洞的剪力墙

考虑有单列孔洞的 (即单跨、双肢的)  $n$  层高的剪力墙, 基本方程 (1) 中左右邻孔洞的未知力项不出现, 简化成:

$$[\delta]\{X\} + [\delta^{+x}]E_x\{X\} + [\delta^{-x}]E_x^{-1}\{X\} + \{\Delta_p\} = 0$$

其中:

$$[X] \equiv \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta_p\} \equiv \begin{Bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

上式除以因数  $\beta \frac{h^3}{EJ_1}$ , (注意, 在单列孔场合, 跨号  $y$  只取 1 因此  $\beta = \frac{2a_1J_1}{hJ_{11}}$ ,  $\{X\}$  只是层号  $x$  的函数), 得到:

$$[\alpha]\{X\} + [\beta^+]E_x\{X\} + [\beta^-]E_x^{-1}\{X\} + \{\delta_p\} = 0 \quad (11)$$

其中  $[\alpha]$ ,  $[\beta^+]$ ,  $[\beta^-]$  如 (4)、(5) 式所示, 即 ( $y=1$ )

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad [\beta^+] = \begin{array}{ccc|ccc} -\beta_1 & -\frac{\phi_1}{h} & & & & \\ & \frac{\phi_1}{h} & -1 & & & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & -\frac{\phi_1}{h} & -1 & & & 1 \end{array},$$

$$[\beta^-] = \begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ -\beta_1 & -\frac{\phi_1}{h} & & & -\frac{\phi_1}{h} & \\ & \frac{\phi_1}{h} & -1 & & -1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & -\frac{\phi_1}{h} & -1 & & -1 & \\ & & & & & \\ & \frac{\phi_1}{h} & 1 & & 1 & \end{array} \quad (11.a)$$

$\{\delta_p\}$  由 (9) 式得出如下:

$$\{\delta_p\} = \begin{Bmatrix} \delta_{1p} \\ \delta_{2p} \\ \delta_{3p} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{J_1}{\Sigma_y J_y} \frac{C_1}{h} \frac{1}{\beta} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2kE}{G} \frac{J_1}{\Sigma_y J_y} \left( \frac{J_1}{F_1 h^2} - \frac{J_2}{F_2 h^2} \right) \frac{1}{\beta} P \end{bmatrix} x \quad (11.b)$$

上式是就各层结点荷载相等情形而得出的公式。较一般情形可设  $\{\delta_p\}$  包含有  $x^2$ ,  $x^1$ ,  $x^0$  等项, 写成:

$$\{\delta_p\} = \{\delta_p^{(2)}\}x^2 + \{\delta_p^{(1)}\}x + \{\delta_p^{(0)}\} \quad (11.c)$$

下面分两种情形求解 (i) 两肢不等情形, (ii) 两肢相等, 即对称情形。

(i) 两肢不等情形

先求方程 (11) 的特解, 设其中自由项有 (11. c) 的形式, 取解答形式如下:

$$\{X\} = \{C^{(2)}\}x^2 + \{C^{(1)}\}x + \{C^{(0)}\}$$

其中:

$$\{C^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} C_1^{(i)} \\ C_2^{(i)} \\ C_3^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (i=1, 2, 3) \quad (12)$$

待定。

将 (12) 和 (11. c) 代入基本方程 (11), 注意:

$$E_x^{\pm 1}\{X\} = \{C^{(2)}\}(x \pm 1)^2 + \{C^{(1)}\}(x \pm 1) + \{C^{(0)}\} = \{C^{(2)}\}x^2 + (\{C^{(1)}\} \pm 2\{C^{(2)}\})x + (\{C^{(0)}\} \pm \{C^{(1)}\} + \{C^{(2)}\})$$

代入后, 按  $x$  同幂次项归并, 并令各  $x$  幂次项的系数为零, 可得以下各方程:

由  $x^2$  系数得:

$$([\alpha] + [\beta^+] + [\beta^-])\{C^{(2)}\} + \{\delta_p^{(2)}\} = 0 \quad (a)$$

由  $x^1$  系数得:

$$([\alpha] + [\beta^+] + [\beta^-])\{C^{(1)}\} + ([\beta^+] - [\beta^-])2 \cdot \{C^{(2)}\} + \{\delta_p^{(1)}\} = 0 \quad (b)$$

由  $x^0$  系数得:

$$([\alpha] + [\beta^+] + [\beta^-])\{C^{(0)}\} + ([\beta^+] - [\beta^-])\{C^{(1)}\} + ([\beta^+] + [\beta^-]) \cdot \{C^{(2)}\} + \{\delta_p^{(0)}\} = 0 \quad (c)$$

注意

$$[\alpha] + [\beta^+] + [\beta^-] = \begin{bmatrix} \alpha_1 - 2\beta_1 & -2\frac{\phi_1}{h} & 0 \\ -2\frac{\phi_1}{h} & \alpha_2 - 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \alpha_3 + 2 \end{bmatrix}$$

$$[\beta^+] + [\beta^-] = \begin{bmatrix} -2\beta_1 & -2\frac{\phi_1}{h} & 0 \\ -2\frac{\phi_1}{h} & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & +2 \end{bmatrix}$$

$$[\beta^+] - [\beta^-] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\frac{\phi_1}{h} \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline -2\frac{\phi_1}{h} & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

则容易推出方程 (a)、(b)、(c) 都分为两组:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - 2\beta_1 & -2\frac{\psi_1}{h} \\ -2\frac{\psi_1}{h} & \alpha_2 - 2 \end{vmatrix} \left\{ \begin{matrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \delta_{1P}^{(2)} \\ \delta_{2P}^{(2)} \end{matrix} \right\} = 0 \quad (13.a)$$

$$(\alpha_3 + 2)C_3^{(2)} + \delta_{3P}^{(2)} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - 2\beta_1 & -2\frac{\psi_1}{h} \\ -2\frac{\psi_1}{h} & \alpha_2 - 2 \end{vmatrix} \left\{ \begin{matrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 2\frac{\psi_1}{h} \\ 2 \end{matrix} \right\} 2C_3^{(2)} + \left\{ \begin{matrix} \delta_{1P}^{(1)} \\ \delta_{2P}^{(1)} \end{matrix} \right\} = 0 \quad (13.b)$$

$$(\alpha_3 + 2)C_3^{(1)} + \left( -4\frac{\psi_1}{h} C_1^{(2)} - 4C_2^{(2)} + \delta_{3P}^{(1)} \right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - 2\beta_1 & -2\frac{\psi_1}{h} \\ -2\frac{\psi_1}{h} & \alpha_2 - 2 \end{vmatrix} \left\{ \begin{matrix} C_1^{(0)} \\ C_2^{(0)} \end{matrix} \right\} + \frac{2\frac{\psi_1}{h}}{2} C_3^{(1)} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -2\beta_1 & -2\frac{\psi_1}{h} \\ -2\frac{\psi_1}{h} & -2 \end{vmatrix} \left\{ \begin{matrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \delta_{1P}^{(0)} \\ \delta_{2P}^{(0)} \end{matrix} \right\} = 0 \quad (13.c)$$

$$(\alpha_3 + 2)C_3^{(0)} + \left( -2\frac{\psi_1}{h} C_1^{(1)} - 2C_2^{(1)} + 2(C_3^{(2)} + \delta_{3P}^{(0)}) \right) = 0$$

由上述三组式子很容易求出所有  $C$  值。由 (13.a) 求  $C_i^{(2)} (i=1, 2, 3)$ ，由 (13.b) 求  $C_i^{(1)} (i=1, 2, 3)$ ，由 (13.c) 求  $C_i^{(0)} (i=1, 2, 3)$ 。

当各层结点水平荷载相等，每层总值为  $P$  时， $\{\delta_p\}$  如 (11.b) 所示，代入 (13) 诸式，求出的  $C$  值如下：

$$\left\{ \begin{matrix} C_1^{(2)} \\ C_2^{(2)} \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} -P \frac{J_1}{\Sigma_y J_y} & \frac{C_1}{h} (\alpha_2 - 2) \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\Delta} \\ -P \frac{J_1}{\Sigma_y J_y} & \frac{C_1}{h} \left( \frac{2\psi_1}{h} \right) \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\Delta} \end{vmatrix}$$

$$C_3^{(2)} = 0$$

$$\left\{ \begin{matrix} C_1^{(1)} \\ C_2^{(1)} \end{matrix} \right\} = 0$$

$$C_3^{(1)} = \frac{1}{(\alpha_3 + 2)} \left( 4\frac{\psi_1}{h} C_1^{(2)} + 4C_2^{(2)} - \frac{2kE}{G} \frac{J_1}{\Sigma_y J_y} \left( \frac{J_1}{F_1 h^2} - \frac{J_2}{F_2 h^2} \right) \cdot \frac{P}{\beta} \right) \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{matrix} C_1^{(0)} \\ C_2^{(0)} \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta} \left( -f(\alpha_2 - 2) - g \left( 2\frac{\psi_1}{h} \right) \right) \\ \frac{1}{\Delta} \left( -f \left( 2\frac{\psi_1}{h} \right) - g(\alpha_1 - 2\beta_1) \right) \end{vmatrix}$$

$$C_3^{(0)} = 0$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta &\equiv (\alpha_1 - 2\beta_1)(\alpha_2 - 2) - 4\left(\frac{\phi_1}{h}\right) \\ f &\equiv -2\beta_1 C_1^{(2)} - 2\frac{\phi_1}{h} C_2^{(2)} - 2\frac{\phi_1}{h} C_3^{(1)} \\ g &\equiv -2\frac{\phi_1}{h} C_1^{(2)} - 2C_2^{(2)} + 2C_3^{(1)}\end{aligned}$$

非齐次方程 (11) 的特解为:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= C_1^{(2)} X^2 + C_1^{(0)} \\ X_2 &= C_2^{(2)} X^2 + C_2^{(0)} \\ X_3 &= C_3^{(1)} X \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

下面求基本方程 (11) 的齐次方程解, 设齐次方程解为:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} \zeta^x = \{B\} \zeta^x \quad (14)$$

其中  $\zeta$  为常数, 待定,  $\{B\}$  为系数。代入 (11) 的齐次式得

$$[\zeta \alpha^-] + [\beta^+] \zeta + [\beta^-] \zeta^{-1} \{B\} = 0$$

或者写成

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - \beta_1 R) &- \frac{\phi_1}{h} R & \frac{\phi_1}{h} R \\ - \frac{\phi_1}{h} R & & (\alpha_2 - R) & R \\ - \frac{\phi_1}{h} R & - R & & (\alpha_3 + R) \end{aligned} \left\{ \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} \right\} = 0 \quad (16)$$

其中

$$R \equiv \zeta + \zeta^{-1}, \quad R' \equiv \zeta - \zeta^{-1} \quad (16.a)$$

(16) 是三个线性方程联立, 从其中第 1 式减去第 2 式与  $\frac{\phi_1}{h}$  的乘积, 即  $(16.1) - \frac{\phi_1}{h} (16.2)$ , 得:

$$\begin{aligned} &\left( \alpha_1 - \beta_1 R + \left( \frac{\phi_1}{h} \right)^2 R \right) B_1 - \alpha_2 \frac{\phi_1}{h} B_2 = 0 \\ B_2 &= \frac{\alpha_1 - \left( \beta_1 - \frac{\phi_1^2}{h^2} \right) R}{\left( \alpha_2 - \frac{\phi_1}{h} \right)} B_1 \quad (\phi_1 \neq 0) \end{aligned} \quad (17.a)$$

代回 (16.1), (16.3) 得到:

$$\begin{aligned} &\left[ \alpha_1 - \left( \beta_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) R + \frac{1}{\alpha_2} \left( \beta_1 - \frac{\phi_1^2}{h^2} \right) R^2 \right] B_1 + \frac{\phi_1}{h} R B_3 = 0 \\ &\left[ - \left( \frac{\phi_1^2}{h^2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) R + \frac{1}{\alpha_2} \left( \beta_1 - \frac{\phi_1^2}{h^2} \right) R R' \right] B_1 + \frac{\phi_1}{h} (\alpha_3 + R) B_3 = 0 \end{aligned} \quad (17.b)$$

若  $B_1, B_3$  不全为零, 则由上式  $B_1, B_3$  的系数行列式为零, 得到如下的关于  $R$  的方程, 其中利用了恒等关系:  $R'^2 = R^2 - 4$  以消去  $R'$ :

$$a_2 R^2 + a_1 R + a_0 = 0 \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_1 \alpha_3 - 4 \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\phi_1^2}{h^2} \right) \\ a_1 &= -\alpha_3 \left( \beta_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) + \alpha_1 + 4 \frac{1}{\alpha_2} \left( \beta_1 - \frac{\phi_1^2}{h^2} \right) \\ a_2 &= \left( \frac{\alpha_3}{\alpha_2} - 1 \right) \left( \beta_1 - \frac{\phi_1^2}{h^2} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

由 (18) 可求出  $R$  的两个根:

$$R_1 = -\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}}{2 a_2}, \quad R_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}}{2 a_2} \quad (20)$$

代回 (16 a), 可求出四个  $\zeta$  值:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{R_1 \pm \sqrt{R_1^2 - 4}}{2}, \quad \zeta_2 = \zeta_1^{-1} \\ \zeta_3 &= \frac{R_2 \pm \sqrt{R_2^2 - 4}}{2}, \quad \zeta_4 = \zeta_3^{-1} \end{aligned} \quad (21)$$

$\zeta_1$  式中 +、- 号应取其使  $|\zeta_1| \leq 1$  者,  $\zeta_3$  中 +、- 号也应使  $|\zeta_3| \leq 1$ 。

将  $\zeta_j (j=1, 2, \dots, 4)$  代回 (17. a) (17. b) 可求出 4 组  $B_{1j}, B_{2j}, B_{3j}$  的相对值:

$$\begin{aligned} B_{2j} &= \frac{1}{\left( \frac{\phi_1}{h} \alpha_2 \right)} \left[ \alpha_1 - \left( \beta_1 - \frac{\phi_1^2}{h^2} \right) (\zeta_j + \zeta_j^{-1}) \right] B_{1j} \quad (j=1 \dots 4) \\ B_{3j} &= \frac{(-1)}{\left( \frac{\phi_1}{h} \right) (\zeta_j - \zeta_j^{-1})} \left[ \alpha_1 - \left( \beta_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) (\zeta_j + \zeta_j^{-1}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha_2} \left( \beta_1 - \frac{\phi_1^2}{h^2} \right) (\zeta_j + \zeta_j^{-1})^2 \right] B_{1j} \quad (j=1 \dots 4) \end{aligned} \quad (22)$$

可以取  $B_{1j}=1, (j=1 \dots 4)$ , 从而得出  $B_{ij}$  的确定数值, 齐次方程 (11) 的解, 可由 4 个  $\zeta_j (j=1, \dots, 4)$  及相应的  $B_{ij}$ , 按 (d) 式形成 4 个解, 对他们作线性组合并叠加非齐次式特解 (15) 得全解为 (各层结点荷载相同情形):

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{j=1}^4 A_j B_{1j} \zeta_j^x + C_1^{(2)} X^2 + C_1^{(0)} \\ X_2 &= \sum_{j=1}^4 A_j B_{2j} \zeta_j^x + C_2^{(2)} X^2 + C_2^{(0)} \\ X_3 &= \sum_{j=1}^4 A_j B_{3j} \zeta_j^x + C_3^{(1)} X \end{aligned} \quad (23)$$

其中  $A_j (j=1, \dots, 4)$  是 4 个常系数, 将由边界条件确定。

下面讨论边界条件。

对单列孔洞的剪力墙，我们将有顶层和底层两种边界条件。对多列孔洞的剪力墙除顶层和底层的条件外，还可有左边跨和右边跨两种条件。顶层和底层的条件对多跨（多列孔洞）情形和单跨情形是一样的，这里就统一按多跨情形讨论一下。

在顶层、即  $x=1$  的第  $y$  跨格间，列出力法方程，将具有如下形式：

$$[\delta] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + [\delta^{+x}] E_x \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + [\delta^{+y}] E_y \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + [\delta^{-y}] E_{y^{-1}} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{Bmatrix} = 0 \quad (x=1)$$

这个方程比基本方程（1）少一项  $[\delta^{+x}] E_x \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$ ，因此从基本方程（1）减去上式，即得边界条件为：

$$[\delta^{-x}] E_{x^{-1}} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (x=1)$$

由于  $[\delta^{-x}]$  中 2、3 两行元素相同，因此上式只给出两个独立方程而不是三个方程，由上式前两个式子可解出二个条件：

$$\left. \begin{aligned} E_{x^{-1}} X_1 &= 0 & (x=1) \\ E_{x^{-1}} X_3 + E_{x^{-1}} X_2 &= 0 & (x=1) \end{aligned} \right\} \quad (24. a)$$

这就是  $x=1$  顶层上的两个边界条件。

在底层即  $x=n$  的第  $y$  跨格间，列出力法方程，将具有如下形式：

$$[\delta'] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + [\delta^{-x}] E_{x^{-1}} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + [\delta^{+y}] E_y \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + [\delta^{-y}] E_{y^{-1}} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{Bmatrix} = 0 \quad (x=n)$$

其中  $[\delta'] = [\delta] - [\Delta\delta]$

$$[\Delta\delta] = \begin{bmatrix} \beta_1 & \frac{\phi_y}{h} & \frac{\phi_y}{h} \\ \frac{\phi_y}{h} & 1 & 1 \\ \frac{\phi_y}{h} & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta = \frac{h^3}{E J_y}$$

在  $[\delta']$  中比  $[\delta]$  少一个  $[\Delta\delta]$  是由于底层和其他层比少一个下侧的梁。将基本方程（1）减去上述方程即得

$$[\delta^{+x}] E_x \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + [\Delta\delta] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (x=n)$$

由于  $[\delta^{+x}]$  的 2、3 两行元素相同， $[\Delta\delta]$  也有这特点，所以上式只给出两个独立方程，简化得

$$\left. \begin{aligned} (E_x - 1) X_1 &= 0 \\ (E_x - 1) X_2 - (E_x + 1) X_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (x=n) \quad (24. b)$$

这就是底层的两个边界条件。

现在我们共有边界条件 (24. a) 和 (24. b) 4 个方程, 因此, 可以确定解答 (23) 中 4 个常数  $A_j (j=1\cdots 4)$ 。

应当指出, 当  $|\zeta_1| \ll 1, |\zeta_3| \ll 1$  时, 齐次式解答中 1、3 两项将主要代表上部边界影响, 而 2、4 两项, 则将主要代表底部边界的影响。这时可作如下的简化: 将 2、4 两项中  $A_j \zeta_j^z$  ( $j=2, 4$ ) 改成

$$A_j \zeta_j^{(n+1-z)} = (A_j \zeta_j^{n+1}) \zeta_j^{-z} = \mathbf{A}_j \zeta_j^{-z} \quad (j=2, 4)$$

其中  $z$  是以底层为 1 向上编码的层号,  $z = (n+1) - x$ , 而  $\mathbf{A}_j$  则为新的常数。由于  $\zeta_j (j=2, 4)$  分别是  $\zeta_j (j=1, 3)$  的倒数, 因此  $|\zeta_j| \gg 1 (j=2, 4)$ , 当层数  $n$  足够大时  $\zeta_j^{-z} (j=2, 4)$  在顶层将变得很小, 因此在列出上端边界条件 (24. a) 时, 可舍去齐次解中 2、4 两项, 由 (24. a) 两方程即可解出  $A_1$ 、 $A_3$  两常数。同理, 在列出下端边界条件时, 可舍去 1、3 两项, 由 (24b) 两方程确定  $\mathbf{A}_2$ 、 $\mathbf{A}_4$  两常数。简化解为:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \sum_{j=1,3} A_j B_{1j} \zeta_j^x + \sum_{j=2,4} \mathbf{A}_j B_{1j} \zeta_j^{-z} + C_1^{(x)} x^2 + C_1^{(0)} \\ X_2 &= \sum_{j=1,3} A_j B_{2j} \zeta_j^x + \sum_{j=2,4} \mathbf{A}_j B_{2j} \zeta_j^{-z} + C_2^{(x)} x^2 + C_2^{(0)} \\ X_3 &= \sum_{j=1,3} A_j B_{3j} \zeta_j^x + \sum_{j=2,4} \mathbf{A}_j B_{3j} \zeta_j^{-z} + C_3^{(x)} x \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

在确定了未知力  $X_i$  之后, 就可由  $X_i$  与相应的单位内力图相乘, 再叠加荷载在基本法构上的内力图, 即可得结构的最后内力图, 例如单跨, 各层结点荷载均为  $P$  的情形, 第  $x$  层 1 柱柱顶和柱底的弯矩为:

$$M_{1x}^{\text{图}}(x) = \frac{PJ_1 h}{\Sigma_y J_y} \cdot \frac{x(x+1)}{2} + (C_{L1} + \phi_1) X_1 + h X_2 \mp h X_3 \quad (25)$$

2 柱则为:

$$M_{2x}^{\text{图}}(x) = \frac{PJ_2 h}{\Sigma_y J_y} \cdot \frac{x(x+1)}{2} + (C_{r1} - \phi_1) X_1 - h X_2 \pm h X_3$$

上式确定的弯矩是当柱的左侧受拉时为正, 荷载  $P$  向右为正。

(ii) 两肢相等情形。当两肢相等时, 结构左右对称, 当荷载为水平荷载时, 则荷载本身为反对称的。因此, 由结构力学可以立即判断  $X_1$  应为反对称的, 即  $\phi_1 = 0$ , 而且对称性的内力  $X_2 = X_3 = 0$ 。这点也可由前边导出的方程推断。事实上, 这时, 我们有

$$C_{ry} = C_{Ly} = C \quad (y=1)$$

$$J_y = J_{y+1} = J_1 \quad (y=1)$$

由 (2) 就得到  $\phi_1 = 0$ 。由于  $\phi_1 = 0$ , 基本方程 (11) 中  $X_1$  和  $X_2$ ,  $X_3$  分离, 第一式只包含  $X_1$ , 第二、三式则只包含  $X_2, X_3$ ,  $\{\Delta_p\}$  中只有  $\Delta_{1p} \neq 0$ , 而  $\Delta_{2p} = \Delta_{3p} = 0$ ; 这就导致  $X_2 = X_3 = 0$ 。致  $X_2 = X_3 = 0$ 。因此只需要考虑 (11) 中第一式, 它退化成为下形式:

$$\alpha_1 X_1 - \beta_1 E_x X_1 - \beta_1 E_x^{-1} X_1 + \delta_{1p} = 0$$

这个式子可简化为

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} X_1 - (E_x + E_x^{-1}) X_1 + \frac{\delta_{1p}}{\beta_1} = 0 \quad (c)$$

因为只有一跨, 为了简化, 以下  $a_y, J_y, C_y \cdots$  等的下标  $y (y=1)$  均省略, 由 (3) 式得:

$$\beta = \frac{2aJ}{hJ_l}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{3} \left[ \frac{a^2}{h^2} + \frac{kEJ_l}{GF_l h^2} \right]$$

$$\alpha_1 = \frac{2}{\beta} \left[ \frac{C^2}{h^2} + \frac{J}{Fh^2} \right] + 2\beta_1$$

由此得到:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = 2 + \frac{3hD_l}{J} \left[ 1 + \frac{J}{FC^2} \right] = 2 + \frac{\alpha_n^2}{n^2}$$

其中:

$$D_l = \frac{J_l C^2}{a^3} \left( 1 + \frac{1}{\frac{3EJ_l k}{GF_l a^2}} \right), \quad \alpha_n = n \sqrt{\frac{3hD_l}{J} \left[ 1 + \frac{J}{FC^2} \right]} \quad (26)$$

对各层荷载均为  $P$  的情形, 由 (8) 得到:

$$\delta_{1P} = \frac{EJ}{\beta_1 \beta h^3} \Delta_{1P} = \frac{EJ}{\beta_1 \beta h^3} \cdot \frac{h^2 P x^2 C}{2EJ} = \frac{3D_l h^2 P}{4JC} x^2$$

方程 (e) 化为:

$$\left( 2 + \frac{\alpha_n^2}{n^2} \right) X_1 - (E_x + E_x^{-1}) X_1 + \frac{3D_l h^2 P}{4JC} x^2 = 0 \quad (f)$$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} E_x^{-1} X_1 &= 0 & (x=1) \\ (E_x - 1) X_1 &= 0 & (x=n) \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

为了和剪切夹层方法的解对比, 将上述方程中未知函数  $X_1$  变成  $m = X_1 C$ , 为此, 用  $c$  乘 (f) 和 (g), 变成

$$\begin{aligned} \left( 2 + \frac{\alpha_n^2}{n^2} \right) m - (E_x + E_x^{-1}) m + \frac{3D_l h^2 P}{4J} x^2 &= 0 \\ E_x^{-1} m &= 0 & (x=1) \\ (E_x - 1) m &= 0 & (x=n) \end{aligned} \quad (27)$$

(27) 的解如下: 由下式定  $\beta_0$

$$ch\beta_0 = 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_n^2}{n^2} \quad (28)$$

(27) 的解答为:

$$\begin{aligned} m = \frac{Q_0 H}{2} \cdot \frac{1}{\left[ 1 + \frac{J}{FC^2} \right]} \left\{ \left( -\frac{1}{\alpha_n^2} \right) \frac{sh \left[ (\beta_0 n) \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \right]}{ch \left[ (\beta_0 n) \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \right]} \right. \\ + \frac{1 + \frac{1}{2n}}{2nsh \left[ (\beta_0 n) \frac{1}{2n} \right]} \cdot \frac{1}{ch \left[ (\beta_0 n) \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \right]} \left. \right) sh \left[ (\beta_0 n) \frac{x}{n} \right] \\ + \frac{1}{\alpha_n^2} ch \left[ (\beta_0 n) \frac{x}{n} \right] - \left( \frac{1}{2} \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{\alpha_n^2} \right) \left. \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$Q_0 = Pn, \quad H = hn$$

当  $\alpha_0$  保持为常数,  $n \rightarrow \infty$  时, 由 (28) 可得

$$\beta_0 n \rightarrow \alpha_0$$

这时解答 (29) 变成:

$$m = \frac{Q_0 H}{2} \left[ 1 + \frac{J}{FC^2} \right] \cdot \left\{ \left( -\frac{1}{\alpha_0^2} \frac{sh \alpha_0}{ch \alpha_0} + \frac{1}{\alpha_0 ch \alpha_0} \right) sh \left( \alpha_0 \frac{x}{n} \right) + \frac{1}{\alpha_0^2} ch \left( \alpha_0 \frac{x}{n} \right) - \left( \frac{1}{2} \left( \frac{x}{n} \right)^2 + \frac{1}{\alpha_0^2} \right) \right\} \quad (30)$$

这个结果和剪切夹层结果一致。显然, 当  $\frac{\alpha_0}{n}$  不很小时,  $\beta_0 n$  和  $\alpha_0$  有相当的差别。这时 (30) 的结果也将和 (29) 有相当的差别, 用剪切夹层将有较大的误差。

将 (29) 式的  $m$  和荷载在基本结构上的弯矩相加, 即得各柱的弯矩。

图 3 给出对称墙等结点荷载按剪切夹层法与本文方法计算结果 (底层柱中点弯矩) 的比较, 易见, 当  $n < 16$  时, 夹层法误差较大。

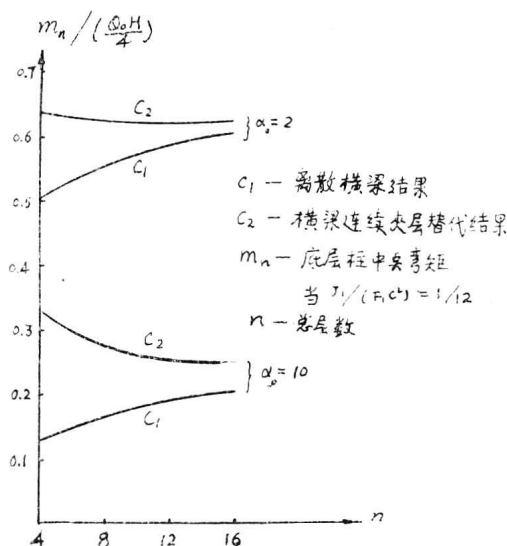


图 3

图 4 给出不对称的单列孔洞剪力墙按本文方法计算的结果。这个墙的特点是左柱 1 截面较右柱 2 截面大, 而横梁截面与右柱相同。  $\frac{J_1}{J_2} = 8$ ,  $\frac{I_1}{I_2} = 1$ 。细部尺寸如图 4 右图所示。

取  $\frac{kE}{G} \cong 2$ 。求出两柱的弯矩分布如图 4 所示。横梁弯矩零点与净跨中点距离记如  $e_0$ , 则各层  $e_0$  值各下表: (零弯点均在净跨中点右边):

从这个例子可以看出:

(1) 两柱的弯矩分布图是不相似的, 由于左柱 1 较粗, 其弯矩图越靠下层越向左偏移, 底部几层没有零弯点, 较接近悬臂梁的作用, 而右柱 2 则各层均有零弯矩点, 较接近刚架的作用。剪切夹层法假定各柱弯矩与  $J$  成比例误差太大。各柱剪力  $i$  比也和  $J$  之比不同。

(2) 各层横梁零弯点不在净跨中点, 而是偏向较弱的柱一侧, 本例的偏离大部分横梁