

SKYRME FORCES AND THE PROPERTIES OF NUCLEI

Li Guoqiang

(*Physics Department, Hangzhou University, P.R.China*)

ABSTRACT

Skyrme forces have been extensively employed as effective nucleon-nucleon interactions in the domain of low-energy nuclear physics during the last two decades. This paper reviews their applications in the following fields: Hartree-Fock (HF), self-consistent semiclassical (SCSC) calculations and nuclear ground state properties, random phase approximation (RPA), sum rule method and properties of nuclear giant resonances, calculation of microscopic nucleon-nucleus optical potentials and related quantities, and calculation of nucleus-nucleus optical potentials and the corresponding fusion barriers.

实用符号动力学

郑伟谋 郝柏林

(中国科学院理论物理研究所)

提 要

本文是为物理工作者和工程人员而写的一篇综述,介绍一维映射符号动力学的最新进展,及其在研究非线性系统周期和混沌运动中的应用。

一、引 言

符号动力学作为动力学系统一般理论的一个分支,源远流长。至少早在上一世纪中叶,便有这方面的工作,但系统性的研究还始于上世纪和本世纪之交。之后,符号动力学发展成为各态历经理论的核心。数学家们以艰深的拓扑学理论的新成果不断丰富其内容,使之愈加抽象,形成令外人望而生畏的数学城堡。然而,符号动力学研究的系统,是实际系统的简化和抽象,因为模型极为简单,便于用严格的方法作深入的研究。一旦在符号动力学和实际动力学之间建立某种对应关系之后,可将由研究符号动力学系统所得到的结果,应用于研究实际系统,具体化后引伸出适合于该系统的结论。因而,可以说学习动力学系统理论的第一课,应是符号动力学。此话说来容易,对非数学专业的工作者而言做来难。不过,1970年以来,人们将符号动力学的深刻思想在一维映射系统中形象化、具体化,演化出一种可称作实用符号动力学的方法,它可以只用极通俗的语言如单调性、连续性,道出符号动力学的精髓,并在实际应用中发生奇效。本文试图向非数学工作者介绍这种实用符号动力学,叙述中但求形象、直观,不拘泥于数学严格性。

1.1 何谓符号动力学

形式上非常简单的动力学系统,也可表现出极其复杂的行为。为描述这些复杂行为,需要尽可能简化的模型系统。所有系统中最简者可以说是符号动力学系统。比如说,取两个不同的符号或是字母 R 和 L ,可构造出许多无限长的符号序列,随手写下一个有:

$$RLRRLLLRLRL\cdots,$$

舍其第一字母 R ,便可得另一序列:

$$LRRLLLRLRL\cdots,$$

这种割舍首字母派生出新序列的作法称为移位操作或移位。想象每个符号序列代表一个“点”，所有这样的符号序列点便支起一个符号序列空间。如果给定一个符号序列，或者说给定此空间中一点，通过移位可得到一系列新点，它们可称为“轨道”。于是，由移位操作定义了符号动力学系统的动力学。在这个动力学中，符号序列如

$$LLLLLLL\cdots$$

是移位不变的，它是不动点，而符号序列如

$$RLRRLRRLR\cdots$$

则是周期3点。这些序列简单而有规则，可写成 L^n 及 $(RLR)^n$ ，知其“现在”即可知其“将来”。还有一些序列极不规则，得到它们的方法只能是将逐个字母写出来，它们就是混沌的序列。这种序列点的轨道就是混沌轨道。

对符号动力学系统的讨论，如不与实际系统联系，则如游戏一般，但一旦在两者之间建立起对应关系，则符号动力学可成为研究实际系统的强有力工具。通常在物理观测中，由于仪器的精度有限，粗粒描述必不可免，这可看作是我们将观测值域划分成许多间隔，赋予每个间隔一个符号，读数时并非读取一个无限精确的理想值，而是读取一个符号。但是，这里还看不出实际系统和符号系统之间的本质联系。符号动力学的讨论着重于建立符号动力学与实际动力学之间深刻的内在联系，从而得出丰富的结果，换言之，首先将实际系统简化抽象出符号动力学系统加以研究，然后将符号动力学的研究结果再反过来应用于研究实际系统。

1.2 关于符号动力学的文献

据文献1中所录史料，符号序列的使用可归溯至1851年。1921年M. Morse首先注意到符号动力学方法在动力学系统研究中的重要性。1938年在关于动力学系统拓扑理论的一篇文章^[2]中，Morse和Hedlund详细讨论了符号动力学。此后，R. Bowen、D. Ruelle和Ya. Sinai等人在各态历经理论和微分动力学系统理论方面发展了符号动力学。V. M. Alekseev^[3]1979年将Bowen的6篇文章^[4-9]编辑成书以俄文出版，书名就叫《符号动力学方法》。他和M. V. Yakobson为此书合写了一篇附录。这篇附录的英文译本^[10]稍后作为综述文章在综述刊物《物理报告(Phys. Rep.)》上发表。J. Ford为在物理杂志上发表的这篇纯数学性文章写了前言，强调了符号动力学方法对于物理学基础的深远意义，极度推崇期刊编者大胆的远见卓识，称他们的勇气犹如敢于“在1922年将一篇关于Hilbert空间算符代数的数学评述在《物理评论(Phys. Rev.)》上发表”。也许这种说法并非言过其实。

Milnor和Thurston1977年有上下两篇讨论一维映射符号动力学的文章，题为《揉捏理论》，只以预印本形式流传很长一段时期，对中国读者却是久寻而不可得，近来已正式发表^[11]。Guckenheimer有一篇讲演谈及关于揉捏理论的研究结果^[12]。Collet和Eckmann的书^[13]，虽然数学味较浓，但详尽地讨论了一维映射的符号动力学。

将符号动力学实用化的新近努力始自Metropolis、Stein和Stein的一篇文章^[14]及

Derrida、Gervois和Pomeau的另一篇^[16]。关于符号动力学的论文数目,正在缓慢而稳步地上升。我们在文献目录中仅能列入与我们的讨论关系较为密切的数篇。

中国科学院理论物理所非线性动力学组也开展了映射符号动力学的研究工作,并将符号动力学用于研究微分方程。一些结果已收入新近出版的一本专著^[18]中。(另有简要综述一篇^[17])。该书印行后,又有一些新的进展。关于符号动力学,未见有中文综述。

二、单峰映射的符号序列

我们考虑如下的一维映射

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n), \quad (1)$$

其中 μ 为参数或参数组合。函数 f 将区间 I 变换到自身。以下以一维单峰映射,作为最简单而又非平庸的动力学系统,开始讨论。

2.1 单峰映射

如图1所示,单峰映射 $f(x)$ 有唯一的极值点(又称临界点) C ,它将区间分割成两部分,在 C 点左侧映射函数为上升的,右侧为下降的。映射函数的作用是将图中包含 C 点的区间拉伸,然后折叠一次,置回原区间内。给定区间上一点 x_0 ,以其为初始点进行迭代,可得一条轨道

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, \\ x_i = f(x_{i-1}), \dots \quad (2)$$

如果我们不关心 x_n 在区间上的确切位置,只问其落在 C 点的左侧和右侧,分别记下字母 L 或 R ,如果恰好落在 C 上则记 C 。于是,由轨道(2)可得一个符号序列

$$s_0 s_1 s_2 \dots s_n \dots, \quad (3)$$

其中,

$$s_k = \begin{cases} L \\ C \\ R \end{cases} \quad \text{如果} \quad x_k \begin{cases} < C, \\ = C, \\ > C, \end{cases} \quad (4)$$

这里的符号序列只涉及两种字母 L 和 R (字母 C 可认为是退化的 L 或 R),这是最简单的情形。显然,符号序列(3)比之轨道(2)在描述方法上粗糙得多。然而,这种只问左右

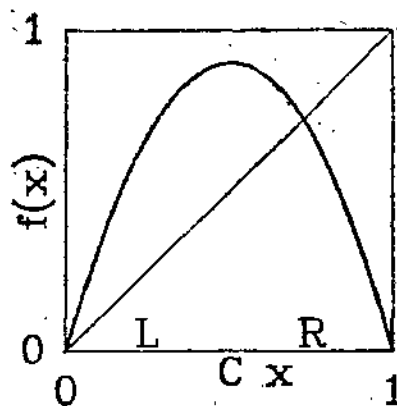


图1 单峰映射函数 $f(x)$ 有唯一的极值点 C ,其左侧为上升支 L ,右侧为下降支 R 。

的粗粒描述, 却带来许多简化且更能反映某些本质。首先, 轨道与符号序列间的多一对对应, 提供了将不同轨道按等价类分类的方法, 便于进一步分析研究。其次, 符号序列只反映映射拉伸和折叠的本质, 不同映射函数的具体形式, 只问单调性, 于是, 由分析符号序列所得到的结果可有极大的普遍性, 便于刻划和分析共性, 对动力学系统进行科学的分类。

既然符号动力学的研究对象是符号序列, 首先必须了解对于给定的单峰映射, 什么样的符号序列可以出现, 以及对于给定的符号序列是否可找到一单峰映射的一条轨道与该符号序列相对应。这就是允字条件, 它是决定一个符号序列或一个字应予禁止或允许的规则。在讨论允字条件之前, 必须引进符号序列排序的概念。

2.2 符号序列的排序

我们知道, 区间上取定一点 x 为初始点, 则经迭代可获得一条轨道, 进而有一符号序列 $I(x)$, $I(x)$ 将称作 x 的符号序列, 由此建立符号序列和空间点之间的对应。由于粗粒化, 不同相空间点可对应同一符号序列。一个极简单的例子如图 2 所示, 容易看出, 区间上在 C 点右侧的所有点, 符号序列均为 RL^{∞} , 而在 C 点的左侧则为 L^{∞} 。区间上所有点的符号序列只能是 RL^{∞} 、 CL^{∞} 和 L^{∞} 三种之一。

显然, 不同的符号序列必定对应于相空间的不同点, 否则将与映射为决定论性的前提相悖。如果区间上两点的符号序列不同, 则可将区间上此二点的大小序自然地赋予它们的符号序列, 即以位居右边之点的符号序列为大, 或以式子表作

$$x > y \Rightarrow I(x) \geq I(y) \quad (5)$$

如果 x 的符号序列为 $I(x) = s_0 s_1 s_2 \dots s_n s_{n+1} \dots$, 其 n 次迭代为 $f^n(x) = y$, 则显然应有 y 的符号序列为 $I(y) = s_n s_{n+1} \dots$ 。然而, 一般不能反过来写 $x = f^{-n}(y)$, 因为此处逆函数 f^{-1} 不单值, 即可取左支也可取右支求逆。分别记左、右支之逆为 f_L^{-1} 和 f_R^{-1} , 在指定左、右支之后, 逆函数便单值地定义了。例如 $I(x) = RLRLRL \dots$ 且 $y = f^4(x)$ 时, 应有 $x = f_R^{-1} \circ f_L^{-1} \circ f_R^{-1} \circ f_R^{-1}(y)$ 且 $y < 0$ 。由这个例子可以看出, 字母 R 和 L 分别与逆函数 f_R^{-1} 和 f_L^{-1} 相对应, 以后只要不引起混淆, 我们也直接以 R 和 L 记 f_R^{-1} 和 f_L^{-1} 。相应地, 上例可写作 $x = RLRLR(y)$ 。

轨道点一字母一逆函数的对应关系, 是符号动力学中基本关系, 有必要再说几句。如果 x_0 的符号序列为 $s_0 s_1 s_2 \dots s_n \dots$, 由字母与逆函数的对应有如下的逆函数关系式

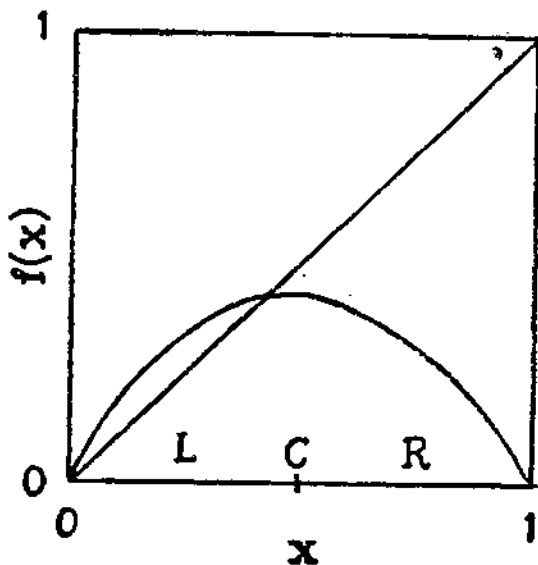


图2 不同峰高的单峰映射。

$$x_1 = s_0(x_1) = s_0 s_1(x_1) = \cdots = s_0 s_1 \cdots s_{n-1}(x_n), \quad (6)$$

两边作用以 f 则有

$$\begin{aligned} f(x_0) &= s_1 s_2 \cdots s_{n-1}(x_n), \\ f^2(x_0) &= s_2 s_3 \cdots s_{n-1}(x_n), \end{aligned} \quad (7)$$

等等, 体现出映射和移位的对应关系。

函数的升降决定于一阶微商。由逆函数和复合函数的微商规则知, 任意有限个单调函数逆函数的多重复合函数, 其升降性仅决定于复合函数所含降函数的个数, 个数为奇则复合函数为降, 否则为升。以下我们由此规则推出符号序列排序规则。

两个符号序列不同的最简单情形为 $\Sigma_1 = R \cdots$ 和 $\Sigma_2 = L \cdots$ 。如果区间上某点的符号序列为 Σ_1 , 则根据定义它应在 C 点右侧, 而以 Σ_2 为符号序列的点必在左侧, 根据序列的排序约定, 应有 $\Sigma_1 > \Sigma_2$ 。这对应于自然序 $L < C < R$ 。如果两个序列第一个字母相同, 但第二个字母不同, 这时须区分两种情形。首字母为 L 时, 如 $I(x) = LR \cdots$, 和 $I(y) = LL \cdots$, 于是

$$x = f_L^{-1}(R) > f_L^{-1}(L) = y,$$

此处记 $f_L^{-1}(R)$ 为某个正数的 f_L^{-1} 函数值, $f_L^{-1}(L)$ 为负数的函数值, 上式是 f_L 为升函数的直接结果。首字母均为 R 时, 因 f_R 为降函数, 有倒序关系 $f_R^{-1}(R) < f_R^{-1}(L)$ 。于是得涉及二字母的排序规则:

$$LL < LR < RR < RL.$$

一般的情形下, 两个序列 Σ_1 和 Σ_2 有一公共字头 Σ , 随后出现第一个不同的字母, 如

$$\Sigma_1 = \Sigma R \cdots, \quad \Sigma_2 = \Sigma L \cdots, \quad \Sigma = s_0 s_1 s_2 \cdots s_{n-1}.$$

此处 s_i 只取 R 或 L 。如果某个 s_i 恰巧为 C , 则两序列必相同而不予考虑。如果有两点 x_1 和 x_2 分别以 Σ_1 和 Σ_2 为其序列, 则 x_1 可通过在 C 点右侧取某合适点施加复合函数 Σ 而获得, x_2 则相应于 C 点左侧某点, 即 $x_1 = \Sigma(R)$ 及 $x_2 = \Sigma(L)$, 此式 Σ 现在指函数。上面讲过, 复合函数 Σ 的升降性取决于它所含下降函数总数的奇偶性即字符串 Σ 中字母 R 的数目的奇偶性, 具体说, 如果 R 的总数为奇, 则 Σ 为降函数, 否则 Σ 为升函数。据此, 可方便地约定字母 L 的偶性为 $+1$, R 的偶性为 -1 , C 的偶性相应地定作 0 。由字母 R 和 L 组成的一个有限字符串或字节, 如果它所含字母 R 的数目为奇, 则称奇字节, 否则称偶字节, 与它所含字母 L 的数目无关。于是, Σ 为偶字节时, 应有 $\Sigma_1 = \Sigma R \cdots > \Sigma L \cdots = \Sigma_2$, 而 Σ 为奇字节时 $\Sigma_1 < \Sigma_2$ 。

比较两个符号序列时, 须找出最长公共字节及其随后的第一个不同字母, 我们称公共字节加上第一个不同字母组成的字节作主字节。 Σ 为偶时, Σ_1 和 Σ_2 中较大者 Σ_1 有主字节 ΣR 为奇, Σ 为奇时, 较大者为 Σ_2 , 它的主字节为 ΣL , 此时也为奇的。最后, 可归纳出如下的

排序规则 两个不同的符号序列, 以主字节为奇者为大。

如果另有符号序列 $\Sigma_0 = \Sigma C \dots$, 即公共字节以 C 后继, 则不难看出, Σ_0 必在 Σ_1 和 Σ_2 之间。因此, 定出 Σ_1 和 Σ_2 的顺序后, Σ_0 相对于 Σ_1 和 Σ_2 的顺序也自然地决定了。

假定一条周期 5 的轨道有符号序列为 $(RLRRL)^\infty$, 根据排序规则可定出轨道五点相空间中的排序。以 $I_0 = (RLRRL)^\infty$ 为第 0 点 x_0 , 它的一次迭代为 $I_1 = (LRRLR)^\infty$, 得第 1 点 x_1 , 依此类推可得五点如表 I。序列 I_1 和 I_4 以 L 为首字母, 显然有 $\{I_1, I_4\} < \{I_0, I_2, I_3\}$, 两序列 I_1 和 I_4 的主字节分别为 LRR 和 LRL , 后者为奇, 所以, $I_1 < I_4$ 。确定主

表 I

符号序列 $(RLRRL)^\infty$ 的移位及其排序

迭代序号 n	符号序列 I_n	大小序
0	$RLRRL \dots$	1
1	$LRRLR \dots$	5
2	$RRLRL \dots$	3
3	$RLRLR \dots$	2
4	$LRLRR \dots$	4

字节再检验其奇偶, 类似地可得 $I_0 > I_3 > I_2$ 。最后得五个序列的排序为 $I_0 > I_3 > I_2 > I_4 > I_1$ 。

以下给出比较两个不同符号序列大小的一个 BASIC 程序:

```

5  REM PROGRAM FOR COMPARING TWO DIFFERENT WORDS
10  DEFINT I-P: CLS
20  INPUT "THE FIRST WORD IS: ", S1$
30  INPUT "THE SECOND WORD IS: " S2$
40  N=LEN(S1$):P=1
50  FOR I=1 TO N: C$=MID$(S1$, I, 1)
60  IF C$="R" THEN P=-P
70  IF C$ < MID$(S2$, I, 1) THEN GOTO 90
80  NEXT I
90  BS="GREATER": IF P=1 THEN B$="SMALLER"
100 PRINT S1$: "IS ", BS, " THAN ", S2$: "."
110 STOP:END

```

这个程序中整变量 P 为字节偶性指标, 奇字节有 P 为 -1 , 每遇一字母 R , 它改变一次符号(见语句 60)。

显而易见, 所有符号序列中以 L^∞ 为最小, 因为与任何其它序列相比, 它的主字节永远为偶; 也不难看出, 最大的符号序列为 RL^∞ , 因为与任何其它序列相比, 它的主字节永远为奇。以 L^∞ 与 0 对应, RL^∞ 与 1 对应, 可建立 R 和 L 的符号序列与 $[0, 1]$ 上实数间的一一对应关系。由排序规则还可以证明, 如果 $\Sigma_1 = \Delta \sigma_1 \sigma_2 \dots$ 和 $\Sigma_2 = \Delta \tau_1 \tau_2 \dots$ 均以奇字节 Δ 起首, 则 $\Sigma_1 > \Sigma_2 \iff \sigma_1 \sigma_2 \dots < \tau_1 \tau_2 \dots$, 即奇字头倒序。由 $\Sigma_1 > \Sigma_2$, 得 Σ_1 的主

字节为奇,又由二为奇,得子序列 $\sigma_1\sigma_2\cdots$ 和 $\tau_1\tau_2\cdots$ 中前者的主字节必为偶,充分性得证。必要性的证明完全类似,从略。请注意,此处子序列 $\sigma_1\sigma_2\cdots$ 和 $\tau_1\tau_2\cdots$ 可含公共字节。

三、揉序列和允字条件

有了符号序列的排序规则后,允字条件可“看图识字”地由映射函数的图形读出。由图1可知,函数在C点取最大值。设C点的符号序列为 $I(C) = c s_0 s_1 \cdots s_n \cdots$,并设在C点左、右两侧任意二点 x_L 和 x_R 有符号序列 $I_L = L l_0 l_1 \cdots$ 和 $I_R = R r_0 r_1 \cdots$,则应有

$$\begin{aligned} r_0 r_1 \cdots &\leq s_0 s_1 \cdots s_n \cdots, \\ l_0 l_1 \cdots &\leq s_0 s_1 \cdots s_n \cdots, \end{aligned} \quad (8)$$

因为 x_L 和 x_R 的迭代值必须小于 $f(C)$ 。点 $f(C)$ 的符号序列决定了字母L和R的可能后继序列, $f(C)$ 的序列将特别地称作揉序列,并记作K。

3.1 允字条件

给定任一符号序列,以L记序列中所有字母L的后继序列,R的意义类推。例如,对于序列 $(RLRRL)^\infty$ 有

$$\begin{aligned} L &= \{(RRLRL)^\infty, (RLRRL)^\infty\}, \\ R &= \{(LRRLR)^\infty, (RLRLR)^\infty, (LRLRR)^\infty\}. \end{aligned}$$

采用记号L和R,单峰映射的允字条件可表述如下:如果符号序列 Σ 是允许的,则应满足

$$L \leq K, \quad R \leq K.$$

前面说过,一个符号序列可以对应相空间的一个子区间,也可只对应于区间上一点。如果K只代表一点,例如在K含字母C时,则允字条件中的等号不出现。

设有揉序列 $K = (RLL)^\infty$,此时符号序列 $(RLRRL)$ 就是允许的,因为它的L和R共五个序列如表I所列,均满足允字条件。但是,对于同一K,符号序列 $RLRL^3R\cdots$ 就是禁止的,因为这时有

$$K < RL^3R \cdots \in L,$$

违反允字条件。

我们定义符号序列的移位算符 $\mathcal{S}$ 如下:

$$\mathcal{S}(s_0 s_1 s_2 \cdots s_n \cdots) = s_1 s_2 \cdots s_n \cdots \quad (9)$$

因为揉序列本身也必须满足允字条件,所以揉序列必须是移位最大的,即

$$\mathcal{S}^k(K) \leq K, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \quad (10)$$

因为 $f(c)$ 随参数而变,所以揉序列也可随参数发生变化。但是,无论如何变化,单峰映

射的揉序列总是移位最大的, 反过来说, 移位最大序列可成为单峰映射的揉序列, 于是这时可称移位最大序列为揉序列字。

给定的揉序列下, 允许的符号序列或允许字可有相空间的对应点, 即可找到区间上某点, 它的轨道与该序列符合。不被允许的符号序列, 也称禁戒字, 不可能在区间上找到对应点。允许字有可能大于揉序列, 例如, $RL^3(RLRRL)^\infty$ 是 $K = (RLL)^\infty$ 时的允许字, 有

$$RL^3(RLRRL)^\infty > K.$$

但是, 至多经过一次移位后, 任何允许字将必小于揉序列。对于如图 3 以粗线段标出的子区间 $U = [f^2(C), f(C)]$, 任何在 U 之外的点, 经过有限次迭代后, 必定落入 U 。

因为 $f(U) = U$, 一旦经过平庸的暂态过程落入 U 后, 就永远在 U 内。区间 U 称为映射的动力学不变子区间。如果对平庸暂态过程不感兴趣, 可只限于考虑子区间 U 。 U 上所有点的符号序列均不大于揉序列 K 。

也许在这里可说几句暂态过程。假定在某参数值下映射有稳定周期轨道, 我们任取一点为初始点, 数值地寻找这个周期轨道。如果初始点不恰好为周期点且计算精度是无限的, 则永远处于暂态状态, 周期点永远不可及。只是因为精度有限, 我们才迟早可看到周期运动。然而, 采用符号描述时, 最终得到周期字节, 处理暂态更显自然, 这也可见符号动力学粗粒描述的方便之处。数学文献中用到“终周期序列”一词, 它可对应于暂态, 也可属非暂态, 后者将在下文讨论。

现在证明两条简单命题:

(1) 除 L^∞ 和 R^∞ 外, 揉序列字必以 RL 起首。假设存在一个揉序列字不以 RL 起首, 则它必以 $L^n R (n \geq 1)$ 或 $R^m L (m \geq 2)$ 起首, 但是,

$$L^n R \cdots < \mathcal{S}^n(L^n R \cdots) = R \cdots,$$

或者

$$R^m L \cdots < \mathcal{S}^{m-1}(R^m L \cdots) = RL \cdots,$$

均与揉序列字的移位最大性矛盾, 命题得证。

(2) 揉序列字不得以重复的奇字节开头, 除非它为该字节的周期序列。假设揉序列字 K 以重复的奇字节 Δ 起首而又不是 Δ^∞ , 将 Δ 所含字母数 n 称作其长度, 记作 $|\Delta| = n$, 则可写 $K = \Delta \Delta \Gamma \cdots$, 此处 $\Gamma \cdots \neq K$ 且 $|\Gamma| = |\Delta|$ 。因为 K 为揉序列字, 应有

$$\Delta \Delta \Gamma \cdots \geq \mathcal{S}^n(K) = \Delta \Gamma \cdots.$$

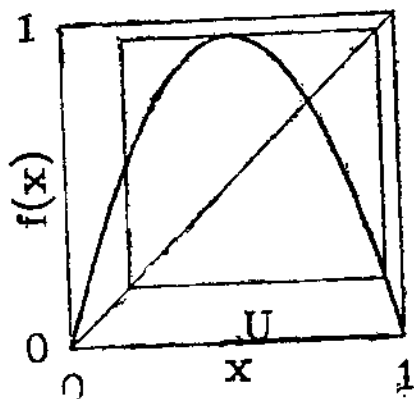


图3 动力学不变子区间 $U = [f^2(C), f(C)]$ 。
 U 上任意点的符号序列均不大于揉序列。

因为奇字头导致倒序, 所以由上式得 $\Delta\Gamma\cdots\leq\Gamma\cdots$, 亦即 $\Delta\leq\Gamma$ 。再由

$$\Delta\Delta\Gamma\cdots\geq\varphi^{2n}(K)=\Gamma\cdots,$$

又有 $\Delta\geq\Gamma$ 。最后只可能 $\Delta=\Gamma$ 。依次类推, 应有

$$K=\Delta^3\cdots=\Delta^4\cdots=\cdots=\Delta^*,$$

与 $K\neq\Delta^*$ 的假定矛盾。命题得证。

最后给出检验以C结尾的符号序列是否为揉序列字的BASIC程序:

```
5 REM PROGRAM FOR CHECKING ADMISSIBILITY
10 DEFINT I-P, PRINT "PLEASE SET CAPS-LOCK KEY ON."
20 INPUT "THE WORD TO BE CHECKED IS, "; S$
30 N=LEN(S$)
40 FOR I=1 TO N-1: P=1: FOR J=1 TO N-1
50 C$=MID$(S$,J,1): IF C$="R" THEN P=-P
60 IF C$>MID$(S$,I+J,1) THEN GOTO 30
70 NEXT J
80 IF P=1 THEN PRINT "THE WORD IS INADMISSIBLE."; STOP
90 NEXT I: PRINT "THE WORD IS ADMISSIBLE."; STOP
100 END
```

3.2 超稳揉序列和MSS表

对于单峰映射, 揉序列决定了给定映射下可能出现的所有符号序列, 实际可出现的任意符号序列, 至多经一次移位操作后, 必不大于揉序列。由于揉序列直接反映动力学, 它可方便地作为映射参数的一个度量, 而称给定映射为揉序列取某字的映射。

揉序列含字母C时, 称作超稳揉序列。对于给定的一条周期轨道, 常以由一阶微商给出的切变换划划轨道点对初值微扰的敏感性。当该周期轨道含临界点C时, 由复合函数一阶微商的链乘法则知, 它有最小敏感性, 因此, 这样的轨道称为超稳轨道, 相应地, 与之对应的含字母C的揉序列得名超稳揉序列。通常超稳揉序列只写至第一个字母C, 而不特别明显地写出无穷周期重复。

实际观测及数值计算精度均有限, 人们往往通过认识周期轨道及其切空间去把握系统动力学行为。这是周期轨道在研究混沌中的意义。以下将看到, 有超稳揉序列, 则必有与之关联的非超稳周期揉序列, 因此, 短超稳揉序列具有特别重要的意义。将字长不超过某给定整数 n 的所有超稳揉序列, 依从小到大的顺序排列成表, 就是第 n 级MSS超稳揉序列排序表, 简称MSS表, 最先由Metropolis、Stein和Stein得到^[1]。这里在表II给出第7级MSS表。

3.3 周期窗口定理

Metropolis, Stein和Stein最初找排序表时, 引入了一个符号序列的谐序列和反谐序列的概念, 提出了获得介于给定的两个超稳揉序列之间的最短超稳揉序列即中介字的

表 II, 第 7 级 MSS 表

操 序 列	周 期
C	1
RC	2
$RLRC$	4
RLR^3C	6
RLR^4C	7
RLR^5C	5
RLR^5LRC	7
RLC	3
RL^2RLC	6
RL^3RLRC	7
RL^3RC	5
RL^2R^3C	7
RL^2R^3C	6
RL^2R^2LC	7
RL^2C	4
RL^3RLC	7
RL^3RC	6
RL^3R^2C	7
RL^3C	5
RL^4RC	7
RL^4C	6
RL^5C	7

方法。可是, 操序列的反谐序列不再为操序列, 反谐序列是人为地引进的, 实际上也无必要, 它既掩盖了推导过程的物理图象, 也不易推广至其它非单峰映射。本文不再介绍他们的方法。这里将采用的方法, 只涉及到单调性和连续性的简单概念, 它以下述定理为基础:

周期窗口定理^[18] 如果 $s_0s_1\cdots s_nC$ 为操序列字, 其中 s_i 为 L 或 R , 则符号序列 $(s_0s_1\cdots s_nL)^*$ 和 $(s_0s_1\cdots s_nR)^*$ 也为操序列字。

定理的证明将在附录 A 中给出, 这里讨论一下它的含义。周期窗口定理 基于连续性, 因为 C 是退化的 L 或 R 。符号序列的周期窗口定理可与映射函数的周期窗口定理相对应。后一定理说, 稳定周期轨道的参数值形成区间, 它又是基于如下的稳函数定理:

假设 $G: R^2 \rightarrow R^1$ 为一次可微函数, 且在点 (x_0, y_0) 处满足 $G(x_0, y_0) = 0$ 和 $\frac{\partial}{\partial y}G(x_0, y_0) \neq 0$, 则存在含 x_0 的开区间 I 和含 y_0 的开区间 J , 以及可微函数 $P: I \rightarrow J$, 它满足 $P(x_0) = y_0$, 且对所有 $x \in I$ 有 $G(x, p(x)) = 0$ 。

根据周期窗口定理, 由一超稳操序列字, 可生成两个非超稳操序列字 $(\Sigma R)^*$ 和

$(\Sigma L)^*$ 。以下将 ΣR 和 ΣL 中较大者记作 $(\Sigma C)_+$, 较小者记作 $(\Sigma C)_-$, 显然恒有 $(\Sigma C)_+$ 为奇。我们将分别称 $[(\Sigma C)_+]^*$ 和 $[(\Sigma C)_-]^*$ 为 ΣC 的上、下序列。

周期窗口定理的逆定理未必成立, 仅须举一反三例便可说明问题。显然 $R = (RRR)^*$ 是揉序列字, 但 RRC 不为揉序列字。然而, 仍可找到如下的修正逆定理: 如果周期符号序列 $(s_0 s_1 \cdots s_n t)^*$ 的揉序列字, 且 $s_0 s_1 \cdots s_n t$ 不可表成更短字节的周期重复(或称不可约), 此处 $s_0, s_1, \cdots, s_n$ 和 t 只取 L 或 R , 则序列 $s_0 s_1 \cdots s_n C$ 也为揉序列字。这个定理的证明与周期窗口定理的证明相似, 仅在最后一步有所差异(见附录A)。

3.4 中介字的生成^[18]

现在运用周期窗口定理求中介字。给定两个揉序列字 $\Sigma_1 C$ 和 $\Sigma_2 C$, 假设 $\Sigma_1 C < \Sigma_2 C$ 由周期窗口定理知, 存在揉序列字 $[(\Sigma_1 C)_+]^*$ 和 $[(\Sigma_2 C)_-]^*$, 满足

$$\Sigma_1 C < [(\Sigma_1 C)_+]^* \leq [(\Sigma_2 C)_-]^* < \Sigma_2 C.$$

如果

$$[(\Sigma_1 C)_+]^* = \Sigma^* \mu \cdots, [(\Sigma_2 C)_-]^* = \Sigma^* \mu \cdots,$$

此处 Σ^* 为两个序列的最长公共字头, 且 $\mu \neq \nu$, 则可证明 $\Sigma^* C$ 即为中介字。显然介于 $\Sigma_1 C$ 和 $\Sigma_2 C$ 之间的所有符号序列必须均以 Σ^* 为字头, $\Sigma^* C$ 为最短无疑, 余下仅须证实共移位最大性。假设 $\Sigma^* C$ 非移位最大, 则存在 $k \leq |\Sigma^*|$, 使得 $\Sigma^* C < \mathcal{S}^k(\Sigma^* C)$ 。不难看出, $\mathcal{S}^k(\Sigma^* \mu)$ 和 $\mathcal{S}^k(\Sigma^* \nu)$ 中总有一个应小于 $\mathcal{S}^k(\Sigma^* C)$, 不妨设它为前者, 则有 $\Sigma^* \mu \cdots < \mathcal{S}^k(\Sigma^* C) < \mathcal{S}^k(\Sigma^* \mu \cdots)$, 与序列 $\Sigma^* \mu \cdots$ 为移位最大的结论矛盾, 于是证实了 $\Sigma^* C$ 的移位最大性。如果 $[(\Sigma_2 C)_-]^* = [(\Sigma_2 C)^-]^*$, 则 $\Sigma_1 C$ 和 $\Sigma_2 C$ 之间不存在中介字, 称 $\Sigma_1 C$ 和 $\Sigma_2 C$ 相邻。

以下给出求字长不超过预设值的中介字的BASIC程序:

```

5  REM PROGRAM FOR CONSTRUCTING MEDIAN WORD
10  DEFINT I-T, P: CLS
20  INPUT "THE SMALLER WORD IS:", S1$
30  INPUT "THE GREATER WORD IS:", S2$
40  INPUT "THE MAX LENGTH OF THE MIDIAN WORD IS:", N
50  N1=LEN(S1$): N2=LEN(S2$)
60  NN=N1-1: S$=MID$(S1$, 1, NN): P=1: GOSUB 200: S1$=S$
70  NN=N2-1: S$=MID$(S2$, 1, NN): P=-1: GOSUB 200: S2$=S$
80  FOR I=0 TO N-1: I1=(I MOD N1)+1: I2=(I MOD N2)+1
90  IF MID$(S1$, I1, 1) < MID$(S2$, I2, 1) THEN GOTO 120
100 NEXT I
110 PRINT "NO MEDIAN WORD SHORTER THAN", N: ".": STOP
120 S$=MID$(S$, 1, I1-1)+ "C": IF I>N1-1 THEN S$=S1$-S$
130 PRINT "THE MIDIAN WORD IS:", S$: ".": STOP
200 FOR I=1 TO NN
210 IF MID$(S$, I, 1) = "R" THEN P = -P

```

```

220 NEXT I
230 C$ = "R": IF P = - 1 THEN C$ = "L"
240 S$ = S$ + C$: RETURN
250 END

```

程序中语句120已用到该序列字不得以重复奇字节为首的性质。

我们知道, 周期不超过 n 的揉序列字中, 最小者 C , 最大者为 $RL^{n-1}C$ 。由此二超稳字可得第一级中介字, 这个中介字分别与最初的两个超稳字, 又可生成第二级中介字, 逐级进行这个手续, 保留其中字长不超过给定整数 n 者, 可得 MSS 表。

超稳揉序列字有两条简单的性质。其一也用在周期窗口定理的证明中, 即如果字长为 n 的超稳揉序列字 ΣC 与其 k 次移位字 $\mathcal{S}^k(\Sigma C)$ 相比, 除后者的末字母 C 外, 所有 $(n - k - 1)$ 个字母完全相同, 则 ΣC 的前 $(n - k)$ 个字母必构成奇字节。其二是由周期为 n 的超稳揉序列字 ΣC , 可生成一个周期 $2n$ 的超稳揉序列字 $(\Sigma C)_+, \Sigma C$, 且二字相邻。首先证明这个倍周期字的移位最大性。如果 $n \leq k < 2n$, 显然有

$$(\Sigma C)_+, \Sigma C > \Sigma C > \mathcal{S}^{k-n}(\Sigma C) = \mathcal{S}^k((\Sigma C)_+, \Sigma C)。$$

当 $1 \leq k < n$ 时, 如果 $\mathcal{S}^k(\Sigma)$ 不构成 Σ 的首字节, 则 ΣC 的移位最大性, 保证了该倍周期字的移位最大性, 否则, 由上一性质, $(\Sigma C)_+$ 的前 $(n - k)$ 个字母构成奇字节, 将之记作 Γ 。此时如 $\mathcal{S}^k((\Sigma C)_+)$ 为偶, 则无须多言。如果该字节与 Γ 相合, 将之移去后须验证

$$\mathcal{S}^{n-k}((\Sigma C)_+, \Sigma C) < \Sigma C,$$

此式当然成立, 因为由 $(\Sigma C)_+$ 及 Γ 为奇得 $\mathcal{S}^{n-k}((\Sigma C)_+)$ 应为偶。于是, 倍周期字的移位最大性得证。再由

$$[(\Sigma C)_+, \Sigma C]^- = [(\Sigma C)_+, (\Sigma C)_+]^- = [(\Sigma C)_+]^-$$

可知单周期字与倍周期字之间无中介字。

四、二次方映射

前面虽经提到, 符号动力学方法将研究对象尽可能地简化, 但符号动力学系统只显示骨骼, 而实际系统则为血肉之躯, 最终还须建立符号动力学系统和实际系统之间的联系, 将符号动力学的结果应用于研究实际系统。本节以符号动力学方法讨论一个实际系统——二次方映射

$$f(x) = 1 - \mu x^2, \quad x \in [-1, 1], \mu \in (0, 2], \quad (11)$$

此式 μ 为参数。这个简单而远非平庸的映射在非线形动力学系统研究中扮演了极重要的角色。在以后深入讨论符号动力学之前, 有必要简要地叙述关于二次方映射的一些重要结果。

数值计算发现, 参数 μ 的大小排序, 与映射(11)的揉序列排序一致。对于任意的单

峰映射而言,情况未必是这样,例如只须对(11)式中的 μ 作一变换 $\mu = \mu(k)$,容易选择变换函数使得两个 k 值可对应于同一 μ 值,于是在参数 k 的空间,该 μ 值对应的揉序列将出现两次。 MSS 表的意义在于,如果在参数 k_1 和 k_2 时分别有不同的揉序列 k_1 和 k_2 ,则必可在 k_1 和 k_2 之间找到某参数 k ,使它对应的揉序列为处于 K_1 和 K_2 之间的任意揉序列。

4.1 由二次方映射产生MSS表

上节介绍了生成中介字的方法,原则上运用该法可得到 MSS 表。符号动力学不问系统细节, MSS 表对于所有单峰映射普适,既然如此, MSS 表也可通过二次方映射的实例产生,这里介绍一个非常实用的方法,给出如下产生 MSS 表的 *BASIC* 程序。

```

5  REM PROGRAM FOR GENERATING MSS-TABLE
6  REM BASED ON THE LOGISTIC MAP
10  CLS: DEFINT I, J
20  SS = "": A = 9: DA = .01
30  S1$ = "": X = 1: FOR I = 1 TO 7
40  B$ = "R": IF X < 0 THEN B$ = "L"
50  X = 1 - A * X * X: S1$ = S1$ + B$
60  NEXT I
70  A = A + BA: IF SS = S1$ THEN GOTO 30
80  FOR J = 1 TO 7
90  IF MID$(SS, J, 1) <> MID$(S1$, J, 1) THEN GOTO 110
100 NEXT J
110 PRINT J, "P", MID$(S1$, 1, J-1), "C"
120 IF S1$ = "RLLLLLL" THEN STOP
130 DA = .9 * DA: S$ = S1$: GOTO 30
140 END

```

以上程序可打印出第7级 MSS 表,不难将程序改写得更为一般些。参数变化的步长在程序运行中逐步缩小,以免某些超稳揉序列字可能漏网。必要时须检验表中揉序列字彼此相邻。这个程序的主要目的在于说明,运用确定中介字的原理,可不浪费任何数据地确定短周期的存在,周期长度就是所需的迭代次数,不必担心暂态过程。粗粒化的优越性由此又可窥一斑。

4.2 提升符号字的参数确定法

对于实际系统,往往希望知道给定的超稳揉序列字所对应的参数值。例如,取 $K = RLR^2C$ 时,问参数 μ 应为何值。一个办法是所谓参数提升法,它在各支逆函数可知时有效。映射(11)属这种情形,它有两支逆函数如下。

$$R(y) = f^{-1}_R(y) = \sqrt{\frac{1}{\mu}(1-y)},$$

$$L(y) = f^{-1}_L(y) = -\sqrt{\frac{1}{\mu}(1-y)}. \quad (12)$$

因为 $K = RL R^2 C$ 意味着

$$f(0) = RoLoRoR(0), \quad (13)$$

将(13)式代入可得

$$1 = \sqrt{\frac{1}{\mu}} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{\mu}} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{\mu}} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{\mu}} \right) \right) \right). \quad (14)$$

这个决定参数 μ 的方程, 两边同乘以 μ 后可化成如下的迭代不动点问题^[10]:

$$\mu_{n+1} = \sqrt{\mu_n + \sqrt{\mu_n - \sqrt{\mu_n - \sqrt{\mu_n}}}}. \quad (15)$$

选择适当初值最后可求得 $\mu = 1.625413725$ 。对于表 II 所列的另外两个周期与揉序列字 $RL^2 RC$ 和 $RL^3 C$ 只须改变(15)式右端表达式中的某些加减号。这里可以看到, 符号动力学考虑逆迭代, 它消除了正迭代下同字长揉序列字的“简并”, 这在周期较长而简并度很高时, 尤为重要。

4.3 二分法参数确定法^[31]

在映射函数求逆容易时, 符号字提升法可用于求参数。此外, 还可用二分法确定参数, 它直接利用符号序列, 非常简便。仍以 $K = RL R^2 C$ 为例。设初始参数值 μ_1 和 μ_2 下分别有揉序列字 K_1 和 K_2 , 且 $K_1 < K < K_2$ 。取 $\mu' = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ 求 K' , 如果 $K' > K$, 则可取 μ' 为新的 μ_2 , 否则取 μ' 为新的 μ_1 , 继续二分。重复此过程直至精确地求出待定的 μ 值。以下是为此目的而写的一个 BASIC 程序。

```

5  REM BISECTION METHOD FOR DETERMINING PARAMETER
10  CLS: DEFINT I-P
20  INPUT "THE WORD IS: ", S$: PRINT
30  A1 = 1, A2 = 2, N = LEN(S$), DA = .000001, A = A2
40  X = 1, S1$ = ""
50  FOR I = 1 TO N: B$ = "R": IF X < 0 THEN B$ = "L"
60  X = 1 - A * X * X, S1$ = S1$ + B$
70  NEXT I
80  P = 1, FOR I = 1 TO N: C$ = MID$(S1$, I, 1)
90  IF C$ = "R" THEN P = -P
100 IF C$ <> MID$(S$, I, 1) THEN GOTO 120
110 NEXT I
120 IF P = -1 THEN A2 = A ELSE A1 = A

```

```

130 A=.5*(A1+A2): IF A-A1>DA AND A2-A>DA THEN GOTO 40
140 PRINT "THE PARAMETER IS: ", A: ", STOP
150 END

```

4.4 分支图的自相似

一维单参数映射的分支和混沌结构,可用分支图形象地描述。以参数空间为横坐标,以相空间为纵坐标,画下不同参数值下的渐近轨道,就是分支图。如果分辨率足够高,则可辨认出许多倍周期系列及半周期混沌带系列。这样的分支图屡见不鲜,这里就不再给出。(稍后我们将给出立方映射的分支图。)在二次方映射(11)的分支图上极易看到下述轨道:

参数 μ	1.0	1.3107	1.3315	1.40115	1.436	1.5437	1.75	2.0
符号序列	RC	RLRC	RLR ³ LRC	R*	RLR ² (RL)	RLR ⁺	RLC	RL

这里列出的某些代表性揉序列字,将在下节解释。

轨道 $\{x_n\}$ 的稳定性决定于稳定性指标 $S = \prod_{i=1}^n |f'(x_i)|$ 。由分支理论知,倍周期分支在 $S = -1$ 时发生。于是,发生倍周期分支的周期符号序列,其基本字节必须为奇。由上节知,有揉序列字 ΣC ,则有窗口 $((\Sigma C)_-, \Sigma C, (\Sigma C)_+)$,窗口的偶性为 $(+, 0, -)$,另有倍周期揉序列字 $(\Sigma C)_+ \Sigma C$ 。因而,如果基本字节为奇,如 $(\Sigma C)_-$,则轨道的周期可与比基本字节等长或为其两倍。如果基本字节为偶,则二者等长。

在 $\mu = 1.75$ 处,混沌带突然消失,出现周期3。在周期3之前的这个混沌区,是所谓的阵发混沌。下节将从符号动力学角度考察阵发混沌。

取分支图中由RC至RLR的一段,适当放大,可得整个原始分支图的两套叠置的复制。这可称作沿参数轴的自相似性。事实上,选择于图经适当标度而复制全图的方式有无穷多种。

此外,如果考察在倍周期分支的累积点(参数 $\mu = 1.40115\cdots$)处单一轨道,取其在区间上的一小段轨道点,经适当放大,可获得全轨道的复制。这可称为相空间的自相似性。

这两种自相似性都是符号序列变换规律的表现。这些变换规律的讨论,是符号动力学的重点之一,将是下节的内容。

4.5 周期系的数目^[20,21]

不能写成 $(\Sigma C)_- \Sigma C$ 或 $((\Sigma C)_+, (\Sigma C)_-)^n$ 形式的揉序列字,称基本字,由基本字出发经逐次倍周期分支所得所有倍周期字的总体,称属于该基本字的周期系。以下讨论基本字的周期长度为 n 时周期系的数目 $M(n)$ 。周期长度为 n 的所有符号序列有 2^n 种,此处不考虑字母C,因为它不过是R或L的退化。其中显然含 R^n 和 L^n ,它们应属于周期1的周期系。于是,如果 p 为质数,则应有

$$2^p - 2 = 2PM(p) \quad (17)$$

此处右边的系数 $2P$ 中的2计及 ΣR 和 ΣL 属同一周期系的事实, P 则是循环计数。于是,有

$$M(P) = \frac{2^{P-1} - 1}{P}. \quad (18)$$

这个在 P 为质数时准确的公式, 对非质数 P 也是很好的近似。对于 n 为非质数的一般情形, 我们需要考虑 n 的因子 d , 因为属于周期 d 的周期系中的符号序列应排除在 $M(n)$ 之外。最后, 有如下的递推公式^[21]:

$$M(n) = \frac{1}{2n} \left[2^n - 2 - \sum_{i=1}^k 2^i - 2 \sum_{\{d: d|n\}}^{1 < d < n} d M(d) Q(d) \right], \quad (19)$$

其中 $d|n$ 表示 d 可整除 n 。(19)式右边的第一个求和项, 在 $n = \text{奇数} \times 2^k (k \geq 1)$ 时出现。第二个求和项中的因子 $Q(d) = 2^l$, 而 l 又来自 n 的分解 $n = d \times \text{奇数} \times 2^l (l \geq 0)$ 。这个式子是递归深度随 n 变化的一组方程, 可以取 $M(2) = 0$ 作为初条件; 当 n 为质数时, 它退化为(18)式。由公式(19)计算直至 $n = 15$ 的 $M(n)$, 结果见表。表中也列出反称立方映射的周期系数目, 该映射也有类似的 $M(n)$ 公式, 详见文献22。

表: 周期系的数目

n	二次方映射	反称立方映射
1	1	1
2	0	0
3	1	2
4	1	4
5	3	12
6	4	28
7	9	78
8	14	200
9	28	546
10	48	1464
11	93	4026
12	165	11040
13	315	30660
14	576	85332
15	1091	239144

4.6 分支图中的暗线

所有一维映射的分支图都有一个特点, 即许多条暗线穿过其间, 并构成混沌带的边界。某种意义上可说它们勾勒出分支图的轮廓。这些暗线的方程极易写出。用同样的映射函数, 可递归地写下参数 μ 的一族函数 $\{P_n(\mu)\}$ 如下^[23]: