

大衆數學

上册



01-49

3:1

大 衆 數 學

上 冊

Lancelot Hogben 著

原作者序

這本書是作者在醫院養病時，因為興趣的關係而寫的。寫成以後，有些朋友看過，都希望我將這本書印行問世；他們認為這本書出版後，對那些天資聰穎但在學校裏被數學弄昏了頭腦的人會有一定的幫助。於是，我終於把它出版了。

在這裏，我除了希望讀者們不要以為我在寫此書時是以專家的身份自居之外，還有兩點需要申明：第一、我寫這本書是以一個對教育有興趣的公民身份而寫；第二、本書裏面所述及的對某些問題的看法，我估計將會引起一部份讀者的反對。反對並不是壞事，相反的，如果能因此而引起了一些人對學習數學發生興趣，或者是因此而消除了他們對學習數學的懼怕心理，則作者認為出版本書的目的已經達到了。

讀者中或許有些人只熟習南半球的星象，所以，我在這裏不得不加以說明，在本書所討論的問題裏，我在舉例時，是站在赤道以北觀察星象的。書中各篇在正文以外的一些補白，或是作者自言自語的地方，對本書討論的問題並無多大的關係，讀者可不必過分重視。這些材料之所以被加進法，只不過是希望這帖藥的苦味可以稍稍沖淡些，使讀者看來增加一點趣味而已——雖然，其中說不定有一部份也會對問題的探討有所幫助。

作者原無意使本書成為一本專門性的學術著作，所以，作者著述此書時，在認為偶有創見的地方也沒有作更深的議論。因為我覺得，如果寫進了太多專門性的問題，則本書將失去了一些生動的討論，而也失去了我要出版此書時的初衷。

譯 序

數學和天文學是各種科學中最古老的兩個課題。上古的人仰觀天象，每天見日出日落，時序流轉，夜間星斗羅列，此起彼落，更有月蝕日蝕的異象。而且，時序的流轉，和農作物的耕種收穫同步進行，牛羊的繁殖，似亦按時光循環。因為這種現象直接影響了他們的生活，使他們不得不細加觀察，以求適應生存之道；他們對天文的研究，終於產生了兩種現象：

第一、他們所觀察到的天文現象，是當時人們的知識範圍所無法解釋，因此自然會想到，這一切乃是由天上諸神在主宰着，從而開始了各種宗教的思想。爲了敬奉天上的神，乃修建廟宇，這也可說是建築學以及各種土木工程的先聲。

第二、當他們在觀察天文現象時，不得不涉及角度和距離的測量；這些測量工作，再配合建築廟宇的發展，乃開始了最早的數學形式。

從歷史的發展來看，數學的產生乃是爲了適應當時社會的需要，而數學的發展，也是藉社會文化的進步作爲原動力。數學是從人類生活中漸漸成長壯大的，這就是本書作者要告訴我們的話。

數學發展到現在，其分門別類之精細，幾乎已經使大家忘記數學與人類生活之間的密切關係。數學可以分作理論數學和應用數學兩部份，而兩者相輔相成的。尤其是關於實際的需要，應用數學的方法必須要能够配合才能致用；但是應用數學又必須要有理論上的基礎，理論數學是在思想上給數學奠下鞏固的根基。

我們在學校裏所讀的數學，比較注意方法上的細節。這是由於，唯

有先能把握方法才能貫通思想。但是因為學校裏的數學過份注意在方法上的討論，初學的人無法顧及全貌，因而忽略了數學發展基本原動力的所在，難免有捨本逐末之憾。因而本書的原作者希望能把日常生活的問題直接和數學打成一片；而要達到這種目的，唯有把數學發展的歷史過程用通俗的言辭表達出來。

原作者在本書裏大聲疾呼的說，唯有健全的教育制度，才能使數學有更進一步的發展。數學並不是社會裏一些優閒階級用以消遣自娛的玩物，更不是統治者用以統治社會的工具，數學是大眾的，它的目的在於如何改善大眾的生活。因此，作者給這本書的書名叫“數學是大眾的”。

原作者是英國人，因此書中所舉的例子，不論人名、地名，皆以英國人常見之事物為藍本。而且原作者不厭求詳的舉一反三，文筆雖稍嫌冗贅，但讀者們如能知其主旨，便更可諒其匠心所在。

譯者才疏學淺，不但譯筆枯澀，而且譯名及歷史上的典故亦未能細作引證和斟酌，尚希有識之士鑒諒，並加指正。

本書的譯就，多蒙教育部李熙謀博士之鼓勵，教育部科學勳進會易懿文秘書之協助。原稿曾由家父思齊先生逐字校正，故此一併致謝。

譯者趁業餘之暇譯成此書，回憶這幾個月，每當夜深人靜，獨坐燈下之時，唯有吾妻陪坐一旁問茶問煙，時加敦促，原來她也曾和許多天資聰明，但是對數學有相當距離的同學時常接觸，願將此書獻給她，再轉交給那些朋友。

胡樂士

第一章 數學（文化的鏡子）

百科全書的編纂人及唯物論者戴第羅（Diderot），是法國大革命前知識啓蒙時期的先進份子之一。有一個故事說，當戴第羅居留在俄國朝廷裏時，朝廷裏的貴族們都知道他的辯才超卓，口若懸河。當時，沙皇怕臣子們對自己的忠誠發生動搖，便敦請當代最有名的數學家歐拉（Euler）和他在大眾之前辯論。戴第羅受召進宮時並不知道他對手的姓名，只知道說有一位數學家已求得一項上帝存在的證明。辯論開始後，歐拉當着滿朝的文武官員，以極嚴厲的語氣對戴第羅說了下面這句話：「 $\frac{a+b^n}{n} = x$, donc Dieu existe répondez!」。戴第羅是一個絕對信任數學的人，在他的眼中，代數就好比是天書；不幸的是他沒有想到這卻是他失敗的原因。其實，代數只不過是一種語言，使用它，我們可以敘述世界上各種事務的大小(sizes)，但與日常敘述事物的種類(sortes)時所用的語言不同；假如戴第羅清楚了這一點，他或許會請歐拉把前半句話先翻譯成法文才進行辯論。把這句話譯出的意思是：「將 b 自乘 n 次，加上 a ，再以 n 除後所得到的是 x ，所以上帝是存在的，你還有甚麼話好說？」假如戴第羅請歐拉將前半段辯詞多加說明，以便使俄皇朝中的官員了解得更清楚些，則歐拉可能回答說：「如果 a 是 1， b 是 2， n 是 3 則 x 是 3。如果 a 是 3， b 是 3， n 是 4 則 x 是 21。餘由此類推。」若是朝中的人希望知道爲甚麼下半段話能從上半段話推衍而得，這麼一來，歐拉就會束手無策了。可惜戴第羅和我們大多數人一樣，遇見了這種敘述大小的語言便會怯場。於是他只好在滿朝文武的譏

笑聲中倉皇離去，閉門不出，雇了一個保鏢便匆匆返回法國。

戴第羅是歷史上最後一位受嘲笑的人，只是他自己並不知道。他所反對的教權主義已被推翻，而歐拉曾挺身衛道的超自然主義，雖一向不缺這位數學家的香火朝拜，卻也已漸漸萎縮。當代一位名文學家在他的講詞中告訴我們說，迪拉克（Dirac）發現了 p 和 q 數，Donc Dieu existe。另一位有聲望的天文學家，由於他對星球間之距離的計算而享譽，卻不授予 M. le grand Architecte 的名譽數學學位，在歐拉和戴第羅的時代之前頗多類似的先例。最早的數學家就是教會裏那些訂製曆法的祭司們，他們計算着季節的交替。埃及的廟宇中都裝置有水位計，祭司們利用它而辛勤地記錄着那些被他們認為是神聖之河的漲落。有了這些記錄，他們才能十分準確地預測尼羅河將會於何時氾濫成災。他們的手抄本顯示出他們有一種觀測記錄數據所用的語言，這和他們以預言欺瞞門外漢時所用的那種唯我獨尊的言詞大不相同。羣衆們看不出預言和實際之間的連帶關係，因為那些水位計是經由地下水道和河水相通，很巧妙的掩藏着不給羣衆看見。埃及的祭司們在為智識份子們寫訟詞時用的是一種語言，可是卻用另一種語言來接見那些傳播消息的人們。

古時候，寫和讀都被視為神秘的事，是屬於一種特殊的技術，古學者阿米士（Ahmes）在抄本上寫下那些有關測量事物的定律，普通的人是無法了解其奧妙的。二十世紀裏，受了文化薰陶的各社會階層，已經將敘述種類之語言的讀法和寫法大衆化了。所以，在目前來說，即使是一些科學上的發現，只要不涉及太複雜的測量，普通的人都已可以了解；同時，每一位普通的人都多少知道一點進化論，教士們所說的神造天地的論調便不再被人相信，因此神秘主義只好退隱在原子之內，原子變成了一片安全土；這並不是因為它小，而是因為在你能够登堂入室之前，

必須先做一些非常繁複的測量並且還要找到暗門。普通人找不到這個暗門，是因為他們不會學過有關大小的語言。三個世紀之前，當祭司們用拉丁文進行教會工作時，實行宗教改革的新教徒們爲了新教的推展，便廣設公學，以便使一般人民可以閱讀聖經。現在可以說已面臨另一次宗教改革運動的時機，人們必須學會讀及寫度量的語言，才能了解現代科學的聖典。

在戴第羅的時代，個人的生命及幸福仍取決於他是否持有正確的宗教信仰。現在則不再如此，目前各政府機構保存了許多有關人民的統計數字，人民對生命及幸福的保障，已全視他們對這些統計數字是否有正確之了解而定，這是大多數人所沒有能領悟到的。當一些專家們發表統計數字，說平均下來失業津貼已足夠以維持普通人的生活，或說平均下來每一位兒童都可以得到足夠的牛奶時，只要他們在書面上提到「平均」或提供出一些數字，輿論便無法加以反駁；而實際的情形往往卻是：有半數甚至半數以上的人都得不到每一個人或每一個小孩所平均應該得到的。現在生活在文明社會之中，有大多數的人尚不能隨心所欲地讀或寫關於大小的語言，正好似生活在萬克利夫（Wycliff）和路德（Luther）時代中的大多數人不懂拉丁文一樣，而那時有關宗教的爭辯卻全都是用拉丁文。現代的戴第羅爲了自衛必須學習大小的語言，因為沒有一個社會是安全的——如果那個社會是操縱在聰明人的手裏的話。

聰明的人在開始讀或寫我們用來敘述事物種類的普通語言之前，那些並不聰明得令人可怕的人們早已學會講話。現在的普通人（也就是說這本書的讀者及作者），和古時候那些聆聽祭司的預言的聽衆們相比之下，已經是聰明得多。我們每一個人都已學會如何講大小的語言（Size Language），雖然我們不一定要去讀或寫它。假如有人向你發問，現代

的人和機器時代的人以及生活在美國革命或法國大革命之前的人有甚麼不同，對這個問題我們可以說出許多的答案。但是很少人能像柏爾克（Burke）所發表出那樣的答案；在我們以上所討論的事件發生之後約四十年，柏爾克對百科全書編纂人所一致讚揚的社會革命寫了一篇極尖刻的譴詞，他站在不同的立場上寫出了流利、響亮、動人的大作，其中有許多章節會令人回想到當時在俄國所發生的一些事件的經過，正如報章上所反映出來的相同。柏爾克給 ancien régime 寫了一篇流利的訃聞。柏爾克如此動怒，並不是因為歐洲將成為商人的天下，而是因為歐洲將成為打算盤者的天下。他說：「騎士制度時代已經消失，接踵而來的是詭辯者、經濟學者和計算者的天下，歐洲的榮耀和光輝已永遠滅跡……。」

最早住進城市裏來的人們是會講話的動物，機器時代的人是會計算的動物，我們是生活在數字的狂潮之中：烹飪、食譜、火車時刻表、失業統計、罰款、捐稅、戰爭公債、加班費、速率限制、滾球記分、賭注、彈子計分、卡路里、嬰兒體重、體溫、雨量、銀行利率、日光浴時間、賽車記錄、電費指數、煤氣表度數、運費、死亡率、折扣、利息、獎券、波長、輪胎壓力等等的計算都是數字。每天晚上，當他上錶的時候，這一位現代的人是在調整一項精微準確的科學儀器，這是亞歷山大大帝時代最聰明的人都不能想像得到的；只是在日常生活之中便可以舉出這麼多的例子。在做這些事情的時候，我們先得學會這些工具的使用法，這些工具對古老的數學家們來說都是非常困難的，但這一點卻有很多人沒有注意到。比率、極限、加速度並不是太抽象的，孤獨的天才們並不能有所領略，但卻在我們日常生活中的每一角落裏出現。在我們即將探索的這一段探險的旅程中，我們會發現，有許多問題，在目前我們均不難找到回答，但卻絞盡了古時數學家們的腦汁；這並不是因為你我

都是非常聰明的人，而只是因為我們已承受了一份社會文化的遺產。這份社會文化遺產曾受到物質外力的衝擊，而這些外來的力量，對古代人們靈性生活說都是很陌生的。最燦爛光輝的文化，是一位被禁囚在文化遺產裏的囚犯！

我們舉一個例子，可以將這句話說得更清楚。依列的哲學家齊諾（Zeno）曾提出好些謎題給當代的人們猜，其中有一則最常被人引用，這就是阿基里斯（Achilles）和烏龜的詭論。這一個問題會讓發明幾何學的人們辯論得舌敝唇焦。阿基里斯和烏龜賽跑，他跑得比烏龜快十倍，但烏龜先跑了一百碼；齊諾說阿基里斯跑了一百碼之後到達烏龜起跑的地方，這時烏龜也跑了阿基里斯十分之一的路程，所以在阿基里斯前面十碼之處。阿基里斯跑完這十碼，可是烏龜又跑了阿基里斯十分之一的路，所以還在他前面一碼。阿基里斯跑完這一碼，但烏龜又跑了他十分之一的路程，所以還是在他前面十分之一碼。阿基里斯又跑了這十分之一碼，這時烏龜也跑了十分之一碼的十分之一，所以在阿基里斯前面百分之一碼，阿基里斯追完這百分之一碼，烏龜還在他前面千分之一碼。因此，齊諾說阿基里斯是逐漸的接近烏龜，永遠都追不過去。

你不要以為齊諾以及那些參加辯論的聰明人並不是不知道阿基里斯到後來終於追上了烏龜。使他們感到困惑的是：問題的竅訣在那裏？你可能也問過同樣的問題。但是使你發出這個問題的原因確和刺激着他們的原因不同，這是非常重要的一點。你所感到奇怪的是為甚麼他們會想出這麼一種似乎無意思的小謎語。不久我可以向各位證明這個問題對你來說並沒有甚麼數學上的難解之處。經過了兩次文化之崩潰，以及兩次社會大革命，使你接受了一份與他們所接受到的不相同的社會文化，你已經學會如何用大小的語言來表達這個問題，所以你覺得上面的問題絕

不難解；但對古時候的人來說，他們的困難並不是歷史上的困難而是數學上的困難，他們沒有能得到這一種大小的語言來自由地表達這個問題。

希臘人對速度的限制以及旅客行囊的超重都不熟悉，任何一個與除法有關的問題他們都覺得比涉及到乘法的問題要難解的多。他們沒有任何方法來把除法做得十分準確，因為他們的計算工作是利用圖六中（見P. 34）所畫的那種算盤的機械幫助，他們在紙上就要連加法都做不出來。有些事情我們一看就知道，但是由於上面的原因以及一些我們在下面繼續說出來的原因的關係，希臘人卻做不出來。假如我們能够把愈來愈大的東西堆在一起，只要我們不停地堆，這堆東西便會越來大得越快，並且沒有止境。愈來愈大的量無盡止的加起來既然不會有止境，在齊諾那時候的人看來，便會說如果將愈來愈小的量不停的加在一起也會是沒有止境的了。他們認為：在前一種情形下，這堆東西愈變愈大，也愈來大得愈快，而在後一種情形下，這堆東西也是愈變愈大，只不過大得比較慢而已。在他們所用的數學語言中，沒有甚麼東西可以使他們想到，當引擎的速度慢到一定的限度之下時，引擎便停住了。

要把這件事情講清楚，我們且先用數字來表示出，當阿基里斯起跑之後，這整個賽跑過程中每一階段裏烏龜所跑的距離。前面說過，在第一個階段裏，烏龜跑了10碼，第二個階段裏跑1碼，第三個階段裏跑十分之一碼，第四個階段裏跑百分之一碼。如果我們的數字語言和羅馬人及希臘人或希伯來人的相同，便都用字母來表示數字。現在，且讓我們用比較常見的一種，即鐘錶面上以及其他地方仍然在用的那一種羅馬數字來表示，則烏龜在被阿基里斯追上之前所跑的整個路程是：

$$X + 1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{C} + \frac{1}{M} + \dots^*$$

古時候，人們若碰到了大過幾千以上的數字便感到很困難，所以我們在此用“……”來表示。以上這種寫法，除了我們把尾數部份留下來讓你去想像之外（不要忘記，假如這個尾數越來越大，便成了尾大不掉之勢），還有另一個不方便之處，那就是：以上這種寫法，無法讓你把這賽跑的每一個階段中所經過的路程之間有甚麼連帶關係看得出來。現在我們有一種新的數字字彙，能够把這種連帶關係表示得很完整、清楚，這個式子是：

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1,000} + \frac{1}{10,000} + \frac{1}{100,000} + \frac{1}{1,000,000} + \dots$$

這裏的“……”是爲了省事而用的，並不是因爲我們找不到合式的數字來表示。上面這些數字符號是向印度人借來的，印度人在齊諾和歐幾里得逝世後很久才學會用這些數字的符號。新教徒的宗教改革和一次社會革命給人們帶來學校，結果使這一種數字符號成爲了人類共同的財產。另一次社會的不安定——法國大革命——教給了人們另一種新的記數法。這種新的記數法已經是人類智識基金中的一部分，並且被每一位正常的人所共享，這是應該感謝十九世紀所訂的教育法案（Education Acts）。讓我們用這種新的記數法，也就是所謂十進的小數記位法，來將上面的總和寫出來：

$$10 + 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + 0.00001 + 0.000001 + \dots$$

用以上這種寫法，是爲了提醒我們，這個式子還可寫成更簡單的形式：

$$11.111111\dots$$

* 羅馬人並沒有這種表示分數的寫法，這樣寫的目的只是爲說明這個題目。

或是 $11.\dot{1}$

我們都知道， $0.\dot{1}$ 這個數代表一個比 $\frac{2}{10}$ 小，比 $\frac{1}{10}$ 大的量。假如我們沒有忘記在學校裏所學過的算術，便會知道 $0.\dot{1}$ 就是 $\frac{1}{9}$ 。這也就是說， $0.1 + 0.01 + 0.001 + \dots$ 這個和，我們所取的項數越多，其和便越接近 $\frac{1}{9}$ ，並且決不會比 $\frac{1}{9}$ 大。所以，當阿基里斯和烏龜之間已經沒有距離可言時，烏龜一共跑了 $11\frac{1}{9}$ 碼，再也不會大過這個距離了。

現在你總算可以清楚，爲甚麼我們說這個問題對你而言並沒有數學上的困難的原因了。因爲你所有的這一種數字語言，把數學家們用一個令人難忘的名詞來表示的可能性已經考慮在內。這種可能性，數學家稱之爲無窮級數向某一極限值收斂。用較簡單的話來說，它的意思是，如果你不停的把愈來愈小的量堆起來，你可能得到這樣的一堆：即使你再堆一些上去，它也不會更大些。古時候的數學家如果遇到無限次的除法運算，或是遇到現代數學家們所說的無窮級數、極限、超越級數、無理量等等問題時，便會感到極大的困難；這是一個極好的例子，它說明了整個人類智識發展史上與生俱來的不變的真理。由最聰明的人所做出的那些學術研究上輝煌的成果，其原動力是取自人人所共享的普通智識，而到達了某一點之後，聰明的人也無法超過由他們所承受的社會文化所立下的極限；當聰明的人孤芳自賞，並引以爲自負時，我們便會懷疑到底他們有多麼聰明了。此後我們對數學的研究，將會發現，每當一個民族的文化與人類的日常生活失去連繫之後，便變成了祭司們的政略，其最終的境界，和其他祭司的政略一樣，是迷信。這種以文化與人類的的生活脫節爲榮，復蔑視偉大的社會教育工作的現象，不但既愚蠢及不正常，且更是智識進步的末途。歷史告訴我們，迷信不是普通人創造

的，而是那一批終日無所事事的神經病文化人所捏造的，數學家和普通人是互相依靠的，西方世界可能重將回到野蠻主義的邊緣，如果能逃過這個劫數，則我們四周這些優閒階級裏面的男男女女，將認為數學之反民主是使文化前進的一大因素。

在我們所處的這個時代裏，重返野蠻主義的危險是相當真實，在公立學校制度還沒有建立起來時，柯柏（Cobbett）向一些做工的人解釋文法的重要性，當時他所用的話有些也可以用在數學的身上，在他寫給一個小孩一些談到文法的第一封信裏面，曾經寫下了這些話：「可是，爲了尋求這一方面的智識，我親愛的孩子，有一種動機，不但時時都應該感覺得到，現在應該更強烈地感到，我們所指的是，每一個人，尤其是每一個年青人，都能有效的維護國家的權利和自由。當你以後讀到保衛人民自由的英國憲法的歷史時，……你會發現口誅筆伐是暴權最感害怕的大敵；當被放逐、被長期禁囚、被嚴厲處罰的威廉頗耐勒（William Prynne）重獲自由的時候，從南安普頓（Southampton）到倫敦一路上撒滿了花朵，人民歡欣若狂，然後指控那使國家受到禍害的、殘酷的、折磨的暴君，審判他們，終於把他們送上了斷頭台。看到了這些壯舉，你的心裡，以及每一顆年青的心都充滿了喜悅。不過你要切記在心裏的是，如果頗耐勒不懂文法，他就不可能完成這些事，也不能保持他的聲名，更不能使他的名字榮輝於天下。」

現在，執經濟權的統治者們與那些會計算的天才們結成了盟友。如果不懂數學，不懂這些說明大小及等級的文法，我們便不能建立一個合理的社會，使人人都不虞匱乏，都有積蓄。如果我們面對這一個前景而感到害怕的話，我們就必須知道，爲了學會這一種文法，第一步工作是要清楚，學習數學並不困難，曾使許多人害怕學數學的種種原因實際上

全都是不存在的。現在學校裏面所教的數學，沒有提到數學的歷史，沒有提到它在我們日常生活中的重要性，也沒有提到人類文化是如何地倚賴着數學家。不論是在童年時期或是成年之後，沒有人告訴我們這種文法在整個歷史過程中是如何一次又一次地被使用，才能將人類從迷信的牢籠中釋放出來。也從來沒有人告訴我們說，數學可以用來維護我們的自由。現在，讓我們來看看它爲甚麼可以這樣吧！

在宗教改革時期，有三種互相獨立的因素，使北歐國家的教育制度發生了重大的改變。在這裏面，語言便是其中之一的因素，要削減教會成爲經濟上之君主的力量，必須先把教會加在人類之創造力上面的束縛打開。改革者們向公認之聖經權威界們呼籲說，對神表示敬拜之主要工作將加以改變。他們要使聖經成爲一本人人能讀的書。印刷術的發明帶來一種機械工具打擊教皇的知識力量。用拉丁文及希臘文所寫的提要，成爲了研究聖經的必備的綱領，這麼一來，使得了諾克斯(John Knox)那偉大的教育改進能早日實現，同時英國的公立學校也受影響而相繼成立。聖經的新譯本，以及將其內容加以嚴密審定的新本，使對反抗天主教及富裕的修道院的教義陣線得到了戰略上的有力據點。古典的學者之所以在中等階級的教育制度中享有極高的聲譽，這便是原因之一。

大小的語言能在西方的教育中佔有今日的地位，得助於兩大社會影響。當反抗教會權威的力量日漸強大，而新改的教義又尚未普及到各中古時期鄉鎮中的商人及工人階層之前，由於商業上的需要，德國開始建立許多特設的學校，傳授着歐洲自阿拉伯人處借來的新的算術。在第一家印刷所成立之後的三年內，所印成的書本有極大部分是關於商業算術的。路德(Luther)曾經使用他在政治上的聰明技巧，機智地宣揚着加、減、乘、除四大商業上的福音，並認爲每一個小孩都應該學會如何計

算。關於數目字的文法，最早僅與商業上的用途發生不可分的關係，因為那時的人們尚無法預測，這套文法將會以各種方式來侵入人類的社會生活之中。

幾何學那時雖然已經和計算的藝術分了道，但它們卻循着不同的途徑進入西方的教育。由於聖經的廣泛印刷，對死板文字的研究便受到一個刺激，除此之外，希臘哲學家們的政治理論，亦頗能吻合商人們對局部的、都市化的民主的嚮往，因此古典的研究工作也受到鼓勵；古希臘城邦政治的民主所加在富裕的資產階級身上的影響，一直延續到了法國大革命。法國革命之後，它們才消聲匿跡，被裝在骨灰罐裏成了一種裝飾品。希臘城邦政治中的有閒階級對研究幾何的愛好，就好像現在的人愛下棋、愛填字謎遊戲一樣。柏拉圖說過，幾何學是人類閒暇時間裏所應致力研究的最高遊戲；所以，在歐陸的教育中，幾何學便成了古典著作中的一部分，這幾何學與同時代德拉克（Drake）的測量學之間看不出清楚的關係來。不過，學歐幾里得的人卻還不知道它的社會用途，許多年代以來，學童們都在學習歐氏幾何學，但卻沒有人告訴過他們，以後將會有一種測量學發源於歐氏的指導，而能用來測量出地球的大小；這些測量工作將諸神的宮殿更形擴大，也照亮了偉大海航的路徑。我們所說的哥倫布的信仰，其基礎就是在測量地球上到底還有多少尚未經人探索的地方。

柏拉圖讚揚數學為最高尚、最神秘的禮拜式，其根源是迷信和幼稚。在文化史的初期，最聰明的人也不知道說13是質數及說13是不吉祥之數，這兩種說法有甚麼區別，故而大部份的人都被迷信所困擾，也被誘入了幼稚之途。柏拉圖的教育給數學罩上了一層神秘，因而畢達哥拉斯派的弟子們會有種種奇怪的作為，畢派的弟子若將數學上的秘密私相

授受將被處死，但他們沒有想到，當時所謂的「秘密」，如今都已被我們印在書上了。如果因為神秘而使數學令人感到無味，這並不是任何個人的不是。柏拉圖的偉大成就，是發明一種宗教；一些與生活環境失去調和，但是又不完全相信靈魂學的人，對柏拉圖的宗教是會感到滿足的。那最早提出原子學說，研究磁石，注意到琥珀磨擦所產生的現象，解剖動物，或是將植物分類的人，他們的好奇心卻否定自然界或常見的事物均有其獨特的個性。柏拉圖發明了「包含萬物」的世界，將靈魂說推到非實驗可及的地方；這個「包含萬物」的世界便是上帝的世界，而我們所生活於其中的世界，只是它的陰影。按照他的說法，在我們生活的這個「真」的世界中，語言和數字都充滿了魔術，並與真實的事物脫了節。

在這種思想中，土並不是我們種田和蓋房子的土，而是一個等邊三角形；水不是飲料，而是一個直角三角形；火並不是可以燒房子的火，而是一個等腰三角形；空氣並不是打進輪胎裏去的空氣，而是一個鈍角三角形（見圖一）。柏拉圖把圓球的幾何學用來解釋人種的起源，其說法真的令人難於領悟。他說，上帝仿造了宇宙的圖形，給一球體賦予兩種神聖的意義，這個球體就是我們的頭。爲了使人的頭不會上下顛倒，所以頭下面要有身體，以便帶着頭行動，因而也有了四肢……。頭是如此的超然，使一些不爲生活所困擾的智識份子樂意相信，故而柏拉圖的學說也就一直相傳下來，而不爲年青的人找出合理的教育制度來。一種教育制度，如果以柏拉圖的思想爲基礎，教數學的人必然是不愁衣食的人，一旦他們要去教別的課程，那些人的頭必然要上下顛倒了。因此，另一些講實用的人便被排斥了。在他們看來，數學只是一種可利用的工具，而且也吸引了一批人，他們帶着這些數字從實際的世界中逃出去。