自 动 控 制 原 理

—现代控制系统理论基础—

（飞行器自动控制专业）

田林编写

南 京 航 空 学 院

1976.6.

自动控制原理

——现代控制系统理论基础——

目录

附录： 线性代数基础知识

目 录

第八章 现代控制系统理论基础

前 言

40年代发展起来的反馈控制理论是在复数S领域中以传递函数为基础的理论，自它产生以来，不断地得到完善和系统化。但由于它的局限性，满足不了自动控制技术的发展要求。60年代以来，在大量工程实践的基础上，特别是在空间技术等方面的实践基础上，一种以状态变量为基础的新控制理论出现了，这就是现代控制系统理论。它对于　　控制系统内部性能及其联系提供了更深入的理解，使得在实践中发现的一些现象得到更好的说明。十几年来，在空间技术的工程设计中，应用并检验了这些理论。

与现代控制系统理论相对应，把反馈控制理论称为古典控制理论。古典控制理论的局限性主要表现在以下几个方面：首先，在古典控制理论中，所研究的主要是一个输入和一个输出的定常线性集中参数的动态系统，而对于实际中存在的多输入多输出而且是时变的或分布参数的动态系统则无法解决。其次，在古典控制理论中，主要是在S领域中研究在特定形式的输入作用下系统的性能，对于任意形式输入作用时系统在时间域中的性能则无法研究。特别是对于用高阶微分方程式描述的复杂系统，要想直接了介在时间域中的性能则根本不可能。最后，在古典控制理论中，也只是线性控制理论发展得比较完善，对非线性控制系统只能进行近似的分析研究。特别是目前　随着科学技术的发展，为了提高控制系统的精度，并在控制系统中引用数字电子计算机以及进行极值控制等，已经远远超出古典控制理论力所能及的范围。例如，为了建立质量高的控制系统，在古典控制理论中那种简单的质量指标（如调节时间，超调度、稳定裕度等）已远远不能满足要求，而要求建立综合性的质量指标（如既考虑到控制效果，又考虑到控制代价的二次型指标等）。

现代控制系统理论则可以弥补古典控制理论之不足，为自动控制技术的发展提供了有力的工具。现代控制系统理论既能用来表现线性系统，也能用来表现非线性系统；既能用来刻画集中参数系统，也能用来刻画分布参数系统；既能用来处理单输入单输出系统，也能用来处理多输入多输出系统，而且有可能利用现代数学工具一般地分析从任意输入到任意输出的系统。

现代控制系统理论是以状态变量为基础在时间领域中进行研究的方法，它依赖于现代数学理论的发展。作为其基础的是线性代数，泛函分析等数学理论，应用这些数学理论，可以用统一的方法处理单输入单输出的高阶动态系统和多输入多输出的多变量系统。

然而，"事物都是一分为二的"，古典控制理论固然有它的局限性，但并不是说它好象已经"过时"了。实际上，不仅在单输入单输出的线性定常系统中，传递函数 方法由于其便于使用以及它所提供的结果便于在工程上实现而有它的优越性，就是在多输入多输出的情形，传递函数方法在某些方面还有一定的优点，因而近年来还有一些人致力于这方面的研究。因此问题是不在于用状态变量方法完全代替传递函数方法，而是在现代控制系统理论所提供的洞察之下，对古典控制理论所积累的经验与方法得到更深刻的理解；一方面更清楚的认识它的局限性，同时更好理解在它所适用的范围里它所能发挥的作用。

在本章中，主要介绍作为现代控制系统理论基础的状态变量法。首先介绍状态方程式和输出方程式的列写及其求解，引出描述线性动态系统的延移矩阵的概念及其性质。其次，简要介绍在现代控制系统理论中的二个最基本的概念——能控性和能观测性及其判断条件。最后，对于现代控制系统理论应用的几个方面作了概要介绍。通过本章学习，可以对作为现代控制系统理论基础的状态变量法有初步的了解，为今后更深入的学习现代控制系统

理论打下基础。

在学习状态变量法过程中，需要用到有关线性代数方面的知识，附在最后，以备查用。

第一节 状态变量和状态方程式

现就线性动态系统进行研究。

对于一个现实的物理系统，一般都可以用能够表现其特性的数学模型来代替。这时，如果在其输入端加入适当的输入，那么在输出端的输出便可以完全确定。这就是我们在反馈控制理论中主要研究的内容。现在，如果我们不仅仅希望了解控制系统其输入与输出之间的关系，而且也希望了解在这个过程中，系统内部的变化情况，那么，用古典控制理论是无法提供出这方面的情况的，这时必须借助于现代控制理论来解决。

因为现代控制理论是以状态变量为基础在时间领域中进行研究的一种理论，因此只要适当选取状态变量，便可以对所感兴趣的控制系统的内部状态进行研究。

一、状态变量和状态空间

所谓状态变量是指控制系统中，随时间变化的种种量，也叫状态量，例如飞机的轨迹角、俯仰角等。

在现代控制理论中，为了全面表示出控制系统的性能，一般取输入变量，输出变量和状态变量三种。通过研究这三个变量之间的关系和它们各自的行为，便可以了解控制系统的各种性能。

输入变量是由控制系统以外的系统产生的，由于它的加入对控制系统的行为产生影响。

输出变量是指与控制目的有直接关系的量。

状态变量是表示系统内部状态或内部行为的量，它的选择方法不是唯一的。

这样，控制系统采用这三种变量表示后，可以用如图8——1的方块图表示。

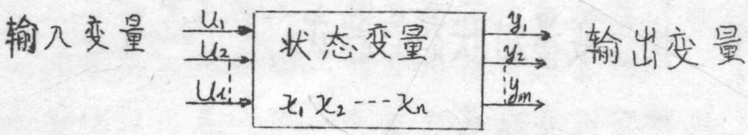

图　8——1　　控制系统的表示

图8—1中，左端表示输入变量的集合，右端表示输出变量的集合，而状态变量的集合包含在控制系统内部。

如果运用矢量和矩阵理论，把每一种变量的集合看作一个矢量，而每一个变量看为矢量中的一个分量，这样的处理将便于问题的研究。

例如把输入变量的集合、输出变量的集合、状态变量的集合分别以各个变量的个数作为维数的矢量表示。例如，l个输入变量的l维输入矢量表示为$U=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_l \end{bmatrix}$，$m$个输出变量的$m$维输出矢量表示为$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$，$n$个状态变量的$n$维状态矢量表示为$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$。

这样一来，便将多变量看成一个变量，运用矢量和矩阵的运算，可以很简便的研究控制系统。

由于这些变量一般地是随时间变化的，因此X、Y、U都是时间t的函数。在任意时间t，取输入矢量U而得到的全部可能值的集合组成输入（矢量）空间。同样，在任意时间t，取输出矢量Y及状态矢量X而得到的全部可能值的集合分别组成输出（矢量）空间和状态（矢量）空间。因此状态变量法也称状态空间法。

二、状态方程式

一般地，对于 m 个线性方程组

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

可以用矩阵乘法的形式表示为矩阵方程：

$$Y = AX$$

$$\text{其中}\quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

现在我们就来看看输入变量 u，输出变量 y，以及状态变量 x 三者之间有什么关系。

我们知道，在古典控制理论中，联系控制系统输入与输出关系的是传递函数。在这里，则是依靠控制系统的状态方程式和输出方程式将输入变量输出变量和状态变量三者联系起来。

我们可以把在某时间 t 时系统的状态变量用系统的初始状态变量和到 t 为止加到系统的输入变量来表示，写为如下形式：

$$x(t) = f\{x(t_0),\ u(t_0, t)\} \qquad (8-1-1)$$

式(8-1-1)称为状态方程式。式中 $x(t)$ 为状态变量，$x(t_0)$ 为初始状态变量，$u(t_0, t)$ 为从 t_0 开始到 t 时为止加入的输入变量，$f\{\ \}$ 表示函数关系。

同样，在 t 时的输出变量也可以表示为：

$$y(t) = g\{x(t_0),\ u(t_0, t)\} \qquad (8-1-2)$$

式(8-1-2)称为输出方程式或观测方程式。式中 $y(t)$ 为输出变量，

$g\{\}$表示函数关系。应该注意在上述二方程式中，各变量如$x(t)$，$y(t)$均为矢量，因此二方程式为矩阵方程。这是控制系统状态方程式最一般的形式。

一般地，控制系统往往用微方程式描述，因此状态方程式及输出方程式分别可以用以下形式表示：

状态方程式　　$\dot{x}(t)=F\{x(t),\ U(t)\}$　　(8-1-3)

输出方程式　　$y(t)=G\{x(t),\ U(t)\}$　　(8-1-4)

式中：$\dot{x}(t)$表示状态矢量的一阶导数矢量，$F\{\}$，$G\{\}$分别表示函数关系，$x(t)$表示状态矢量，$U(t)$表示输入矢量，$y(t)$表示输出矢量。

特别是，当控制系统用线性微分方程式描述时，其状态方程式和输出方程式可用如下形式表示：

$$\dot{x}(t)=A(t)\,x(t)+B(t)\,U(t) \qquad (8\text{-}1\text{-}5)$$

$$y(t)=C(t)\,x(t)+D(t)\,U(t) \qquad (8\text{-}1\text{-}6)$$

当$x(t)$，$U(t)$，$y(t)$分别为n阶，l阶，m阶矢量时，$A(t)$称为$(n\times n)$系数矩阵，$B(t)$称为$(n\times l)$控制矩阵(也称驱动矩阵)，$C(t)$称为$(m\times n)$输出矩阵，$D(t)$称为$(m\times l)$传递矩阵。

若系统特性参数不随时间变化时，$A(t)$、$B(t)$、$C(t)$、$D(t)$均为常数，可以用A、B、C、D代换，称为定常系统。$A(t)$ $B(t)$、$C(t)$、$D(t)$随时间变化的系统，称为非定常系统（时变系统）。

这样，在某一时间t，系统的内部状态$x(t)$可以用在n维元状态空间中的一点表示。随着时间的变化，$x(t)$在这个空间中描绘连续的轨迹，轨迹的变化规律由控制系统的状态方程式描述。而在任意时间时，系统的状态可以根据$x(t)$在状态空间中的位置

决定。也可以通过求解以矩阵方程式形式给出的状态方程式而得到。显然，求出了状态矢量 $x(t)$ 后，输出矢量 $y(t)$ 可以通过矩阵计标，由输出方程式很容易求得。

由上可见，状态方程式是以矩阵微分方程式的形式给出，状态变量则表示了控制系统本质的性能；而输出方程式只是运标式子，输出变量由状态变量经简单的运标便可求得。

我们看到，运用矢量和矩阵理论后，可以把具有 l 个输入和 m 个输出的多变量控制系统用矩阵微分方程式的形式给出。这样不仅简化了表现形式，也便于问题的研究。同样道理，对于输入和输出的关系用 n 阶微分方程式描述的单变量控制系统，我们可以用适当选择状态变量的方法，把 n 阶微分方程式中变量高于二阶以上的微分值，用某些状态变量置换，而组成 n 个一次微分方程式的集合，也可以用矩阵方程式的形式给出。这样，对于单变量系统和多变量系统便可以用统一的方法进行研究。

例 8—1.试求用微分方程式 $a\dddot{x}(t)+b\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+dx(t)=u(t)$ 表示的系统的状态方程式。

解：　首先如下那样选择状态变量 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$.

即
$$x_1(t)=x(t)$$
$$x_2(t)=\dot{x}_1(t)=\dot{x}(t)$$
$$x_3(t)=\dot{x}_2(t)=\ddot{x}_1(t)=\ddot{x}(t)$$

然后用这些状态变量去置换系统微分方程式中变量的高阶微分值项：

$$a\dot{x}_3(t)+bx_3(t)+cx_2(t)+dx_1(t)=u(t)$$

经整理得：
$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)\\ \dot{x}_3(t)=-\dfrac{d}{a}x_1(t)-\dfrac{c}{a}x_2(t)-\dfrac{b}{a}x_3(t)+\dfrac{u(t)}{a}\end{cases}$$

用矩阵形式可写为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{d}{a} & -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{a}\end{bmatrix}u(t).$$

令 $\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{d}{a} & -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a}\end{bmatrix}$

$X(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{a}\end{bmatrix}$

则状态方程式为 $\dot{X}(t)=AX(t)+Bu(t)$

例8—2.试求图8—2所示的RLC串联回路的状态方程式和输出方程式。

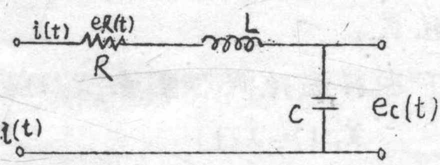

图 8-2 RLC串联电路

解：在回路中的电流、电压之间成立以下关系：

$$\begin{cases}L\dfrac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)dt=e_i(t) & (8\text{-}1\text{-}7)\\[2ex] \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)dt=e_c(t) & (8\text{-}1\text{-}8)\end{cases}$$

将(8-1-8)式代入(8-1-7)式得：

$$LC\ddot{e}_c(t)+RC\dot{e}_c(t)+e_c(t)=e_i(t) \qquad (8\text{-}1\text{-}9)$$

现在，把这个电气回路当成一个系统来看。设 $e_i(t)$ 为输入变量，$e_c(t)$ 为输出变量，状态变量的选择方法可以有多种，现以 $i(t)$ 及 $q(t)=\int i(t)dt$ 为二个状态变量，

$$\text{即}\qquad x_1(t)=q(t)=\int i(t)dt$$

$$x_2(t)=i(t)=\dot{x}_1(t)$$

$$\text{而}\qquad u(t)=e_i(t),\qquad y(t)=e_c(t)$$

经整理后，可得下式：

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-\frac{1}{LC}x_1(t)-\frac{R}{L}x_2(t)+\frac{1}{L}u(t)\end{cases}$$

$$y(t)=\frac{1}{C}x_1(t)$$

若用矩阵表示则为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{L}\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

$$\text{令}\qquad \dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}\frac{1}{C}\\ 0\end{bmatrix}$$

则状态方程式和输出方程式分别为：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

$$y(t)=C^{T}x(t)$$

如果电阻R两端的电压$e_R(t)$也作为输出时则

$$y_1(t)=e_R(t)=i(t)R=Rx_2(t)$$

$$y_2(t)=e_C(t)=\frac{1}{C}x_1(t)$$

$$\therefore\quad \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & R \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

则输出方程式为

$$y(t)=C_1x(t)、\quad 其中\quad C_1=\begin{bmatrix} 0 & R \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}$$

在这个例子中，若选$x_1(t)=e_C(t)$，$x_2(t)=\dot{e}_C(t)=\dot{x}_1(t)$，亦可求出状态方程式和输出方程式。即

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t)=-\frac{1}{LC}x_1(t)-\frac{R}{L}x_2(t)+\frac{1}{LC}e_i$$

$$y(t)=e_C(t)=x_2(t)$$

$$\therefore\quad \dot{x}(t)=\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

即
$$\dot{x}(t)=AX(t)+B_1u(t)$$
$$y(t)=C_2x(t)$$

其中 $B_1=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{LC}\end{bmatrix}$ $C_2=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$

三、由传递函数求状态方程式和输出方程式

当控制系统的传递函数给出了，可以通过一定的方法求出其状态方程式。由于状态变量的选择方法不是唯一的，因此状态方程式可以有多种。现在介绍二种常用的方法。

一般地，传递函数以S多项式比的形式给出，即

$$G(S)=\frac{A(S)}{B(S)}$$ 设A(S)的阶数最多等于B(S)的阶数。

1、从传递函数直接求状态方程式

1) 传递函数没有零点时。

设传递函数以如下形式给出

$$G(S)=\frac{K}{S^n+b_{n-1}S^{n-1}+\cdots+b_1S+b_0} \qquad (8-1-10)$$

若写为微分方程式的形式则得输入与输出之间的关系：

$$y^{(n)}(t)+b_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{y}(t)+b_0y(t)=Ku(t)$$

现在设
$$x_1(t)=y(t)$$
$$x_2(t)=\dot{x}_1(t)=\dot{y}(t)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n(t)=\dot{x}_{n-1}(t)=y^{(n-1)}(t)$$

则上述n阶微分方程式可置换为：

$$\dot{x}_n(t)+b_{n-1}x_n(t)+\cdots+b_0x_1(t)=ku(t)$$

经整理，可得：

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)\\ \cdots\cdots\\ \dot{x}_n(t)=-b_0x_1(t)-b_1x_2(t)\cdots-b_{n-1}x_n(t)+ku(t)\end{cases}$$

写为矩阵形式即求得状态方程式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -b_0 & -b_1 & \cdots & \cdots & -b_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ k\end{bmatrix}u(t) \qquad (8-1-11)$$

输出方程式为：

$$y(t)=x_1(t)$$

写为矩阵形式为

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix} \qquad (8-1-12)$$

2)传递函数具有零点时

设传递函数以如下形式给出：

$$G(S)=\frac{K(a_mS^m+a_{m-1}S^{m-1}+\cdots+a_1S+a_0)}{S^n+b_{n-1}S^{n-1}+\cdots+b_1S+b_0}\qquad(m<n)\qquad(8\text{-}1\text{-}13)$$

此时，引入一个变量 $X_1(S)$，则

$$G(S)=\frac{Y(S)}{U(S)}\cdot\frac{X_1(S)}{X_1(S)}=\frac{Y(S)}{X_1(S)}\cdot\frac{X_1(S)}{U(S)}$$

且令

$$\frac{Y(S)}{X_1(S)}=a_mS^m+a_{m-1}S^{m-1}+\cdots+a_1S+a_0$$

$$\frac{X_1(S)}{U(S)}=\frac{K}{S^n+b_{n-1}S^{n-1}+\cdots+b_1S+b_0}$$

分别写为微分方程式形式可得：

$$y(t)=a_mx_1^{(m)}(t)+a_{m-1}x_1^{(m-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{x}_1(t)+a_0x_1(t)$$

$$x_1^{(n)}(t)+b_{n-1}x_1^{(n-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{x}_1(t)+b_0x_1(t)=Ku(t)$$

现设

$$x_2(t)=\dot{x}_1(t)$$

$$x_3(t)=\dot{x}_2(t)=\ddot{x}_1(t)$$

$$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$x_{m+1}(t)=\dot{x}_m(t)=x_1^{(m)}(t)$$

则上两式分别置换为：

$$y(t)=a_mx_{m+1}(t)+a_{m-1}x_m(t)+\cdots+a_1x_2(t)+a_0x_1(t)$$

$$\dot{x}_n(t)+b_{n-1}x_n(t)+\cdots+b_1x_2(t)+b_0x_1(t)=Ku(t)$$

经整理得：

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t)=x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t)=x_4(t)$$

$$-\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$\dot{x}_{n-1}(t)=x_n(t)$$

$$\dot{x}_n(t)=-b_0x_1(t)-b_1x_2(t)-\cdots-b_{n-1}x_n(t)+Ku(t)$$

写为矩阵方程式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}(t)\\ \dot{x}_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ - & - & - & \cdots & -\\ -b_0 & -b_1 & \cdots & & -b_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ K\end{bmatrix}u(t)\qquad(8\text{-}1\text{-}14)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (8-1-15)$$

从数学上来说，把变量的高阶导数$y(t)$，$\dot{y}(t)$---，$y^{(n-1)}(t)$选为状态变量是可行的，但从工程实际的要求来看，由于两阶以上的导数项不易测量，因此这种选择状态变量的方法并不是很合适的。特别是在极值控制中，要求反馈全部的状态变量，这样，以高阶导数为状态变量时，在应用上是不方便的。

2、把传递函数展开成部分分式

1) $B(S)=0$ 的根为全部不相同的单根时.

设 $B(S)=(S-S_1)(S-S_2)\cdots(S-S_n)$

则传递函数可写为：

$$G(S)=C_0+\frac{C_1}{S-S_1}+\frac{C_2}{S-S_2}+\cdots+\frac{C_n}{S-S_n} \quad (8-1-16)$$

其中 $C_0=\lim\limits_{S\to\infty} G(S)$

$$C_i=\lim_{S\to S_i}(S-S_i)G(S) \quad 或 \quad C_i=\frac{A(S_i)}{B'(S_i)}$$

由传递函数 $G(S)=\dfrac{Y(S)}{U(S)}$

$$Y(S)=G(S)\cdot U(S)=C_0U(S)+\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{S-S_i}U(S) \quad (8-1-17)$$

令 $x_i(S)=\dfrac{U(S)}{S-S_i}$ $(i=1.2.\cdots n)$

则 $Sx_i(S)-S_ix_i(S)=U(S)$ (8-1-18)

对式(8-1-18)进行拉氏反变换得：

$$\dot{x}_i(t)-S_ix_i(t)=U(t) \quad (i=1.2.\cdots n)$$

$$\dot{x}_i(t)=S_ix_i(t)+U(t) \quad (i=1.2.\cdots n)$$

(8-1-19)