第20期 第1卷 机械工程学报 1984年3月

# 单环空间机构震动力完全平衡

陈宁新 张启先

（北京航空学院）

**摘 要**

本文提出了一个简单而适应性强的空间机构震动力平衡方法，用此方法讨论了R-R*、R-P、P-S、R-C、R-E、S-R、S-C和S-S′诸杆的质心位置，得出了RRRSR、RRCS、RRRCRR、RRERR、RRSS′、RSCR、RSS′R、RRPSR及Bennett机构等单环空间机构的震动力完全平衡条件。

## 一、概 述

由于空间机构复杂的结构特点和运动特性给空间机构动力学研究带来了许多困难，因此，与平面机构相比较[1、2]，空间机构震动力平衡的研究还很薄弱。文〔3〕用质量静替代法平衡RSSR机构的震动力。文〔4〕用张量算子为工具平衡RSSR和RSSP两机构的震动力。文〔5〕用静替代质量矩阵研究了某些运动杆的质量替代，并得出了RRSRR、RSCR和RSCR-SSR等机构的震动力完全平衡条件。文〔6〕讨论了RRRSR、RRPSR、RRSRR和Bennett机构等机构的震动力完全平衡条件。文〔7〕用最优化方法讨论了RCCC机构的震动力平衡问题。总的说来，以上的研究仅限于为数不多的几种简单空间机构。特别不足的是目前还没有一个比较系统、完善和适应性广的空间机构震动力平衡方法。

本文利用空间机构中各类运动杆的结构特点，将某杆的质心位置向量按合适方式分解。借助于方向余弦矩阵、机构的矩阵封闭方程和向量封闭方程，将R-R、R-P和P-S一类杆的质心位置向量用其它杆的位置参数表示，由此得出不在这类杆上附加平衡重即可完全平衡机构震动力的结论。对R-C、R-E、S-R、S-C和S-S′诸杆，文中将其质心位置向量的分量尽量用机构中其它杆的位置参数表示，由此得出该类杆质量分布中应满足的附加平衡条件，从而在这些杆上也可不加平衡重即可获得机构震动力的完全平衡。用此方法导出了RRRSR、RRCS、RRRCRR、RRERR、RRSS′、RSCR、RSS′R和RRPSR等单环空间机构的震动力完全平衡条件，并作了Bennett机构震动力完全平衡的实例计算。继本文之后，文〔8〕讨论了多环空间机构的震动力平衡及一般空间机构的震动力平衡理论。因此，本文所提出的空间机构震动力平衡方法对研究一般空间机构的震动力平衡是有指导意义的。

* 文中符号字母$R$、$P$、$C$、$S$、$S'$和$E$分别代表转动副、移动副、圆柱副、球面副、球销副及平面副。

## 二、机构的封闭方程与总质心位置方程

### 1. 坐标系

本文中空间机构各杆上所固接的坐标系按文〔9〕选取。其 $Z$ 轴为相邻杆的相对转动轴线，$X$ 轴为两 $Z$ 轴的公垂线，绕 $x_i$ 轴的转角 $\alpha_{i,i-1}$ 为轴 $Z_{i-1}$ 至 $Z_i$ 的夹角，绕 $Z_i$ 的转角 $\theta_{i,i+1}$ 为轴 $x_i$ 至 $x_{i+1}$ 的夹角，$h_i$ 和 $s_i$ 分别为两 $Z$ 轴沿 $x_i$ 轴及两 $x$ 轴沿 $Z_i$ 轴的垂直距离，见图7-1。为此，两坐标系中的向量有以下正交变换：

$$\boldsymbol{r}_i^{(i+1)} = [C_{i+1\ i}]\boldsymbol{r}_i \tag{1}$$

式中顶标"$(i+1)$"表示该向量在系 $i+1$ 中。为简便起见，本坐标系中的向量不加顶标。式(1)中$[C_{i+1\,i}]$为方向余弦矩阵。

$$[C_{i+1\ i}] = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i\,i+1} & \sin\theta_{i\,i+1} & 0 \\ -\sin\theta_{i+1}\cos\alpha_{i\ i+1} & \cos\theta_{i+1}\cos\alpha_{i\ i+1} & \sin\alpha_{i\ i+1} \\ \sin\theta_{i+1}\sin\alpha_{i\ i+1} & -\cos\theta_{i+1}\sin\alpha_{i\ i+1} & \cos\alpha_{i\ i+1} \end{bmatrix} \tag{2}$$

由式(1)和(2)得单位向量

$$\boldsymbol{Z}_i^{(i+1)} = [C_{i+1\ i}]\boldsymbol{Z}_i \tag{3}$$

即 $\boldsymbol{Z}_i^{(i+1)}$ 为如下的常向量：

$$\boldsymbol{Z}_i^{(i+1)T} = (0,\ \sin\alpha_{i\ i+1},\ \cos\alpha_{i\ i+1})^T \tag{4}$$

### 2. 空间机构的封闭方程

对空间机构中的一个 $n$ 杆封闭环(图 7-1)，均可写出下列两个矩阵封闭方程：

$$\prod_{K=1}^{n}[C_{K-1\ K}] = [I] \quad (\text{当} K=1 \text{时，} K-1 \text{为} n) \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n}[C_{ni}](h_i\boldsymbol{x}+s_i\boldsymbol{Z}) = 0 \tag{6}$$

式中$[I]$为单位矩阵，0 为零向量，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 分别为 $x_i$ 轴和 $Z_i$ 轴在坐标系 $i$ 中的单位向量。

式(5)和(6)可改写为

$$[C_{n1}][C_{12}]\cdots\cdots[C_{i-1\ i}] = [C_{n\ n-1}][C_{n-1\ n-2}]\cdots\cdots[C_{i+1\ i}] \tag{7}$$

$$h_i[C_{ni}]\boldsymbol{x} = -\sum_{j=1}^{i-1}[C_{nj}](h_j\boldsymbol{x}+s_j\boldsymbol{Z}) - \sum_{K=n}^{i+1}[C_{n\ K}](h_K\boldsymbol{x}+s_K\boldsymbol{Z}) - s_i[C_{n\ i}]\boldsymbol{Z} \tag{8}$$

### 3. 空间机构的总质心位置方程

令空间 $n$ 杆机构的总质心在定系 $n$ 中的位置向量为 $\boldsymbol{r}_s^{(n)}$，杆 $i$ 的质量为 $m_i$，杆 $i$ 的质心在动系 $i$ 及定系 $n$ 中的位置向量为 $\boldsymbol{r}_i$ 及 $\boldsymbol{r}_{si}^{(n)}$，则机构的总质心位置方程为

$$\boldsymbol{r}_s^{(n)} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n-1} m_i\boldsymbol{r}_{si}^{(n)} \tag{9}$$

中

$$M = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} r_{si}^{(n)} &= s_n Z + \sum_{j=1}^{i-1} [C_{n\ j}](h_j x + s_j Z) + [C_{n\ i}](h_i x + r_i) \\ r_{si}^{(n)} &= -h_n x - \sum_{K=n-1}^{i+1} [C_{nK}](h_K x + s_K Z) - [C_{n\ i}](s_i Z - r_i) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

## 三、R-R、R-C、R-E、C-C杆的质心位置及RRRSR、RRCS、RRRCRR、RRERR机构的震动力完全平衡条件

若一连架开式链中无移动自由度，且链中各杆的质心均为约束运动（如 S-S 杆的质心必须在两球心的连线上）。则称此链为纯转动链。文中除了所讨论的杆可有移动自由度外，其它各杆均由纯转动链与机架相连。此外，杆 $i$ 的两转动轴线不在同一平面上。

### 1. R-R 杆

在图 7-1 所示空间 $n$ 杆机构中，选取具有两个 $R$ 副的某杆 $i$ 进行研究。为了便于应用其它杆的运动参数来表示该杆 $i$ 的质心位置，将该杆质心在系 $i$ 中的位置向量 $r_i$ 分解为沿两转动轴 $Z_i$、$Z_{i-1}$ 及其公垂线 $x_i$ 方向的向量和，即

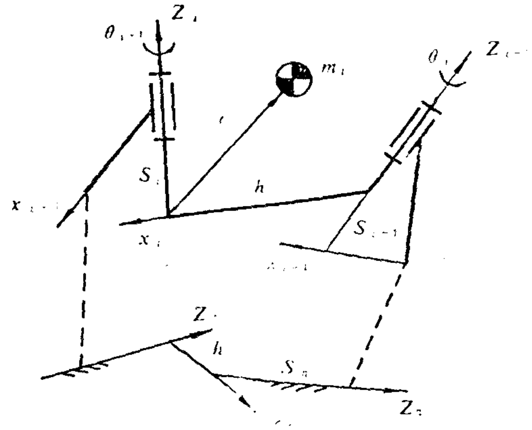

图 7-1

$$r_i = a x_i + b Z_i + c Z_{i-1}^{(i)} \tag{12}$$

如图 7-2 所示，有

$$\left.\begin{aligned} a &= r_{ix} \\ b &= r_{iz} - r_{iy}\operatorname{ctg}\alpha_{i-1\ i} \\ c &= r_{iy}\operatorname{cosec}\alpha_{i-1\ i} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

将式(12)代入(11)得

$$r_{si}^{(n)} = \sum_{j=1}^{i-1} [C_{n\ j}](h_j x + s_j Z) + (a + h_i)[C_{n\ i}]x + b[C_{n\ i}]Z_i + c[C_{n\ i}]Z_{i-1}^{(i)} + s_n Z \tag{14}$$

由式(3)和(7)得

$$\left.\begin{aligned} [C_{n\ i}]Z_i &= [C_{n\ i+1}]Z_i^{(i+1)} \\ [C_{n\ i}]Z_{i-1}^{(i)} &= [C_{n\ i-1}]Z_{i-1} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

将式(15)和机构的封闭方程(8)代入(14)，得某选定杆 $i$ 的质心在系 $n$ 中的位置向量：

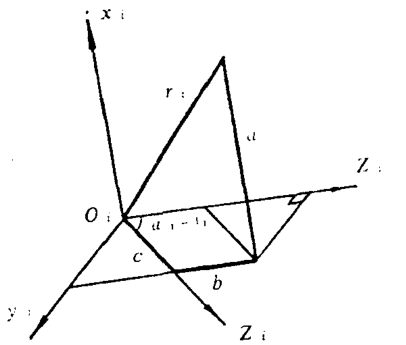


图　7-2

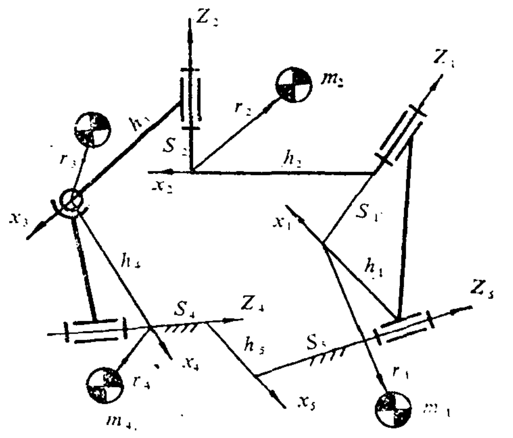


图7-3

$$\boldsymbol{r}_{s_i}^{(n)} = -\frac{a}{h_i}\sum_{j=1}^{i-1}[C_{nj}](h_j\boldsymbol{x} + s_j\boldsymbol{Z}) - \left(1+\frac{a}{h_i}\right)\sum_{K=n-1}^{i+1}[C_{nK}](h_K\boldsymbol{x}+s_K\boldsymbol{Z})$$
$$+\left(b-\frac{h_i+a}{h_i}s_i\right)[C_{n\ i+1}]\boldsymbol{Z}_i^{(i+1)} + c[C_{n\ i-1}]\boldsymbol{Z}_{i-1} - \frac{a}{h_i}s_n\boldsymbol{Z} - \left(1+\frac{a}{h_i}\right)h_n\boldsymbol{x} \tag{16}$$

式(16)中不含运动变量矩阵$[C_{n\ i}]$，即该杆 $i$ 的质心位置可用其它杆的运动参数表示。将式(16)及(11)代入机构的总质心位置方程(9)中，则式(9)不含运动变量矩阵$[C_{n\ i}]$，故不在杆 $i$ 上附加平衡重即可完全平衡机构的震动力。

例 1　RRRSR 机构的震动力完全平衡

如图 7-3 所示，设 RRRSR 空间五杆机构中各运动杆的质量及在各动系中的质心位置向量为 $m_i$ 和 $\boldsymbol{r}_i$。为了不在杆 2 上附加平衡重，将式(11)和(16)代入总质心位置方程(9)，整理得：

$$\boldsymbol{r}_s^{(5)} = \frac{1}{M}\left\{[C_{51}]\left[(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)m_1 - \frac{a}{h_2}m_2\left(h_1\boldsymbol{x}+\left(s_1-\frac{h_2}{a}c\right)\boldsymbol{Z}\right)\right]\right.$$
$$+[C_{53}]\left[\boldsymbol{r}_3m_3-\left(1+\frac{a}{h_2}\right)m_2\left(h_3\boldsymbol{x}+\left(s_2-\frac{h_2}{h_2+a}b\right)\boldsymbol{Z}\right)\right]$$
$$\left.+[C_{54}]\left[\boldsymbol{r}_4m_4-h_4\left(m_3+\left(1+\frac{a}{h_2}\right)m_2\right)\boldsymbol{x}\right]+\boldsymbol{D}\right\} \tag{17}$$

式中$\boldsymbol{D}$为常向量。

由式(17)得 RRRSR 空间五杆机构的震动力完全平衡条件：

$$\left.\begin{aligned}
&(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)m_1-\frac{a}{h_2}m_2\left[h_1\boldsymbol{x}+\left(s_1-\frac{h_2}{a}c\right)\boldsymbol{Z}\right]=0\\
&\boldsymbol{r}_3m_3-\left(1+\frac{a}{h_2}\right)m_2\left[h_3\boldsymbol{x}+\left(s_2-\frac{h_2}{h_2+a}b\right)\boldsymbol{Z}\right]=0\\
&\boldsymbol{r}_4m_4-h_4\left[m_3+\left(1+\frac{a}{h_2}\right)m_2\right]\boldsymbol{x}=0
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

值得指出：对于以$R$副为连架副的连架杆，其质心位置向量可分解为沿固定转动轴线和垂直于固定转动轴线的矢量和。因为运动变量仅为垂直于固定转动轴线的分量，故沿固定转动轴线的分量不影响震动力。若仅研究机构震动力的平衡，则该杆的质心位置可在过$r_i$点而平行于固定转动轴线的直线上任取（当然实际上要取决于运动空间及震动力矩平衡等的考虑）。

**2. R-C 杆**

在图 7-1 所示空间$n$杆机构中，如将杆$i$上的后一个转动副换成圆柱副$C$，即得$R-C$杆。这时，由于$s_i$为运动变量，不能利用机构的封闭方程（8），所以仅将式(15)代入(14)，写出杆$i$的质心在定系$n$中的位置向量：

$$r_{s_i}^{(n)} = \sum_{j=1}^{i-1}[C_{nj}](h_j\boldsymbol{x} + s_j\boldsymbol{Z}) + (a+h_i)[C_{ni}]\boldsymbol{x} + b[C_{n,i+1}]\boldsymbol{Z}_i^{(i+1)} + c[C_{n,i-1}]\boldsymbol{Z}_{i-1} + s_n\boldsymbol{Z} \tag{19}$$

由于式(19)中含有运动变量矩阵$[C_{ni}]$，由式（9）可知，机构的总质心位置方程也必含有$[C_{ni}]$，故需在杆$i$上附加平衡重方能完全平衡机构的震动力。若杆$i$的质量分布满足附加平衡条件$a+h_i=0$，则式(19)不含$[C_{ni}]$，于是不在杆$i$上附加平衡重即可完全平衡机构的震动力。

例 2　RRCS 空间四杆机构的震动力完全平衡

如图 7-4 所示，设 RRCS 空间四杆机构中各运动杆的质量及在各动系中的质心位置向量为$m_i$和$r_i$。将式(19)与(11)代入总质心位置方程（9），整理得：

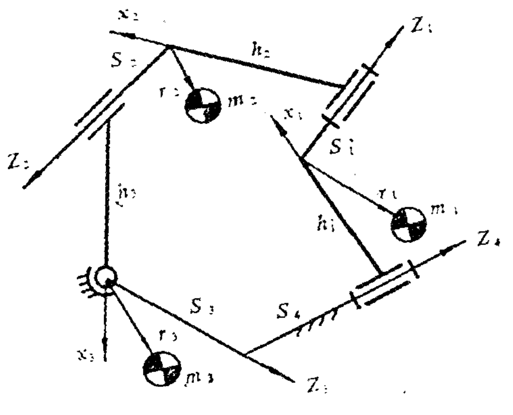

图 7-4

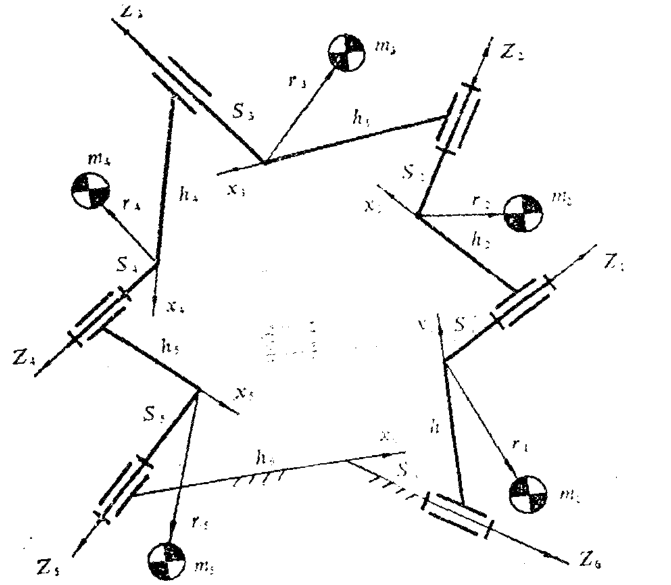

图 7-5

$$r_s^{(4)} = \frac{1}{M}\{[C_{41}][(h_1\boldsymbol{x} + r_1)m_1 + (h_1\boldsymbol{x} + (c+s_1)\boldsymbol{Z})m_2] + [C_{42}](h_2+a)m_2\boldsymbol{x} + [C_{43}](\boldsymbol{r}_3 m_3 + bm_2\boldsymbol{Z}_2^{(3)}) + \boldsymbol{D}\} \tag{20}$$

由式(20)得 RRCS 空间四杆机构的震动力完全平衡条件：

$$\left.\begin{aligned}&(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)m_1+[h_1\boldsymbol{x}+(c+s_1)\boldsymbol{Z}]m_2=0\\&\boldsymbol{r}_3m_3+bm_2\boldsymbol{Z}_2^{(3)}=0\\&h_2+a=0\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

例 3　RRRCRR 空间六杆机构的震动力完全平衡

对图 7-5 所示 RRRCRR 空间六杆机构，仿上可得其总质心位置方程为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_s^{(6)}=\frac{1}{M}\{&[C_{61}][(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)m_1+(h_1\boldsymbol{x}+s_1\boldsymbol{Z})(m_2+m_3)]\\&+[C_{62}][(h_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_2)m_2+(h_2\boldsymbol{x}+(s_2+c)\boldsymbol{Z})m_3]\\&+[C_{63}](h_3+a)m_3\boldsymbol{x}+[C_{64}](\boldsymbol{r}_4m_4+bm_3\boldsymbol{Z}_3^{(4)})\\&+[C_{65}][\boldsymbol{r}_5m_5-(h_5\boldsymbol{x}+s_4\boldsymbol{Z}_4^{(5)})m_4]+\boldsymbol{D}\}\end{aligned}\tag{22}$$

由式(22)得 RRRCRR 空间六杆机构的震动力完全平衡条件：

$$\left.\begin{aligned}&(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)m_1+(h_1\boldsymbol{x}+s_1\boldsymbol{Z})(m_2+m_3)=0\\&(h_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_2)m_2+[h_2\boldsymbol{x}+(s_2+c)\boldsymbol{Z}]m_3=0\\&\boldsymbol{r}_4m_4+bm_3\boldsymbol{Z}_3^{(4)}=0\\&\boldsymbol{r}_5m_5-(h_5\boldsymbol{x}+s_4\boldsymbol{Z}_4^{(5)})m_4=0\\&h_3+a=0\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

### 3. R-E 杆

设空间 $n$ 杆机构中某杆 $i$ 有一个 $R$ 副和一个 $E$ 副，如图 7-6 。点 $C$ 与 $D$ 分别为杆 $i$ 与 $i+1$ 上的定点。按式(12)将 $\boldsymbol{r}_i$ 分解后代入式(11)，得杆 $i$ 的质心在定系 $n$ 中的位置向量方程为式(19)。与 $R-C$ 杆相同，需在 $R-E$ 杆上附加平衡重，方能完全平衡机构的震动力，不在 $R-E$ 杆上附加平衡重的附加平衡条件为 $h_i+a=0$ 。

例 4　RRERR 空间五杆机构的震动力完全平衡

对图 7-7 所示 RRERR 空间五杆机构，将式(19)与(11)代入总质心位置方程(9)，可得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_s^{(5)}=\frac{1}{M}\{&[C_{51}][(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)m_1+(h_1\boldsymbol{x}+(s_1+c)\boldsymbol{Z})m_2]\\&+[C_{52}](h_2+a)m_2\boldsymbol{x}+[C_{53}](\boldsymbol{r}_3m_3+bm_2\boldsymbol{Z}_2^{(3)})\\&+[C_{54}][\boldsymbol{r}_4m_4-m_3(h_4\boldsymbol{x}+s_3\boldsymbol{Z}_3^{(4)})]+\boldsymbol{D}\}\end{aligned}\tag{24}$$

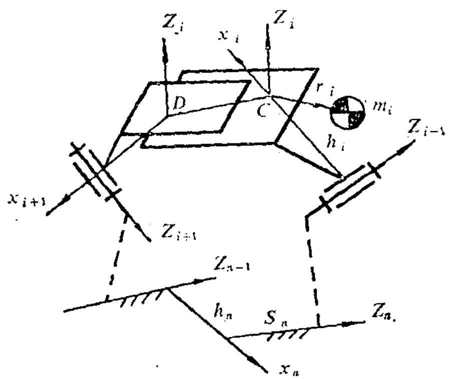


图 7-6

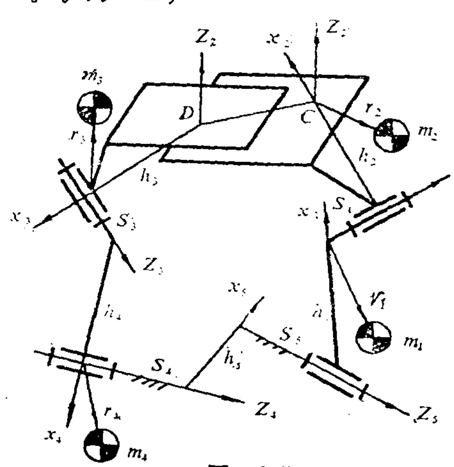


图 7-7

由式(24)得 RRERR 空间五杆机构的震动力完全平衡条件：

$$\left.\begin{aligned}&(h_1x+r_1)m_1+[h_1x+(s_1+c)Z]m_2=0\\&r_3m_3+bm_2Z_2^{(3)}=0\\&r_4m_4-m_3(h_4x+s_3Z_3^{(4)})=0\\&h_2+a=0\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

**4. C-C 杆**

在图 7-1 所示空间 $n$ 杆机构中，将杆 $i$ 上的两个转动副换成圆柱副，即得 $C-C$ 杆。将式(12)和(15)代入(11)得杆 $i$ 质心在定系 $n$ 中的位置向量为式(19)或

$$r_{si}^{(n)}=-\sum_{K=n-1}^{i+1}[C_{nK}](h_Kx+s_KZ)-[C_{n\ i+1}](s_i-b)Z_i^{(i+1)}$$
$$+a[C_{ni}]x+c[C_{n\ i-1}]Z-h_nx\tag{26}$$

式(19)或(26)分别含有由两个 $C$ 副所产生的运动变量 $s_{i-1}$ 和 $s_i$。因为在机构的运动过程中 $s_{i-1}$ 和 $s_i$ 始终随输入参数而变化，所以式(19)中的项 $s_{i-1}[C_{n\ i-1}]Z$ 和式(26)中的项 $s_i[C_{n\ i+1}]Z_i^{(i+1)}$ 不可能为常向量。将式(19)或(26)代入式(9)后，机构的总质心位置也由于运动变量 $s_{i-1}$ 或 $s_i$ 而不可能静止在某一点上。故用平衡重不可能完全平衡该机构的震动力。但由式(19)和(26)知，由质量矩 $m_ibZ_i$ 和 $cm_iZ_{i-1}^{(i)}$ 所产生的转动惯性力分量，可由其它杆上的平衡重得到部分平衡。

## 四、S-R、S-C、S-S′杆的质心位置及RRSS′、RSCR、RSS′R机构的震动力完全平衡条件

**1. S-R 杆**

设空间 $n$ 杆机构的杆 $i$ 上有一个 $S$ 副和一个 $R$ 副，如图 7-8 所示，因 $S$ 副有三个转动自由度，杆 $i$ 与 $i-1$ 间没有相对静止的转动轴线，故杆 $i$ 的质心位置向量 $r_i$ 只能在动系 $i$ 中分解为

$$r_i=r_{ix}x+r_{iy}y+r_{iz}Z\tag{27}$$

将式(27)、(15)及封闭方程(8)代入(11)，可得杆 $i$ 的质心在定系 $n$ 中的位置向量：

$$r_{si}^{(n)}=-\frac{r_{ix}}{h_i}\sum_{j=1}^{i-1}[C_{nj}](h_jx+s_jZ)-\left(1+\frac{r_{ix}}{h_i}\right)\sum_{K=n-1}^{i+1}[C_{nK}](h_Kx+s_KZ)$$
$$+\left(r_{iz}-\frac{h_i+r_{ix}}{h_i}s_i\right)[C_{n\ i+1}]Z_i^{(i+1)}+r_{iy}[C_{n\ i}]y-\frac{r_{ix}}{h_i}s_nZ-\left(1+\frac{r_{ix}}{h_i}\right)h_nx\tag{28}$$

由于式(28)中含有运动变量矩阵$[C_{n\ i}]$，由式(9)可知，机构的总质心位置方程也必含有$[C_{n\ i}]$，故需在杆 $i$ 上附加平衡重方能完全平衡机构的震动力。若杆 $i$ 的质量分布满足附加平衡条件 $r_{iy}=28$，则式(28)不含$[C_{n\ i}]$，于是不在杆上附加平衡重即可完全平衡机构的震动力。

例 5　RRSS′ 空间四杆机构的震动力完全平衡

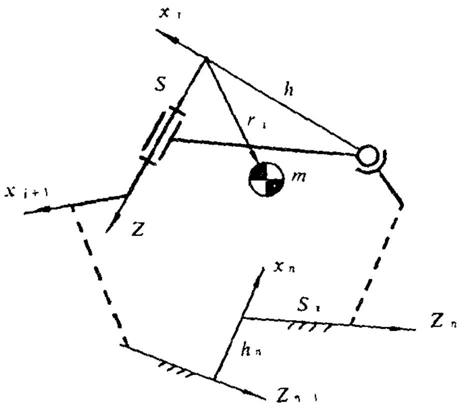


图　7-8

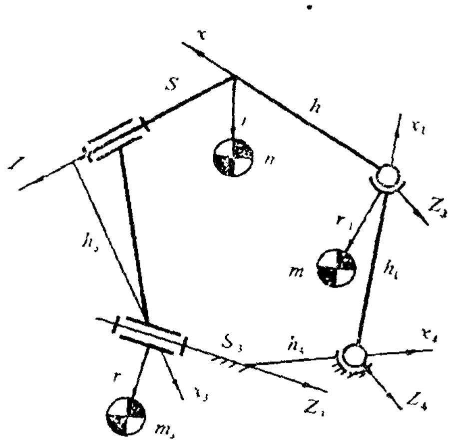


图　7-9

对图 7-9 所示 RRSS′ 机构，将式(11)和(28)代入总质心位置方程(9)，整理得：

$$\boldsymbol{r}_s^{(4)}=\frac{1}{M}\left\{[C_{41}]\left[(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)m_1-\frac{r_{2x}}{h_2}h_1m_2\boldsymbol{x}\right]\right.$$
$$\left.+[C_{42}]r_{2y}m_2\boldsymbol{y}+[C_{43}]\left[\boldsymbol{r}_3m_3-\left(1+\frac{r_{2x}}{h_2}\right)h_3m_2\boldsymbol{x}+\left(r_{2z}-\frac{h_2+r_{2x}}{h_2}s_2\right)m_2\boldsymbol{Z}\right]+\boldsymbol{D}\right\} \tag{29}$$

由式(29)得 RRSS′ 空间四杆机构的震动力完全平衡条件：

$$\left.\begin{aligned}&(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)m_1-\frac{r_{2x}}{h_2}h_1m_2\boldsymbol{x}=0\\&\boldsymbol{r}_3m_3-\left(1+\frac{r_{2x}}{h_2}\right)h_3m_2\boldsymbol{x}+\left(r_{2z}-\frac{h_2+r_{2x}}{h_2}s_2\right)m_2\boldsymbol{Z}=0\\&r_{2y}=0\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

**2. C-S 杆**

在图 7-8 所示空间 $n$ 杆机构中，如将杆 $i$ 上的 $R$ 副换成 $C$ 副，即得 $S-C$ 杆。按式(27)将 $\boldsymbol{r}_i$ 分解后与式(15)代入(11)，得杆 $i$ 的质心在定系 $n$ 中的位置向量为

$$\boldsymbol{r}_{si}^{(n)}=\sum_{j=1}^{i-1}[C_{nj}](h_j\boldsymbol{x}+s_j\boldsymbol{Z})+[C_{ni}][(h_i+r_{ix})\boldsymbol{x}+r_{iy}\boldsymbol{y}]$$
$$+r_{iz}[C_{n\,i+1}]\boldsymbol{Z}_i^{(i+1)}+s_n\boldsymbol{Z} \tag{31}$$

由于式(31)中含有运动变量矩阵$[C_{ni}]$，故需在杆 $i$ 上也附加平衡重方能完全平衡机构的震动力。若杆 $i$ 的质量分布满足附加平衡条件 $h_i+r_{ix}=0$ 和 $r_{iy}=0$，则不在杆 $i$ 上附加平衡重即可完全平衡机构的震动力。

例 6　RSCR 空间四杆机构的震动力完全平衡

对图 7-10 所示 RSCR 空间四杆机构，将式(11)和(31)代入总质心位置方程(9)得

$$\boldsymbol{r}_s^{(4)}=\frac{1}{M}\{[C_{41}][(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)m_1+h_1m_2\boldsymbol{x}]+[C_{42}][(h_2+r_{2x})\boldsymbol{x}+r_{2y}\boldsymbol{r}]m_2$$
$$+[C_{43}](\boldsymbol{r}_3m_3+r_{2z}m_2\boldsymbol{Z}_2^{(3)})+\boldsymbol{D}\} \tag{32}$$

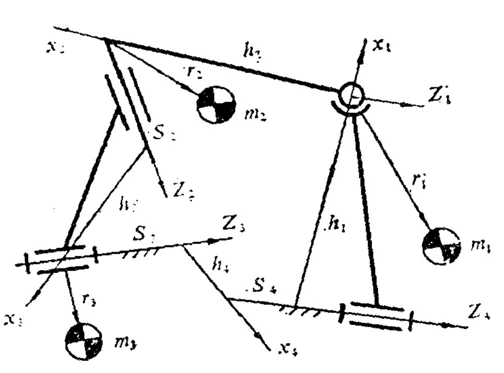

图 7-10

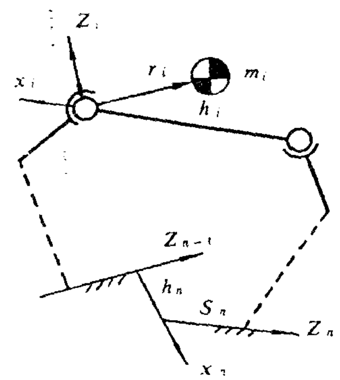

图 7-11

由式(32)得 RSCR 空间四杆机构的震动力完全平衡条件：

$$\left.\begin{aligned}&(\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)m_1+h_1 m_2\boldsymbol{x}=0\\&\boldsymbol{r}_3 m_3+r_{2x}m_2\boldsymbol{Z}_2^{(3)}=0\\&h_2+r_{2x}=0\text{，}\quad r_{2y}=0\end{aligned}\right\}\tag{33}$$

**3. S-S′杆**

设空间 $n$ 杆机构的杆 $i$ 有一个 $S$ 副和一个 $S'$ 副，如图 7-11 所示。将式(27)与封闭方程(8)代入(11)，得杆 $i$ 的质心在定系 $n$ 中的位置向量：

$$\boldsymbol{r}_{ci}^{(n)}=-\left(1+\frac{r_{ix}}{h_i}\right)\sum_{K=n-1}^{i+1}[C_{nK}](h_K\boldsymbol{x}+s_K\boldsymbol{Z})-\frac{r_{ix}}{h_i}\sum_{j=1}^{i-1}[C_{nj}](h_j\boldsymbol{x}+s_j\boldsymbol{Z})$$

$$+[C_{ni}](r_{iy}\boldsymbol{y}+r_{iz}\boldsymbol{Z})-\left(1+\frac{r_{ix}}{h_i}\right)h_n\boldsymbol{x}-\frac{r_{ix}}{h_i}s_n\boldsymbol{Z}\tag{34}$$

由于式(34)中含有运动变量矩阵$[C_{ni}]$，故需在杆 $i$ 上也附加平衡重方能完全平衡机构的震动力。若杆 $i$ 的质量分布满足附加平衡条件 $r_{iy}=0$ 和 $r_{iz}=0$，即质心在两球副中心的连线上，则不在杆 $i$ 上附加平衡重即可完全平衡机构的震动力。

例 7　RSS′R空间四杆机构的震动力完全平衡

对图 7-12 所示 RSS′R 空间四杆机构，将式(34)和(11)代入总质心位置方程(9)，整理得：

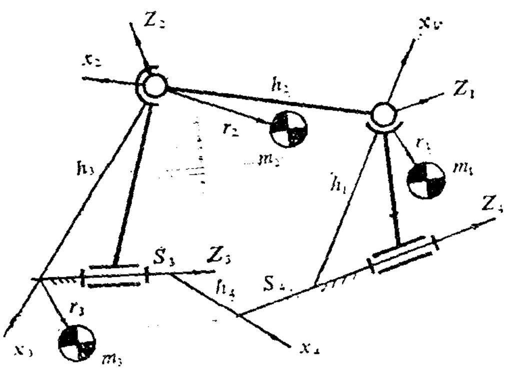

图 7-12

$$\boldsymbol{r}_c^{(4)}=\frac{1}{M}\left\{[C_{41}]\left[(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)m_1-\frac{r_{2x}}{h_2}h_1 m_2\boldsymbol{x}\right]+[C_{42}](r_{2y}\boldsymbol{y}+r_{2z}\boldsymbol{Z})m_2\right.$$

$$\left.+[C_{43}]\left[\boldsymbol{r}_3 m_3-\left(1+\frac{r_{2x}}{h_2}\right)h_3 m_2\boldsymbol{x}\right]+\boldsymbol{D}\right\}\tag{35}$$

由式(35)得 RSS′R 空间四杆机构的震动力完全平衡条件：

$$\left.\begin{aligned}&(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)m_1-\frac{r_{2x}}{h_2}h_1m_2\boldsymbol{x}=0\\&\boldsymbol{r}_3m_3-\left(1+\frac{r_{2x}}{h_2}\right)h_3m_2\boldsymbol{x}=0\\&r_{2y}=0,\quad r_{2z}=0\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

## 五、P-R、P-S、P-P、P-C 杆的质心位置与 RRPSR 机构的震动力完全平衡条件

### 1. P-R 杆和 P-S 杆

设空间 $n$ 杆机构中杆 $i$ 为 R-P 杆，杆 $i+1$ 为 P-S 杆，如图 7-13 所示。由于组成 $P$ 副的两杆 $i$ 与 $i+1$ 间无相对转动，绕 $Z_i$ 轴的转角 $\theta_{i+1}$ 为常量，故$[C_{i+1,i}]$为常量矩阵。因此有

$$\boldsymbol{V}_i^{(i+1)}=[C_{i+1,i}]\boldsymbol{V}_i\tag{37}$$

式中 $\boldsymbol{V}_i^{(i+1)}$ 为常向量。将式(37)代入(11)得杆 $i$ 的质心在定系 $n$ 中的位置向量为

$$\boldsymbol{r}_{si}^{(n)}=\sum_{j=1}^{i-1}[C_{nj}](h_j\boldsymbol{x}+s_j\boldsymbol{Z})+[C_{n,i+1}](h_i\boldsymbol{x}_i^{(i+1)}+\boldsymbol{r}_i^{(i+1)})+s_n\boldsymbol{Z}\tag{38}$$

式(38)不含运动变量矩阵$[C_{n,i}]$，故不在杆 $i$ 上附加平衡重即可完全平衡机构的震动力。值得指出：两杆组成移动副时，轴线 $Z_i$ 的方向决定于相对移动方向，但其位置则可任定，故在图 7-13 中也可将动系 $i$ 的坐标原点选在转动副轴线 $Z_{i-1}$ 上而令 $h_i=0$。

与 R-P 杆相同，若将 $\boldsymbol{V}_{i+1}^{(i)}=[C_{i,i+1}]\boldsymbol{V}_{i+1}$ 代入式(11)，则得不在 P-S 杆上附加平衡重的结论。

例 8　RRPSR 空间五杆机构的震动力完全平衡

对图 7-14 所示 RRPSR 空间五杆机构，将式(38)与(11)代入总质心位置方程(9)，整理得：

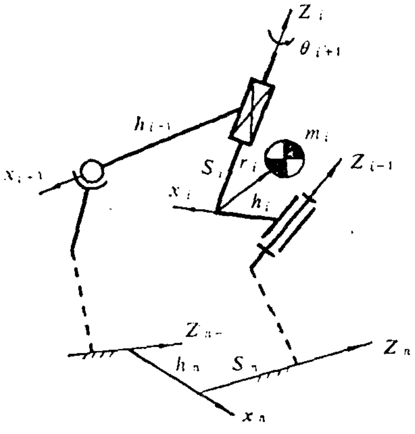


图 7-13

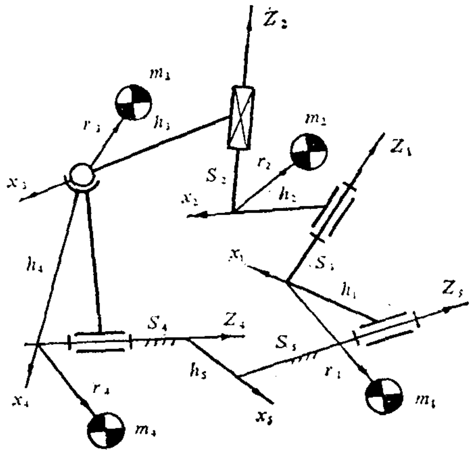


图 7-14

$$r_s^{(5)} = \frac{1}{M}\{[C_{51}][(h\,x + r_1)m_1 + (h\,x + s\,Z)m_2] + [C_{53}][m_3 r_3 + m_2(h_2 x_2^{(3)} + r_2^{(3)})] + [C_{54}](r_4 m_4 - h_4 m_3 x) + D\} \tag{39}$$

由式(39)得 RRPSR 空间五杆机构的震动力完全平衡条件：

$$\left.\begin{aligned} &(h\,x + r\,)m\; + (h\,x + s\,Z)m_2 = 0 \\ &m_3 r_3 + m_2(h_2 x_2^{(3)} + r_2^{(3)}) = 0 \\ &r_4 m_4 - h_4 m_3 x = 0 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

**2. P-P杆和P-C杆**

在图 7-1 所示空间 $n$ 杆机构中，如将杆 $i$ 上的两个转动副换成两个 $P$ 副或一个 $P$ 副和一个 $C$ 副，即得 $P-P$ 杆和 $P-C$ 杆。将式(37)代入(11)得杆 $i$ 的质心在定系 $n$ 中的位置向量为

$$\left.\begin{aligned} r_{s_i}^{(n)} &= \sum_{j=1}^{i-1}[C_{nj}](h_j x + s_j Z) + [C_{n,i-1}](h_i x_i^{(i-1)} + r_i^{(i-1)}) + s_n Z \\ \text{或}\quad r_{s_i}^{(n)} &= -\sum_{K=n-1}^{i+1}[C_{nK}](h_K x + s_K Z) - [C_{n,i+1}](s_i Z_i^{(i+1)}) - r_i^{(i+1)} - h_n x \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

由于式(41)中含有运动变量 $s_i$ 或 $s_{i-1}$，所以与前述 $C-C$ 杆的情况相同，该机构的震动力不能完全平衡。但由式(41)知，杆 $i$ 的转动惯性力可由其它杆上的平衡重得到部分平衡。

## 六、平面机构的震动力完全平衡

当各坐标系的 $Z$ 轴均垂直于运动平面 $Z = e$ 时，空间机构退化为平面机构。因全部 $\alpha$ 角均为零，故 $3\times3$ 方向余弦矩阵退化为 $2\times2$ 方阵。现以平面四杆机构为例，说明本文的震动力平衡方法同样适合于平面机构。

在图 7-15 所示 $ABCD$ 平面四杆机构中，由于 $e$ 的大小不影响机构的震动力，为方便起见，取 $e = 0$，故 $s_i = 0\ (i = 1-4)$。于是封闭方程(8)退化为

$$h_2[C_{42}]x = -h_1[C_{41}]x - h_3[C_{43}]x - h_4 x \tag{42}$$

又有复数关系

$$y = ix \tag{43}$$

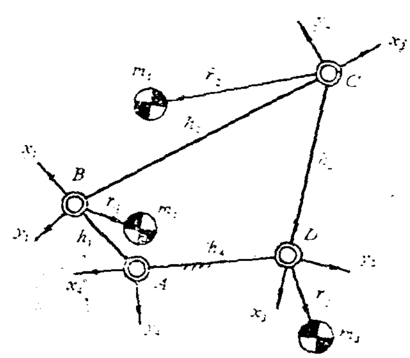

图 7-15

故得杆 2 的质心在定系 4 中的位置向量：

$$r_{s_2}^{(4)} = -\frac{h_1}{h_2}(r_{2x} + ir_{2y})[C_{41}]x - h_3\left(1 + \frac{r_{2x}}{h_2} + i\frac{r_{2y}}{h_2}\right)[C_{43}]x - \frac{h_4}{h_2}x \tag{44}$$

将式(44)及(31)代入机构的总质心位置方程(9)，整理得：

$$r_s^{(4)} = \frac{1}{M}\left\{[C_{41}]\left[(h_1 x + r_1)m_1 - \frac{h_1}{h_2}r_2 m_2\right] + [C_{43}]\left[r_3 m_3 - \frac{h_3}{h_2}(h_2 x + r_2)m_2\right] + D\right\} \tag{45}$$

由式(45)得平面四杆机构的震动力平衡条件：

$$\left.\begin{aligned}&(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)m_1-\frac{h_1}{h_2}\boldsymbol{r}_2m_2=0\\&\boldsymbol{r}_3m_3-\frac{h_4}{h_2}(h_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_2)m_2=0\end{aligned}\right\}\tag{46}$$

式(46)与文〔10、11〕的结论相同。

平面机构中移动副的处理方法完全与空间机构中的 $P$ 副相同。

## 七、实例：Bennett机构的震动力完全平衡

如图 7-16 所示，一 Bennett 机构有下述已知参数：

$h_1=h_3=10.35\text{cm}$，$h_2=h_4=20\text{cm}$，$\alpha_{41}=-\alpha_{23}=15^\circ$，$\alpha_{12}=-\alpha_{34}=30^\circ$，$\boldsymbol{r}_1^0=(-6,0,0)^T$，$\boldsymbol{r}_2^T=(-8,-2,3)^T$，$\boldsymbol{r}_3^0=(-6,0,0)^T$，$m_1^0=m_3^0=0.4\text{kg}$，$m_2=0.8\text{kg}$。这里顶标"0"代表未加平衡重时原机构的质量参数。

将式(16)和(11)代入式(9)，得 Bennett 机构的总质心位置方程：

$$\boldsymbol{r}_s^{(4)}=-\frac{1}{M}\left\{[C_{41}]\left[(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)m_1-\frac{a}{h_2}h_1m_2\boldsymbol{x}+cm_2\boldsymbol{Z}\right]+[C_{41}]\left[\boldsymbol{r}_3m_3-\left(1+\frac{a}{h_2}\right)h_3m_2\boldsymbol{x}+bm_2\boldsymbol{Z}_2^{(3)}\right]+\boldsymbol{D}\right\}\tag{47}$$

由式(47)得 Bennett 机构的震动力完全平衡条件：

$$\left.\begin{aligned}&(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)m_1-\frac{a}{h_2}h_1m_2\boldsymbol{x}+cm_2\boldsymbol{Z}=0\\&\boldsymbol{r}_3m_3-\left(1+\frac{a}{h_2}\right)h_3m_2\boldsymbol{x}+bm_2\boldsymbol{Z}_2^{(3)}=0\end{aligned}\right\}\tag{48}$$

将已知参数代入式（13）得：$a=-8$，$b=6.464$，$c=-4$。再代入式（48）得：$(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)\,m_1=-3.312\boldsymbol{x}+3.2\boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{r}_3m_3=4.968\boldsymbol{x}-5.171\boldsymbol{Z}_2^{(3)}$。由于杆 1 和杆 3 的质量分布不满足平衡条件，需按下式附加平衡重：

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{r}_im_i=\boldsymbol{r}_i^0m_i^0+\boldsymbol{r}_i^*m_i^*\\&m_i=m_i^0+m_i^*\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

式中顶标"*"代表所加平衡重的质量参数。

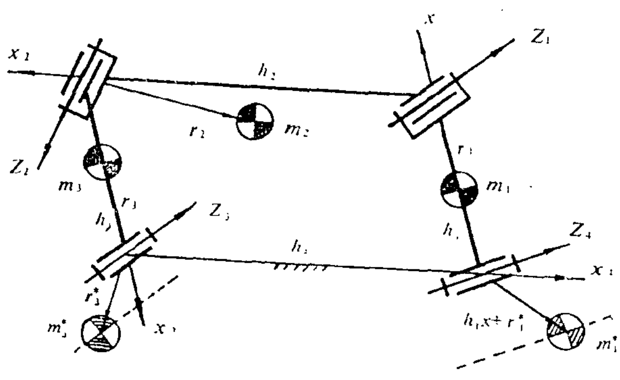


图 7-16

由式（49）得：$(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1^*)\,m_1^*=-5.052\boldsymbol{x}+3.2\boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{r}_3^*m_3^*=7.368\boldsymbol{x}-5.171\boldsymbol{Z}_2^{(3)}$。取 $m_1^*=m_3^*=0.8\text{kg}$，得 $(h_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1^*)=(-6.315,0,4)^T$，$\boldsymbol{r}_3^*=(9.21,\ 1.675,\ -6.245)^T$。

若在杆 1 上将 0.8kg 的平衡重加在过$(-16.663,\ 0,\ 4)^T$点且平行于 $Z_4$ 轴的直线上；在杆 3 上将 0.8kg 的平衡重加在过$(9.21,\ 1.675,\ -6.245)^T$点且平行于 $Z_3$ 轴的直线上，则该 Bennett 机构的震动力即可完全平衡。显然，本例的计算比文〔6〕简单。

## 参 考 文 献

〔1〕 G. G. Lowen, R. S. Berkof: “Survey of Investigations into the Balancing of Linkeages.”J-of Mechanisms, vol. 3, 1968, PP221-231.

〔2〕 R. S. Berkof, G. G. Lowen, F. R. Tepper: “Balancing of Linkages.”The Shock and Vibration Digest, vol. 9(6), 1977, pp3-10.

〔3〕 M. S. Konstantinov, P. J. Genova: “Dynamical Point Mass Models of Spatial Mechanisms.” The Mechamisms Conf. and International Symposium on Gearing and Transmission, ASME, 1972, vol. 3, paper 57.

〔4〕 R. E. Kaufman, G. N. Sandor: “Complete Force Balancing of Spatial Linkages.” J. Engng Ind., 93B, 1971, PP620-626.

〔5〕 张启先: “静替代质量矩阵及其在机构惯性力平衡中的应用”, 北京航空学院, 科研报告 BH-B611, 1980.

〔6〕 陈宁新: “Complete Shaking Force Balancing of Spatial Linkages.” 已被《Mechanism and Machine Theory》接受发表。

〔7〕 陈宁新: “Partial Balancing of Shaking Force of Spatial Four-Bar RCCC Linkage by the Optimization Method.” 已被《Mechanism and Machine Taeory》接受发表。

〔8〕 陈宁新, 张启先: “多环空间机构的震动力完全平衡及一般空间机构的震动力平衡理论”, 《北京航空学院学报》No. 1. 1983。

〔9〕 张启先: 《空间机构分析与综合》, 华南工学院印, 1979.

〔10〕 R. S. Berkof, G. G. Lowen: “A New Method for Completely Force Balancing Simple Linkages.” J. Engng Ind., 91B, 1969, PP21-26.

〔11〕 天津大学主编: 《机械原理》, 下册, 人民教育出版社, 1979.

# FULL SHAKING FORCE BALANCING OF SINGLE-LOOP SPATIAL LINKAGES

*Chen Ningxin Zhang Qixian*

## ABSTRACT

As is now well-known, in literature no general method has yet been worked out for shaking force balancing of spatial linkages because of their complexities. In the present paper, a novel approach is introduced By which the position vector of mass center of a certain moving link in a N-link spatial linkage can be appropriately resolved according to linkage structure characteristics. with the aid of direction cosine matrices and matrix loop equations, the position vector of mass center of such a link as R-R, R-P and P-S in linkages can be fully expressed in terms of the motion parameters of other links. Then the shaking force of the entire linkage may be fully balanced without attaching any counterweights to these links. For other kind of links, such as R-C, R-E, S-R, S-C and S-S, some components of the position vector of link mass center are expressed by motion parameters of other links as much as possible. As a consequence, it is possible to attach smaller counterweights to these links according to supplementary balancing conditions. The equations for the full shaking force balancing of single-loop spatial linkages such as RRRSR, RRCS, RRRCRR, RRERR RRSS′, RSCR, RSS′R and RRPSR are derived as examples. In addition, a numerical example is given for full shaking force balancing of Bennett’ s linkage.