1979年全国部分省市

高考数学模拟试题解答

浙江省杭州市第一中学高中数学组

1979年全国部分省市

高考数学模拟试题解答

浙江省杭州市第一中学高中数学组

说　明

为了供我校高中学生高考复习和自学参考，我组收集了1979年全国部分省市高考数学模拟试题数十套，并作了解答。限于我们水平，加之时间匆促，书中存在的缺点和错误，恳切希望广大师生批评指正。

杭州市第一中学高中数学教研组

一九八〇年三月

目　　录

一九七九年全国高等学校统一招生
数学试题付卷（理工科）

一、计算 $\operatorname{tg}5^\circ+\operatorname{ctg}5^\circ-2\sec 80^\circ$ （6 分）

解 原式 $=\dfrac{\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ}+\dfrac{\cos 5^\circ}{\sin 5^\circ}-2\csc 10^\circ$

$$=\frac{\sin^2 5^\circ+\cos^2 5^\circ}{\sin 5^\circ\cos 5^\circ}-\frac{2}{\sin 10^\circ}$$

$$=\frac{2}{\sin 10^\circ}-\frac{2}{\sin 10^\circ}=0.$$

注意：象上式含正、余切，又含有正、余弦或正、余割，一般常皆化为正、余弦.

二、在实数范围内分解因式 $x^3-9ax^2+27a^2x-26a^3$ $(a\neq 0)$ （6 分）

解 原式 $=x^3-3x^2(3a)+3x(3a)^2-(3a)^3+a^3$

$=(x-3a)^3+a^3=(x-2a)(x^2-7ax+13a^2)$

$\because$ $x^2-7ax+13a^2$ 的判别式：

$\Delta=(-7a)^2-4\times 13a^2=-3a^2<0$,

$\therefore$ $x^2-7ax+13a^2$ 在实数范围内不能再分解.

三、设长方体棱长分别为 a、b、c，写出并证明长方体对角线的长度公式. （6 分）

解 设长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ （如图），

它的三度分别为 $A'D'=a$，$A'B'=b$，$AA'=c$，

$\therefore$ 它的对角线长度公式是 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

证明如下： 连 $B'D'$ 和 DB'，

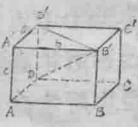
在直角$\triangle A'B'D'$中，$B'D'^2=A'D'^2+A'B'^2$

$$=a^2+b^2,$$

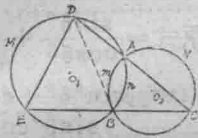
又在直角$\triangle DD'B'$中，$DB'^2=B'D'^2+DD'^2$

$$=(a^2+b^2)+c^2,$$

$\therefore\quad DB'=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.



（第三题）



（第四题）

四、如图，设圆O_1与圆O_2交于A、B两点，C为弧$\overset{\frown}{ANB}$上（不包括A、B两点）任意一点，直线CA、CB分别与圆O_1相交于D、E两点，求证弦DE为定长．（6分）

证1：连结BD，则$\angle DBE=\angle C+\angle CDB$

$\because\quad \overset{\frown}{AmB}$为定长，　　$\therefore\quad \angle C$为定值．

同理$\angle CDB$也为定值，　$\therefore\quad \angle DBE$为定值，

故$\overset{\frown}{DME}$为定长，　　$\therefore$　弦DE为定长．

证2：$\because\quad \overset{\frown}{AmB}$为定值，$\therefore\quad \angle C$为定值．

又　$\angle C=\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{DME}-\overset{\frown}{AnB}\right)$的度数

而　$\overset{\frown}{AnB}$为定值，　　$\therefore\quad \overset{\frown}{DME}$也为定值，

故弦DE为定长．

五、解方程组$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=abx+1\\[2ex]\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=aby+1\end{cases}$

$$\left(ab\neq 0,\ \frac{1}{a}\pm\frac{1}{b}\neq ab\right)\quad (10分)$$

解1. 原方程组整理得

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{a}-ab\right)x+\frac{1}{b}y=1 & ①\\ \frac{1}{b}x+\left(\frac{1}{a}-ab\right)y=1 & ②\end{cases}$$

$\because\ ab\neq 0,\ \frac{1}{a}\pm\frac{1}{b}-ab\neq 0,$ 消元可得

$$x=\frac{\frac{1}{a}-ab-\frac{1}{b}}{\left(\frac{1}{a}-ab\right)^2-\left(\frac{1}{b}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-ab}=\frac{ab}{a+b-a^2b^2},$$

$$y=\frac{\frac{1}{a}-ab-\frac{1}{b}}{\left(\frac{1}{a}-ab\right)^2-\left(\frac{1}{b}\right)^2}=\frac{ab}{a+b-a^2b^2}.$$

$$\therefore\begin{cases}x=\frac{ab}{a+b-a^2b^2},\\ y=\frac{ab}{a+b-a^2b^2}.\end{cases}$$

解2：

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=abx+1 & ①\\ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=aby+1 & ②\end{cases}$$

①−②，得$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)x+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)y=ab(x-y),$

$$\therefore\ \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-ab\right)(x-y)=0,$$

$$\because \quad \frac{1}{a}-\frac{1}{b}-ab\neq 0, \quad \therefore \quad x=y.$$

代入①，得 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-ab\right)x=1$.

$$\because \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\neq ab, \quad \therefore x=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-ab}=\frac{ab}{a+b-a^2b^2},$$

$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{ab}{a+b-a^2b^2}, \\ y=\dfrac{ab}{a+b-a^2b^2}. \end{cases}$$

注意：在解方程(或方程组)时遇到$ax=b$时，必须特别注意 $a\neq 0$ 才可得 x 的唯一解. 如题中没有此条件，必须加以讨论.

六、给定$\lg 2=0.30$，$\sqrt{10}=3.16$，估计2^{64}这个大数的近似值，并写出这个数的读法(例如3.2×10^4读作三万二千)

(10分)

解1：$\because \quad \lg 2^{64}=64\lg 2=64\times 0.30=19.2=18+1.2$,

又$\because \quad \lg 2^4=4\lg 2=4\times 0.30=1.2$,

$\therefore \quad \lg 2^{64}=\lg 10^{18}+\lg 2^4=\lg(10^{18}\times 16)$

$=\lg(1.6\times 10^{19})$,

$\therefore \quad 2^{64}=1.6\times 10^{19}$,

这个数的读法是一千六百亿亿.

解2：$\because \quad \lg 2^{64}=64\lg 2=64\times 0.30=19.2$ ①

又$\because \quad \frac{1}{2}\sqrt{10}=\frac{1}{2}\times 3.16=1.58$

$\therefore \lg\frac{1}{2}\sqrt{10}=\lg 1.58$，即$\lg 2^{-1}+\lg 10^{\frac{1}{2}}=\lg 1.58$,

$$\therefore \frac{1}{2}\lg 10-\lg 2=\lg 1.58,\text{ 即}\lg 1.58=0.2 \quad ②$$

由①、②可知，2^{64}与1.58这两个数的对数的尾数相同，所以这两个数的有效数字相同，仅仅是小数点的位置不同，

$$\therefore 2^{64}=10^{19.2}=10^{19}\times 10^{0.2}=10^{19}\times 1.58$$

$$\approx 1.60\times 10^{19},$$

这个数读作一千六百亿亿.

七、在 $0<x<\pi$ 内解三角方程

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0. \qquad (12\text{分})$$

解：$2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}+2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=0,$

$$\sin\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0$$

$\therefore \sin\frac{5x}{2}\cdot\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}=0$

$\because 0<x<\pi,\quad \therefore 0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}.$

$\therefore$ 由$\cos x=0$， 得 $x_1=\frac{\pi}{2}$，

由 $\cos\frac{x}{2}=0$， 得 $x=\pi$（不合，舍去），

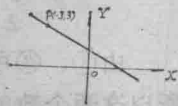
由 $\sin\frac{5x}{2}=0$， 得 $x=\frac{2k\pi}{5}$，

当 $k=1$、2时为本题解：$x_2=\frac{2\pi}{5}$， $x_3=\frac{4\pi}{5}$.

$\therefore$ 原方程的解是$x_1=\frac{\pi}{2}$， $x_2=\frac{2\pi}{5}$， $x_3=\frac{4\pi}{5}$.

八、设一直线经过点$P(-3,\ 3)$，并且与ox轴的倾斜角为$\frac{5\pi}{6}$. ①写出这条直线的参数方程；

②设这条直线与曲线 $x=2\cos\theta$、$y=4\sin\theta$（θ 为参数）相交于 A、B 两点，求乘积 $|PA|\cdot|PB|$.



（第八题）

解　①直线参数方程为

$$\begin{cases} x=-3+t\cos\frac{5\pi}{6}=-3-\frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=3+t\sin\frac{5}{6}\pi=3+\frac{1}{2}t, \end{cases}$$

（t 为参数）

②把 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=4\sin\theta \end{cases}$ 消去参数 θ，得直角坐标方程

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1, \quad 即 \quad 4x^2+y^2=16 \; *$$

将直线的参数方程代入 $*$ 方程

整理得　$13t^2+12(4\sqrt{3}+1)t+116=0$.

此方程判别式 $\triangle=[3(4\sqrt{3}+1)]^2-4\times\frac{13}{4}\times 29$

$$=64+72\sqrt{3}>0,$$

设 t 的两根为 t_1、t_2，则　$t_1\cdot t_2=\frac{116}{13}$.

由 t 的几何意义：t 表示 $P(-3,3)$ 到直线上一点 (x,y) 的代数距离，$\therefore |t_1|$ 和 $|t_2|$ 分别表示 $|PA|$ 和 $|PB|$，

$$\therefore |PA|\cdot|PB|=|t_1\cdot t_2|=\frac{116}{13}.$$

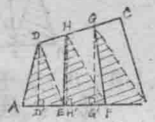
注意：①掌握直线参数方程中参数 t 的几何意义.

②如直接用直角坐标系方程解出交点 A、B 的坐

标，再求出$|PA|\cdot|PB|$较繁.

九、设四边形$ABCD$的面积等于1，将边AB三等分，分点为E、F，又将DC三等分，分点为H、G，连EH、FG.求证：四边形$EFGH$的面积等于$\frac{1}{3}$.

证1：连DE、HF、GB，并作DD'、HH'和GG'垂直AB于D'、H'、G'，则$DD' \parallel HH' \parallel GG'$，且$HH'$为梯形$DD'G'G$的中位线，



（第九题）1

$$\therefore \quad 2HH' = DD' + GG'.$$

$$\therefore \ 2S_{\triangle HEF} = S_{\triangle DAE} + S_{\triangle GFB},$$

同理 $2S_{\triangle FGH} = S_{\triangle BCG} + S_{\triangle EHD}$.

$$\therefore \ 2(S_{\triangle HEF} + S_{\triangle FGH}) = S_{AEHD} + S_{FBCG}.$$

即 $2S_{EFGH} = S_{AEHD} + S_{FBCG}$.

$$3S_{EFGH} = S_{AEHD} + S_{FBCG} + S_{EFGH} = S_{ABCD}$$

$$\therefore \ S_{EFGH} = \frac{1}{3}S_{ABCD} = \frac{1}{3}.$$

证2：连结DE、DB、GB和GE,

则 $S_{\triangle DEB} = \frac{2}{3}S_{\triangle ABD}$， $S_{\triangle BDG} = \frac{2}{3}S_{\triangle BCD}$.

$$\therefore \ S_{\triangle DEB} + S_{\triangle BDG} = \frac{2}{3}S_{ABCD}.$$

即 $S_{DEBG} = \frac{2}{3}S_{ABCD}$ ①

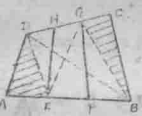
又$\because$ $S_{\triangle HEG} = S_{\triangle EHD}$， $S_{\triangle GEF} = S_{\triangle GFB}$，

$$\therefore \ S_{\triangle HEG} + S_{\triangle GEF} = S_{\triangle EHD} + S_{\triangle GFB}$$

即 $S_{HEFG} = \frac{1}{2}S_{DEBG}$ ②

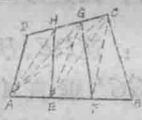
将①代入②，得$S_{HEFG}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}S_{ABCD}$

$$=\frac{1}{3}S_{ABCD}=\frac{1}{3}.$$



（2）

（第九题）



（3）

证3：连 AH、AG、AC及CE、CF，则由等底同高的三角形面积相等，得 $S_{\triangle ACG}=S_{\triangle AGH}=S_{\triangle AHD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ADC}$，

同理 $S_{\triangle CAE}=S_{\triangle CEF}=S_{\triangle CFB}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

$$\therefore S_{AECG}=S_{\triangle ACG}+S_{\triangle CAE}$$

$$=\frac{1}{3}(S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ABC})=\frac{1}{3}S_{ABCD} \quad ①$$

再连GE，则$S_{\triangle GAE}=S_{\triangle GEF}$，$S_{\triangle ECG}=S_{\triangle GHE}$，

$$\therefore S_{AECG}=S_{\triangle GAE}+S_{\triangle ECG}=S_{\triangle GEF}+S_{\triangle GHE}$$

$$=S_{EFGH} \quad ②$$

将①代入②，得$S_{EFGH}=\frac{1}{3}S_{ABCD}=\frac{1}{3}$.

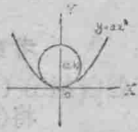
注意：①有关多边形和四边形的问题，常常要作对角线，把它分成三角形来解.

②在三角形面积的比较中，要善于运用"若两个三角形同（等）底同（等）高，则它们的面积相等"、"若两三角形底边相等，而高不等，则它们面积之比等于高之比"等性质.

十、在一抛物线 $y=ax^2$（$a>0$）的上侧（即 $y\geqslant ax^2$），

求出一个与抛物线相切于原点的最大园.

解 1：与抛物线 $y=ax^2$ 在原点相切、、并位于 x 轴上方的园为：



（第十题）

$x^2+(y-h)^2=h^2\quad(h>0)$，

园心为 $(0,\ h)$. 将 $y=ax^2$ 代入上式得 $x^2+(ax^2-h)^2=h^2$，

整理得 $x^2[a^2x^2+(1-2ah)]=0$.

当 $x=0$、$y=0$ 时，抛物线与园相切于点 $(0,0)$.

当 $a^2x^2+(1-2ah)=0$ 时，分三种情况讨论

① 当 $1-2ah>0$、即 $h<\dfrac{1}{2a}$ 时，

$a^2x^2+(1-2ah)>0$，

$\therefore$ 方程 $a^2x^2+(1-2ah)=0$ 无解，故园与抛物线除切点 $(0,\ 0)$ 外没有其他公共点.

② 当 $1-2ah=0$、即 $h=\dfrac{1}{2a}$ 时，仍得 $x^2=0$，这说明园与抛物线仅相切于 $(0,\ 0)$.

③ 当 $1-2ah<0$、即 $h>\dfrac{1}{2a}$ 时，也即 $2ah-1>0$ 可令 $2ah-1=\delta^2$，则 $a^2x^2-\delta^2=0$，$\therefore x=\pm\dfrac{\delta}{a}$，代入 $y=ax^2$，得 $y=\dfrac{\delta^2}{a}$，这说明园与抛物线另有交点是 $\left(\dfrac{\delta}{a},\ \dfrac{\delta^2}{a}\right)$、$\left(-\dfrac{\delta}{a},\ \dfrac{\delta^2}{a}\right)$，所以园在点 $\left(\pm\dfrac{\delta}{a},\ \dfrac{\delta^2}{a}\right)$ 处穿过抛物线.

$\therefore$ 所求最大园的半径是 $h=\dfrac{1}{2a}$.

解2：设园C：$x^2+(y-R)^2=R^2 \quad (R>0)$

考察方程组 $\begin{cases} x^2+(y-R)^2=R^2 & ① \\ y=ax^2 & ② \end{cases}$

将②代入①得 $x^2+(ax^2-R)^2=R^2$

即 $x^2(a^2x^2+1-2aR)=0$

则 $x^2=0$ $\therefore$ $x_1=x_2=0$，此时$y_1=y_2=0$

或 $x^2=\dfrac{2aR-1}{a^2}$ 则当$2aR-1\leqslant 0$时

① $R=\dfrac{1}{2a}$时，$x_3=x_4=0$、$y_3=y_4=0$，

② $R<\dfrac{1}{2a}$时，x_3，x_4不是实数解.

$\therefore$ 当$R\leqslant\dfrac{1}{2a}$时，园C与抛物线仅有公共点$(0,0)$，

故园C与抛物线必切于原点，所以$R_{\text{极大}}=\dfrac{1}{2a}$.

附注：本题解法1中证明情况③，园周上有在抛物线下面的点即园穿过抛物线，为此考虑满足 $0<x_1<\dfrac{\delta}{a}$的$x=x_1$，令$\varepsilon=ax_1$，则$0<\varepsilon<\delta$，这时园上的对应点的较小的y值是

$$y_C=h-\sqrt{h^2-\frac{\varepsilon^2}{a^2}}=h\left[1-\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{a^2h^2}}\right],$$

抛物线上对应点的y值是

$y_P=a\left(\dfrac{\varepsilon}{a}\right)^2=\dfrac{\varepsilon^2}{a}$，利用不等式$\sqrt{1-x}>1-\dfrac{1}{2}x$

得$y_C<h\left[1-\left(1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\varepsilon^2}{a^2h^2}\right)\right]=\dfrac{\varepsilon^2}{a\cdot 2ah}$

$$=\frac{\varepsilon}{a}\cdot\frac{1}{1+\delta^2}<\frac{\varepsilon^2}{a}=y_P$$

即在情况(3)，园周上有点(x_C，y_C)在抛物线下部即园穿过抛物线.

福建省重点中学统考试题

1. (1) 化简：$\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-5)^2}$.（6分）

解：原式$=|x+3|+|x-5|$，1）当$x>5$时，原式$=x+3+x-5=2x-2$，

2）当$-3\leqslant x\leqslant 5$时，原式$=x+3+5-x=8$，

3）当$x<-3$时，原式$=-(x+3)+5-x=2-2x$，

注意：要注意算术根的概念，防止不分条件就得出$\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-5)^2}=x+3+x-5$错误结论.

(2) 分解：$x^5-2x^3+x^2-2$

解1：$x^5-2x^3+x^2-2=x^2(x^3+1)-2(x^3+1)$

$$=(x+1)(x^2-x+1)(x^2-2)$$

$$=(x+1)(x^2-x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

$$=(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

解2：$x^5-2x^3+x^2-2=x^3(x^2-2)+(x^2-2)$

$$=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+1)(x^2-x+1)$$

$$=(x+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})\cdot$$

$$\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

注意：在没有附加条件的情况下，一般在有理数范围内因式分解．现在的解是在复数范围内分解因式．

2．计算$2^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{3}}}-5^{\log_{25}(2+\sqrt{2})^2}$

解：原式$=2^{\log_2(2-\sqrt{3})}-5^{\log_5(2+\sqrt{2})}$

$$=2-\sqrt{3}-(2+\sqrt{2})=-(\sqrt{3}+\sqrt{2}).$$

注意：凡上述类型的问题，一般常要用下列恒等式：

(1) $a^{\log_a N}=N$，　　(2) $\log_a b=\log_{a^n}b^n$，

(3) $\log_a b=\log_{\sqrt[n]{a}}\sqrt[n]{b}$，

3．已知 $\begin{cases} xy=\mathrm{ctg}37^\circ & (1)\\ x=Z\sin53^\circ & (2)\\ y=Z\cos53^\circ & (3)\end{cases}$　　求 y 的值．（6分）

解：(3)÷(2)　得　$\frac{y}{x}=\mathrm{ctg}\,53^\circ$，

即　$\frac{y}{x}=\mathrm{tg}37^\circ$　（4），而（1）×（4）得$y^2=1$，

$\therefore\quad y=\pm1$．

又解：（1）×（2）×（3）得 $x^2y^2=z^2\sin^2 53^\circ$，

$\therefore\quad xy=z\sin53^\circ$　　（4）

（4）÷（2）得　$y=\pm1$．

4．求函数 $y=\frac{1}{3}\arcsin\sqrt{2x-3}$ 的定义域和值域．

（6分）

解：要使函数有意义，必须

$$0 \leqslant \sqrt{2x-3} \leqslant 1, \quad \text{即} \quad 0 \leqslant 2x-3 \leqslant 1,$$

∴ 函数定义域为$\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2$，

又∵ $0 \leqslant \arcsin\sqrt{2x-3} \leqslant \frac{\pi}{2}$，

∴ $0 \leqslant \frac{1}{3}\arcsin\sqrt{2x-3} \leqslant \frac{\pi}{6}$.

即函数的值域为$0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{6}$.

注意：求反三角函数的定义域和值域必须根据原三角函数的值域和反三角函数的主值得出.

5. 园$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$与x轴的交点为A、B. 求证：$|AB|=2\sqrt{D^2-F}$. （6分）

证明：∵ x轴的方程为$y=0$，代入圆方程得：

$x^2+2Dx+F=0$，

$$\therefore \quad x=\frac{-2D\pm\sqrt{4D^2-4F}}{2}=-D\pm\sqrt{D^2-F},$$

∴ A点的坐标为$(-D+\sqrt{D^2-F},\ O)$

B点的坐标为$(-D-\sqrt{D^2-F},\ O)$

$$\therefore \quad |AB|=|-D-\sqrt{D^2-F}-(-D+\sqrt{D^2-F})|$$

$$=|-2\sqrt{D^2-F}|=2\sqrt{D^2-F}.$$

6. 已知：$\text{arctg}x-\text{arctg}y-\text{arctg}z=\pi$.

求证：$x-y-z=x\cdot y\cdot z$. （8分）

证明：设$\text{arctg}x=\alpha$， $\text{arctg}y=\beta$ $\text{arctg}z=\gamma$.

则 $\text{tg}(\alpha-\beta-\gamma)=\text{tg}\,\pi=0$， 而 $\text{tg}[(\alpha-\beta)-\gamma]=$