第二十六篇

公 式 與 數 表

目　　錄

第一章　數學公式

第二章　數　　表

第三章　單　　位

第四章　物理常數及其他

第二十六篇

公 式 與 數 表

第一章　數學公式

1·1　代　數

1·1·1　因數分解

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \qquad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \pm 2bc \pm 2ca = (a+b \pm c)^2$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$(a \mp b)^2 \pm 4ab = (a \pm b)^2$$

$$a^2 - b^2 - c^2 - 2bc = (a+b+c)(a-b-c)$$

$$x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$$

$$= (x+a)(x+b)(x+c)$$

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = (a+b)(b+c)(c+a)$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$$

$$= -(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$$

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) =$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2) = a^4 + b^4$$

$$2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4)$$
$$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

1·1·2　二次方程式

$ax^2+bx+c=0$　　a，b，c 爲實數　　$a \neq 0$

其根爲 x_1，$x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　　$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$　　$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

若 $b^2>4ac$ 時爲實根，若 $b^2<4ac$ 時爲虛根。

1·1·3　三次方程式

$x^3-1=0$ 之 3 根爲 1，x_1，x_2

$x_1=(-1-i\sqrt{3})/2$　　　$x_2=(-1+i\sqrt{3})/2$

求 $ax^3+bx^2+cx+d=0$，a，b，c，d 爲實數，$a\neq 0$ 的根時，以 $x=y-\dfrac{b}{3a}$ 代入，則得 $y^3+py+q=0$，其中以 $p=\dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2}{3a^2}$，$q=\dfrac{2b^3}{37a^3}-\dfrac{bc}{3a^2}+\dfrac{d}{a}$ 代入，則求得 $y^2+q/y=-p$ 的變形，並使用計算尺就可以求得實根 y_1。即，將指示板放在D尺 q 處，並移動BC尺使 q/y（D尺）與 y_1^2（B尺）的和爲 $-p$ 時，其 y_1 爲一實根，再以 $y-y_1$ 除 $y^3+py+q=0$，並解其商 $y^2+ay+p=0$，就可求得其他的根 y_2，y_3，而從 y_1，y_2，y_3 中求得 x 的值 x_1，x_2，x_3 爲原方程式的 3 根。又，

$x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}$，

$x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2=\dfrac{c}{a}$，$x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}$

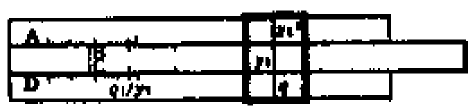


圖27·1

1·1·4　指數法則

$a^m\times a^n=a^{m+n}$　　$a^m\div a^n=a^{m-n}$　　$(a^m)^n=a^{mn}$

$(ab)^n=a^nb^n$　　$a^{-n}=1/a^n$　　$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$

$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　$\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\div b}$　　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

$a^0=1$

1·1·5　對數

$\log_a y=x$ 係表示 $y=a^x$ 的關係，x 稱爲以 a 爲底時 y 的對數，但是 a 爲正實數，且 $a\neq 1$。

$\log_a a = 1$　　$\log_a 1 = 0$　　$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{y}{x} = \log_a y - \log_a x$　　$\log_a x^n = n \log_a x$

$\log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$　　$\log_b a = \log_c b \times \log_b a$

$\log_b a = \log_c a / \log_c b$　　$\log_b a \times \log_a b = 1$

$\log_{10} x =$ 常用對數　　$\log_e x = \log 10 x \log_e 10 =$ 自然對數

$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!} = 2.7182818284\cdots\cdots$

$\log_{10} x = M \times \log_e x$　　$\log_e x = M^{-1} \times \log_{10} x$

$M = \log_{10} e = 0.43429448$　　$M^{-1} = \log_e 10 = 2.30258509$

$\log_{10} \pi = 0.49714987$　　$\log_{10} 1 = 0$　　$\log_{10} 2 = 0.30102999$

$\log_{10} 10 = 1$　　$\log_{10} 100 = 2$　　$\log_{10} 0.1 = -1$

$\log_{10} 0.01 = -2$

1·1·6　級數

(1)等差級數　$a + (a+d) + \cdots\cdots + [a + (n-1)d]$

$= [2a + (n-1)d] n/2$

(2)等比級數　$a + ar + \cdots\cdots + ar^{n-1} = a \frac{1-r^n}{1-r} = s$

若 $r < 1$，$n = \infty$ 時，則 $s = a/(1-r)$

(3)雜級數　$1+2+3+4+\cdots\cdots+n = n(1+n)/2$

$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2 = n(1+n)(1+2n)/6$

$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots+n^3 = n^2(1+n)^2/4$

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots\cdots + n(n+1)$

$= n(1+n)(2+n)/3$

1·1·7　排列組合

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots(n-r+1)$$

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!} = {}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

（註）！稱爲階乘，$3! = 3 \times 2 \times 1$

1·1·8　二項式定理

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \cdots\cdots + b^n$$

$$= a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + \cdots\cdots\cdots\cdots + {}_nC_m a^{n-m}b^m + \cdots\cdots + b^n$$

1·1·9 行列式

(1)若將行與列順序互換，則所得新行列式的值與原行列式的值相等。

(2)若將其二行（或二列）互換，則所得新行列式的值，等於原行列式的值乘以－1。

(3)若有二行（或二列）完全相同，則這行列式的值爲零。

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1 \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} z_1 & y_1 & x_1 \\ z_2 & y_2 & x_2 \\ z_3 & y_3 & x_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} px_1 & y_1 \\ px_2 & y_2 \end{vmatrix} = p\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = p(x_1y_2 - x_2y_1)$$

$$\begin{vmatrix} x_1+\alpha_1 & y_1 \\ x_2+\alpha_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & y_1 \\ \alpha_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+my_1 & y_1 \\ x_2+my_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

三元一次聯立方程式與行列式

$$\left.\begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3z &= a_4 \\ b_1x + b_2y + b_3z &= b_4 \\ c_1x + c_2y + c_3z &= c_4 \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3-c_1b_2a_3$$

$$x=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_3 \\ b_4 & b_2 & b_3 \\ c_4 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad y=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & a_4 & a_3 \\ b_1 & b_4 & b_3 \\ c_1 & c_4 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$z=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}$$

1·2　平面三角函數

$\sin\alpha = a/c = \cos\beta$

$\cos\alpha = b/c = \sin\beta$

$\tan\alpha = a/b = \cot\beta$

$\cot\alpha = b/a = \tan\beta$

$\sec\alpha = c/b = \operatorname{cosec}\beta$

$\operatorname{cosec}\alpha = c/a = \sec\beta$

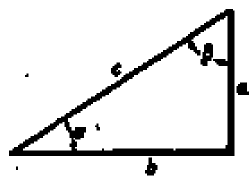


圖27·2

1·2·1　各象限的三角函數關係

	$-\alpha$	$90°\pm\alpha$	$180°\pm\alpha$	$270°\pm\alpha$	$360°\pm\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
tan	$-\tan\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\tan\alpha$	$\mp\cot\alpha$	$\pm\tan\alpha$

1·2·2　特別角的三角函數值

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1
cosec	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞

$\sqrt{2}=1.414$

$\sqrt{3}=1.732$

$1/\sqrt{2}=0.707$

1 度$=\frac{\pi}{180}$弧度

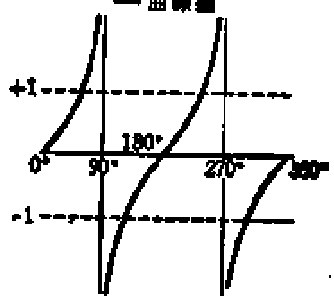
$1/\sqrt{3}=0.577$

$\sqrt{3}/2=0.866$

$2/\sqrt{3}=1.155$

1 弧度$=\frac{180}{\pi}$度

sin 曲線圖



tan 曲線圖

圖 27·3

1·2·3 主要公式

$\sin\alpha \times \operatorname{cosec}\alpha$

$= \cos\alpha \times \sec\alpha$

$= \tan\alpha \times \cot\alpha = 1$

$\tan\alpha = \sin\alpha \div \cos\alpha$

$\cot\alpha = \cos\alpha \div \sin\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha \qquad 1+\cot^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha$

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta\pm\sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\alpha\pm\cot\beta}$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} \qquad \cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$$

$$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha - 8\sin^3\alpha\cos\alpha$$

$$\mathrm{con}\,4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$

$$\sin 5\alpha = 5\sin\alpha - 20\sin^3\alpha + 16\sin^5\alpha$$

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$$

$$\sin n\alpha = 2\sin(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin(n-2)\alpha$$

$$\cos n\alpha = 2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \cos(n-2)\alpha$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\mathrm{coc}\,\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \mathrm{cosec}\,\alpha - \cot\alpha$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{cosec}\,\alpha + \cot\alpha$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\left(45^\circ\pm\frac{\alpha}{2}\right)=\sec\alpha\pm\tan\alpha=\frac{\cos\alpha}{1\pm\sin\alpha}=\cot\left(45^\circ\pm\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\tan(45^\circ+\alpha)\qquad\frac{1+\cot\alpha}{1-\cot\alpha}=\cot(\alpha-45^\circ)$$

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}\qquad\cot\alpha=\frac{\cot^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\cot\frac{\alpha}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\pm|A|\cos\alpha-B\sin\alpha=\pm\sqrt{A^2+B^2}\cos(\alpha+\varphi)\\ \pm|A|\sin\alpha+B\cos\alpha=\pm\sqrt{A^2+B^2}\sin(\alpha+\varphi)\end{array}\right\}$$

但　$\varphi=\left[\tan^{-1}\frac{B}{A}\right]$。〔參照本編1·2·4〕

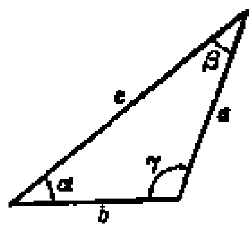


圖27·4

(1)正弦定律：$\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$

但　R：外接圓半徑

$a+b+c=2s$

(2)餘弦定律：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$

(3)半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

(4)三角形面積：$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=rs$

(5)內接圓半徑：$r=\dfrac{S}{s}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

(6)外接圓半徑：$R=\dfrac{a}{2\sin\alpha}=\dfrac{abc}{4S}$

1·2·4 反三角函數

適合於 $\sin x = a$ 的 x，當以 $x = \sin^{-1} a$ 表示時，且 x 在 $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2}$ 的限制下，滿足此式的 x，稱爲 $\sin^{-1} a$ 的主値，同時，$x = \cos^{-1} a$ 與 $x = \cot^{-1} a$ 中的 x 爲 $0 \leqq x \leqq \pi$ 時，$x = \tan^{-1} a$ 中的 x 爲 $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2}$ 時，x 即爲 $\cos^{-1} a$，$\cot^{-1} a$，$\tan^{-1} a$ 的主値。

主値與通値有下列的關係。（主値以〔 〕。表示）

$$\sin^{-1}\alpha = n\pi + (-1)^n [\sin^{-1}\alpha]_0$$

$$\cos^{-1}\alpha = 2n\pi \pm [\cos^{-1}\alpha]_0$$

$$\tan^{-1}\alpha = n\pi + [\tan^{-1}\alpha]_0$$

主値間的餘角關係與互換公式

$$\sin^{-1}a + \cos^{-1}a = \frac{\pi}{2} \qquad \tan^{-1}a + \cot^{-1}a = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^{-1}a = \pm\cos^{-1}\sqrt{1-a^2} = \tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$$ ，符號與 a 同號

$$\cos^{-1}a = \sin^{-1}\sqrt{1-a^2} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}, \quad (a>0)$$

$$= \pi - \sin^{-1}\sqrt{1-a^2}$$

$$= \pi + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}, \quad (a<0)$$

$$\tan^{-1}a = \sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \pm\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$ ，符號與 a 同號

1·3 複 數

1·3·1 公式（複數記號數學用 i，電工學用 j 與電流記號相區別）

$$j = \sqrt{-1} \qquad j^2 = -1$$

$$j^3 = -j \qquad j^4 = 1$$

$$(+j)\times(+j) = -1$$

$$(+j)\times(-j) = 1$$

$$(-j)\times(-j) = -1$$

$$(+j)\div(-j) = -1$$

$$(-j)\div(+j) = -1$$

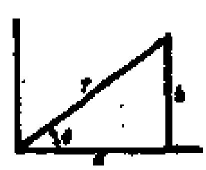


圖27·5

$(+j)\div(+j)=1$

$(-j)\div(-j)=1$

$$a+jb=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+j\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$=r(\cos\theta+j\sin\theta)=re^{j\theta}=r\angle\theta$$

但　$r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

（參照第27·5圖）

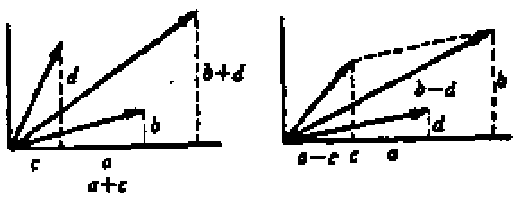


圖 27·6

若　$a+jb=0$，則　$a=0$，

$b=0$　（a，b 均實數）

若　$a+jb=c+jd$

則　$a=c$，$b=d$

$(a+jb)+(c+jd)$

$=(a+c)+j(b+d)$

$(a+jb)-(c+jd)$

$=(a-c)+j(b-d)$

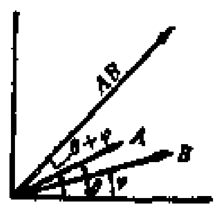


圖 27·7

$(a+jb)(c+jd)=(ac-bd)+j(bc+ad)$

若　$a+jb$

$=A(\cos\theta+j\sin\theta)$，

$A=\sqrt{a^2+b^2}$，$\tan\theta=\dfrac{b}{a}$

$c+jd$

$=B(\cos\varphi+j\sin\varphi)$，

$B=\sqrt{c^2+d^2}$，$\tan\varphi=\dfrac{d}{c}$

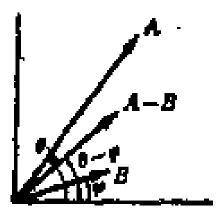


圖27·8

則　$(a+jb)(c+jd)=ABe^{j(\theta+\varphi)}$（參照第27·7圖）

$$\frac{a+jb}{c+jd}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+j\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{A}{B}\varepsilon^{j(\theta-\varphi)} \qquad \text{（參照第27·8圖）}$$

但是必須滿足前述條件。

$$\varepsilon^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta \qquad \varepsilon^{-j\theta}=\cos\theta-j\sin\theta$$

$$Z=x+jy\ ,\ \cos Z=\frac{1}{2}(\varepsilon^{jz}+\varepsilon^{-jz})$$

$$\sin Z=\frac{1}{2j}(\varepsilon^{jz}-\varepsilon^{-jz}) \qquad \tan Z=\frac{\sin Z}{\cos Z}=\frac{1}{\cot Z}$$

〔注意〕對稱座標法所使用的記號 a 爲 $a=\varepsilon^{j\frac{2\pi}{3}}=\cos\frac{2\pi}{3}+j\sin\frac{2\pi}{3}$

$$=\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1·3·2 棣美佛（De Moivre）定理

$$(\cos\theta+j\sin\theta)^n=\cos n\theta+j\sin n\theta$$

1·4 解析幾何

1·4·1 座標軸的變換

點 p 的舊座標爲 (x,y)，新座標爲 (x',y')，若舊座標系上的新座標系原點座標爲 (x_0,y_0)，且對舊座標系的新座標系旋轉角爲 θ 時，

則 $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta+x_0$

$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta+y_0$

（參照第27·9圖）

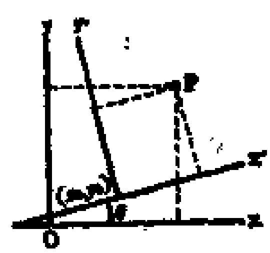


圖 27·9

1·4·2 直角座標 (x,y) 與極座標 (ρ,θ) 的關係（第27·10圖）

$x=\rho\cos\theta$

$\rho^2=x^2+y^2$

$y=\rho\sin\theta$

$\tan\theta=y/x$

1·4·3 點與直線

兩點 $p_1(x_1,y_1)$，$p_2(x_2,y_2)$ 間的距離爲 (l)

$$l=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

通過兩點 $p_1(x_1, y_1)$，$p_2(x_2, y_2)$ 的直線方程式

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

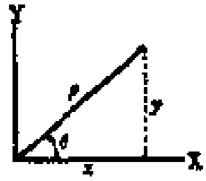


圖 27·10

直線對 X 軸的角爲 ϕ

$$\tan\phi=m=(y_2-y_1)\div(x_2-x_1)$$

直線的 X 截距爲 a，Y 截距爲 b，則直線的截距式（第 27·11 圖）爲

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\tan\phi=m=-\frac{b}{a}$$

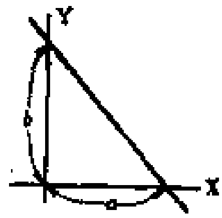


圖 27·11

直線 Y 軸上的截距爲 b，並與 X 軸成 ϕ 角，則直線的斜截式（第 27·12 圖）爲

$$y=mx+b$$

$$\tan\phi=m$$

一直線對 X 軸成 β 角的直線 p 成直角的方程式（第 27.13 圖）爲

$$x=\cos\beta+y\sin\beta=p$$

一般的直線方程式

$$Ax+By+C=0$$

$$m=-A/B$$

$$b=-C/B$$

$$a=-C/A$$

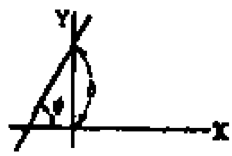


圖 27·12

兩直線 $y_1=m_1x+b_1$，$y_2=m_2x+b_2$ 間的角（ϕ）。

$$\tan\phi=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

$m_1=m_2$	兩直線互爲平行的條件
$1+m_1m_2=0$	兩直線成爲直角的條件

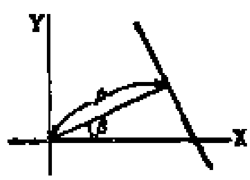


圖 27·13

1·4·4　圓

中心座標爲（a，b），半徑爲 r 的圓

方程式（第27·14圖）

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

中心爲原點時

$$x^2+y^2=r^2$$

圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上一點 (x_1, y_1) 的

切線方程式

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

法線方程式

$$(y_1-b)(x-a)-(x_1-a)(y-b)=0$$

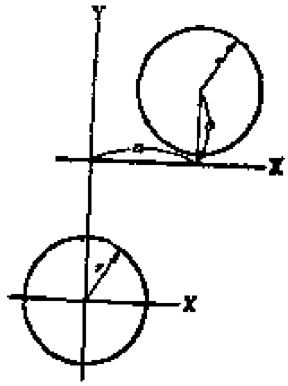


圖27·14

由某一點 (x_1, y_1) 到圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的切線長 (l) 爲

$$l=\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2}$$

1·4·5　橢圓（中心爲原點，長軸在X軸上）

（第27·15圖）

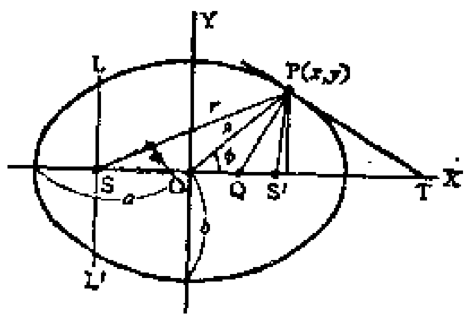


圖27·15

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b)$$

中心爲原點的極座標表示

$$\rho=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\phi+a^2\sin^2\phi}}$$

焦點爲原點的極座標表示

$$\frac{b^2}{a}=r(1\mp e\cos\theta)$$

$-$ …………… s 爲原點

$+$ …………… s' 爲原點

離心率 $e=\sqrt{(a^2-b^2)/a^2}$

在橢圓上的一點 $p(x_1, y_1)$ 的

切線 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

法線 $\frac{x_1}{a_2}(y-y_1)=\frac{y_1}{b_2}(x-x_1)$

S，S'＝焦點，正焦弦長 $LL'=2b^2/a$，長軸＝$2a$，短軸＝$2b$

$\overline{OS}=ae=\sqrt{a^2-b^2}$ $\overline{SP}+\overline{PS'}=2a$

面積＝πab

1·4·6 雙曲線（中心爲原點，焦點在 X 軸上）

（第 27·16 圖）

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{b^2}{a}=r(1\mp e\cos\theta)$$

$-$ ………… s 爲原點

$+$ ………… s' 爲原點

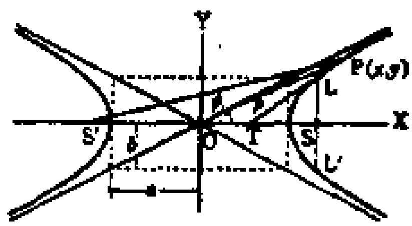


圖 27·16

中心爲原點的極座標表示

$$\rho=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\phi-a^2\sin^2\phi}}$$

離心率 $e=\sqrt{(a^2+b^2)/a^2}$ 漸近線 $\frac{x}{a}=\pm\frac{y}{b}$

$\overline{OS}=ae=\sqrt{a^2+b^2}$ 正焦弦長 $\overline{LL'}=2b^2/a$

$\overline{S'P}-\overline{SP}=2a$ S，S'＝焦點

在雙曲線上點 $p(x_1, y_1)$ 的

切線 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$

法線 $\frac{x_1}{a^2}(y-y_1)=-\frac{y_1}{b^2}(x-x_1)$

焦點在 Y 軸上的雙曲線

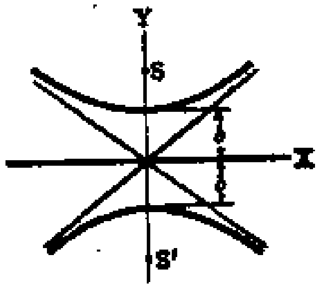


圖 27·17

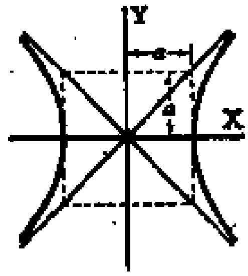


圖 27·18

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$　（第 27·17 圖）

等軸雙曲線　$a=b$，$e=\sqrt{2}$

$$x^2-y^2=a^2$$　（第 27·18 圖）

漸近線爲座標軸的等軸雙曲線

$$xy=\frac{a^2}{2}=K$$

（第 27·19 圖）

斜線部份的長方形面積常爲 $\frac{a^2}{2}$

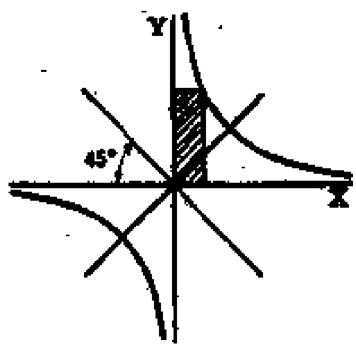


圖 27·19

1·4·7　拋物線

頂點在原點，並以 X 軸爲對稱軸的拋物線（第 27·20 圖）

$$y^2=4ax$$

中心爲原點的極座標表示

$$\rho=\frac{4a\cos\phi}{\sin^2\phi}$$

焦點爲原點的極座標表示

$$2a=r(1-\cos\theta)$$

切線　$y_1y=2a(x+x_1)$

法線　$y-y_1+(y_1/2a)(x-x_1)=0$

正焦弦長　$\overline{LL'}=4a$