日美法苏英

高考数学题解

河北人民出版社

日 美 法 苏 英

高考数学题解

河北人民出版社

一九八〇年·石家庄

封面设计：张 玉 良

日美法苏英
高考数学题解
*
河北人民出版社出版
河北新华印刷一厂印刷
河北省新华书店发行
*
1980年7月第1版
1980年7月第1次印刷
印数 1—54,000
统一书号 7086·992 定价 0.40元

出 版 说 明

为使广大教育工作者、中学教师和学生了解外国高考的情况，本书编选了日本、美国、法国、苏联和英国五个国家的部分学校高考题目，并对大部题目作了解答，供参考。

本书中的日本、美国、法国和苏联的考题由刘远图同志编译，并对原书无解答的部分考题作了解答；英国考题由文学理同志解答。

1979年6月13日

目　　录

1978年日本三所大学入学考试数学试题和解答

日本的现行学制是：六岁入学，小学六年，中学三年（相当于初中），高校三年（相当于高中）。

1978年大学入学考试由各校分别命题、评分和录取。

这里选译了日本三所大学入学考试的数学试题和解答。

东　京　大　学

第 一 次 考 试

理　　科　　系

〔时间：数学、英语、日语、社会、理科共200分钟〕

1．在下面的空格里填上合适的数：

按照

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

把点(x, y)映到点(x', y')的一次变换，把直线$y = lx$上的各点映到这点本身，而把直线$y = mx$上的各点映到这点关于原点的对称点。

这时，$l =$ a $\boxed{}$，$m =$ b $\boxed{}$，$p =$ c $\boxed{}$，$q =$ d $\boxed{}$。

2．在下面的空格里填上合适的数：

设 a、b 是常数，且 $a\neq0$。现在再设函数$f(x)=\dfrac{x}{ax+b}$

满足下列条件 (i)、(ii)。

(i) $f(2)=1$;

(ii) 使$f(x)=x$ 的 x 只有唯一的一个值。

这时，$a=$ e $\boxed{\quad}$，$b=$ f $\boxed{\quad}$。另外，当 $x_1>0$ 时，根据

$$x_n=f(x_{n-1})\qquad(n>1)$$

确定数列 $\{x_n\}$ 时，

$$\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{\text{g}\boxed{\quad}}{x_n}$$ $(n>1)$成立。特别是设 $x_1=1$ 时， $x_{10}=$ h $\boxed{\quad}$。

3．在下面的空格里填上合适的数：

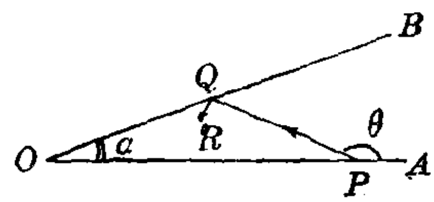
设 a 是正实数。设通过空间的四点 $O=(0,\ 0,\ 0)$，$A=(6,\ 0,\ 0)$，$B=(3,\ 5,\ 0)$，$C=(3,\ 2,\ a)$ 的球面的中心是 P。

这时，如果 $a=3$，$P=$ (i $\boxed{\quad}$，j $\boxed{\quad}$，k $\boxed{\quad}$)。

另外，为了使 P 被包含在四面体 $OABC$ 内或者它的四个面的某一个面里，当 a 变化时，a 取的最小值是 $\sqrt{\text{l}\boxed{\quad}}$。

4．在下面的空格里填上合适的数：

两条射线 OA、OB 相交成 α° 角。现在假定 OA、OB 是两面墙壁，从 OA 上一点P（如图）以 θ° 角($0^\circ<\theta<180^\circ$)发射小球。假设小球的大小不计，小球



（图 1）

在壁以外的地方都是直线前进．又设小球在壁上反射时，象图上那样，成$\angle PQB=\angle OQR$那样反射．而且对于某个$\theta°$角来说，小球在壁上作几次反射（至少1次）以后，就会顺着平行于OB的方向前进。这时：

（1）如果$\alpha°=15°$，这样的发射角$\theta°$就有m$\boxed{}$种，其中最大的是n$\boxed{}$．

（2）如果$\alpha°=50°$，这样的发射角$\theta°$就只有一种，是o$\boxed{}$°．又设这时线段OP的长是1．小球从P到跟壁最后的撞击点所前进的距离是2cos p$\boxed{}$°．但是设写在p$\boxed{}$内的数x满足$0°<x<180°$。

解　答

答：以上四题空格中的答数为

a	b	c	d	e	f	g	h
1	3	3	−2	$\frac{1}{2}$	1	2	$\frac{2}{11}$
i	j	k	l	m	n	o	p
3	$\frac{8}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{57}{5}$	5	165	150	50

〔解答〕

1．由于一次变换把点$(x,\ lx)$映到点$(x,\ lx)$，所以有

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ p & q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ lx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ lx\end{pmatrix},$$

$\therefore\quad 2x-lx=x,\ \ px+qlx=lx.$

由于 x 是任意数，所以

$$2-l=1,\ \ p+ql=l, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

又由于$(x,\ mx)$映到点$(-x,\ -mx)$，所以

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ p & q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ mx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\ -mx\end{pmatrix},$$

$$\therefore\qquad 2-m=-1,\ \ p+qm=-m. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

由①、②得　$l=1,\ m=3,\ p+q=1,\ p+3q=-3,$

$$\therefore\qquad p=3,\qquad q=-2.$$

关键：对于任意实数x，点$(x,\ lx)$映到$(x,\ lx)$。

2. 由　$f(x)=\dfrac{x}{ax+b}$，根据条件（i），得

$$f(x)=\frac{2}{2a+b}=1,$$

$$\therefore\quad 2a+b=2.$$

根据条件(ii)，得

$$\frac{x}{ax+b}=x,$$

$$\therefore\quad x(ax+b-1)=0.$$

要使 x 只有唯一的一个值，必须有 $b=1$。

这时，　$a=\dfrac{1}{2}$，$f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$.

另外，由于　$x_n=f(x_{n-1})=\dfrac{2x_{n-1}}{x_{n-1}+2}$，得

$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{x_{n-1}},$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{x_n}.$$

两边分别相减，得

$$\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}},$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{2}{x_n}.$$

当 $x_1=1$ 时，$x_2=\frac{2}{3}$，数列$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$是首项为$\frac{1}{x_1}=1$，公差为$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$的等差数列，因此

$$\frac{1}{x_{10}}=1+9\times\frac{1}{2}=\frac{11}{2},$$

$$\therefore \quad x_{10}=\frac{2}{11}.$$

关键：取 $x_n=f(x_{n-1})$ 的倒数。

3．设通过四点 $O(0,0,0)$、$A(6,0,0)$、$B(3,5,0)$、$C(3,2,3)$ 的球面的中心是 $P(x,y,z)$，有

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=(x-6)^2+y^2+z^2\\&=(x-3)^2+(y-5)^2+z^2\\&=(x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2.\end{aligned}$$

整理后得

$$x=3,\ 3x+5y=17,\ y-z=2,$$

$$\therefore \quad x=3,\quad y=\frac{8}{5},\qquad z=-\frac{2}{5}.$$

另外，由于已知 $a>0$，当 P 在四面体 $OABC$ 内或者在它的面上时，要使 a 值最小，P 应当在 OAB 面上。这时，$P(3,$

$\frac{8}{5}$，0)，由于 $OP=CP$，所以有

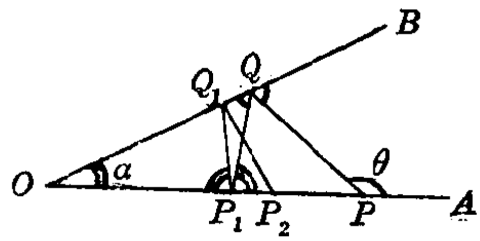
$$3^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2=\left(-\frac{2}{5}\right)^2+a^2,$$

$$a^2=\frac{57}{5},$$

因此，a 的最小值是 $\sqrt{\frac{57}{5}}$.

关键：研究 a 取最小值时 P 的位置.

4．如图，设小球在 OA 和 OB 上的撞击点依次是 P_1，P_2，P_3，…，Q，Q_1，Q_2，…于是，



(图 2)

$\angle P_1QB=\angle PQO=\theta-\alpha$,

$\angle AP_1Q_1=\angle OP_1Q=\theta-2\alpha$.

同样可以得出：

$$\angle AP_2Q_2=\theta-4\alpha,\quad \angle AP_nQ_n=\theta-2n\alpha,$$

因此小球顺着平行于 OB 的方向运动时，有

$$\theta-2n\alpha=\alpha,\qquad \therefore\quad \theta=(2n+1)\alpha.$$

(1) 当 $\alpha=15^\circ$ 时，$\theta=15^\circ(2n+1)$. $(n\geqslant1)$

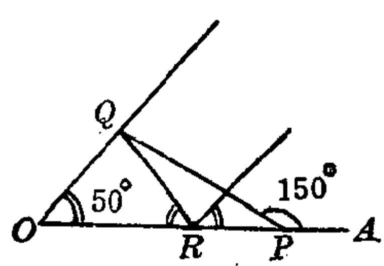
由于 $0^\circ<\theta<180^\circ$，$n=1$，2，3，4，5，共五种．其中最大的是 $\theta=165^\circ$.

(2) 当 $\alpha=50^\circ$ 时，$\theta=50^\circ(2n+1)$. $(n\geqslant1)$

由于 $0^\circ<\theta<180^\circ$，仅当 $n=1$ 时，$\theta=150^\circ$．这时，在 $\triangle OPQ$ 中应用正弦定理，有

$$\frac{OP}{\sin100^\circ}=\frac{OQ}{\sin30^\circ}=\frac{PQ}{\sin50^\circ}.$$

另外，



(图 3)

$\angle QRO=\angle QOR=50^\circ$,

$\therefore\quad QR=OQ$.

因此，当 $OP=1$ 时，

$$PQ=\frac{\sin 50^\circ}{\sin 100^\circ},\quad QR=OQ=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 100^\circ},$$

$$\therefore\quad PQ+QR=\frac{\sin 50^\circ+\sin 30^\circ}{\sin 100^\circ}$$

$$=\frac{2\sin 40^\circ\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$=2\sin 40^\circ=2\cos 50^\circ.$$

关键：$\angle AP_nQ_n=\theta-2n\alpha$。（$n=1, 2, 3, \cdots$）

文　　科　　系

〔时间：数学、英语、国语、社会、理科共 200 分钟〕

1．在下面的空格里填上合适的数：

设 $x>0$，矩阵 $A=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$ 和 $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 满足条件：$AJ=JA$ 以及 $A^2=\begin{pmatrix}8 & 6\\ -6 & 8\end{pmatrix}$。这时，$x=$ a $\boxed{\quad}$，$y=$ b $\boxed{\quad}$，$z=$ c $\boxed{\quad}$，$w=$ d $\boxed{\quad}$。

2．有 5 个男人和 2 个女人。这时，在下面的空格里填上合适的数。

（1）7 个人排列在一个圆周上，使两个女人不相邻的排列方法有 e $\boxed{\quad}$ 种。

（2）7 个人排成一列，两端是男的，这样的排列方法有 f $\boxed{\quad}$ 种。

（3）在（2）的排列方法中，女人的两边都是男人的排列方法有 g $\boxed{\quad}$ 种。

(4) 在(3) 的排列方法中，使特定的一对男女相邻的排列方法有 h［　　］种。

3.在下面的空格里填上合适的数：

设 a、b 是整数，研究直线

$$y = ax + b \quad \cdots\cdots ①$$

和三条抛物线
$$\begin{cases} y = x^2 + 3, & \cdots\cdots ② \\ y = x^2 + 6x + 7, & \cdots\cdots ③ \\ y = x^2 + 4x + 5. & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

如果直线①和抛物线②、③、④的交点的个数分别是 2、1、0，那么 $a =$ i［　　］，$b =$ j［　　］。而且这时①和③的交点的坐标是(k［　　］，l［　　］)。

4.在下面的空格里填上合适的数。

某城镇的环形马路上顺次有第一小学至第五小学等五所小学。各小学分别有显微镜 15、7、11、3、14 台。现在为了使各小学的台数相等，各向相邻的小学移交了几台。这时，要尽可能使移交的显微镜的总台数最小。于是，

从第一小学向第二小学移交了 m［　　］台，

从第二小学向第三小学移交了 n［　　］台，

从第五小学向第一小学移交了 o［　　］台。

另外，移交的显微镜的总台数是 p［　　］台。

同时假定从甲向乙移交了 -3 台，意思是说从乙向甲移交了 3 台。

解　　答

答：以上四题空格中的答数为

a	b	c	d	e	f	g	h
3	1	−1	3	480	2400	1440	576

i	j	k	l	m	n	o	p
2	3	−2	−1	3	0	−2	12

[**解答**]

1．由 $AJ=JA$，得

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -y & x \\ -w & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z & w \\ -x & -y \end{pmatrix},$$

$$\therefore\quad z=-y,\quad w=x.$$

于是

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix},$$

$$A^2=\begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\therefore\quad x^2-y^2=8,\qquad xy=3.$$

消去 y，得

$$x^4-9=8x^2,\qquad (x^2-9)(x^2+1)=0.$$

由于 $x>0$，所以有

$$x=3,\quad y=1,\quad z=-1,\quad w=3.$$

关键：由 $AJ=JA$，得出用 x、y 表示 z 和 w。

2．(1) 由于两个女人相邻的排列方法有 $2\times5!$ 种，所求的排列方法有

$$6! - 2 \times 5! = 4 \times 5! = 480(\text{种}).$$

(2) $A_5^2 \times 5! = 20 \times 120 = 2400(\text{种})$.

(3) 由于女人的两边都是男人的排列方法当中，女的和女的之间的男人有 3 人、 2 人、 1 人这三种情况，所以所求的排列方法有

$$6 \times 5! \times 2! = 6 \times 120 \times 2 = 1440(\text{种}).$$

(i) 男女男男男女男；

(ii) 男女男男女男男

男男女男男女男；

(iii) 男女男女男男男

男男女男女男男

男男男女男女男.

(4) 对于上面 6 种情况来说，每一种情况又有 $4 \times 4!$ 种排列方法，所以有

$$6 \times 4 \times 4! = 24 \times 24 = 576(\text{种}).$$

关键：女人的两边都是男人的排列有六种情况.

3. $y = ax + b$, ……①

$y = x^2 + 3$, ……②

$y = x^2 + 6x + 7$, ……③

$y = x^2 + 4x + 5$. ……④

由①和②，得 $x^2 - ax + 3 - b = 0$.

由①和③，得 $x^2 - (a-6)x + 7 - 6 = 0$. ……⑤

由①和④，得 $x^2 - (a-4)x + 5 - b = 0$.

因此，由①和②、③、④的交点的个数分别是 2、1、0 这个条件，得

$$a^2 - 4(3-b) > 0, \qquad (a-b)^2 - 4(7-b) = 0,$$

$$(a-4)^2 - 4(5-b) < 0.$$

由第 2 个式子，得

$$4b = -(a^2 - 12a + 8).$$

代入第1、3式，得

$$a^2 - 12 - (a^2 - 12a + 8) > 0,$$

$$a^2 - 8a - 4 - (a^2 - 12a + 8) < 0,$$

$$\therefore \quad \frac{5}{3} < a < 3.$$

因为 a 是整数，所以有

$$a = 2.$$

于是，$4b = 12$，　　　$\therefore \quad b = 3$。

由⑤得　　$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = 0$。

因此，①和③的交点的坐标是$(-2, \ -1)$。

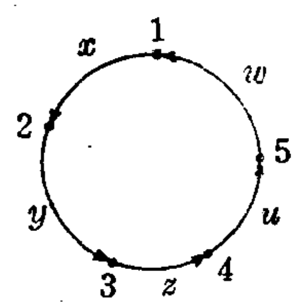
关键：交点的个数和二次方程的判别式的关系。

4．设从第一小学向第二小学、第二小学向第三小学、…第五小学向第一小学移交的显微镜台数，分别是 x、y、z、u、w。由于总台数是

$$15 + 7 + 11 + 3 + 14 = 50,$$

移交以后，各校的台数是

$$7 + x - y = 11 + y - z = 3 + z - u$$
$$= 14 + u - w = 15 + w - x$$
$$= 10,$$



（图4）

$$\therefore \quad x - y = 3, \quad z - y = 1,$$
$$z - u = 7, \quad w - u = 4,$$
$$x - w = 5.$$

即　　$y = x - 3$，　$z = x - 2$，　$u = x - 9$，　$w = x - 5$。

因此，移交的总台数是

$$|x| + |y| + |z| + |u| + |w|$$
$$= |x| + |x-2| + |x-3| + |x-5| + |x-9|.$$

当$x \leqslant 3$时，总台数的值减少；当$x \geqslant 3$时，它的值增大．因此，当$x=3$时，移交的总台数最小。这时，

$$y=0, \quad z=1, \quad u=-6, \quad w=-2.$$

最小值是 $3+0+1+6+2=12$(台)。

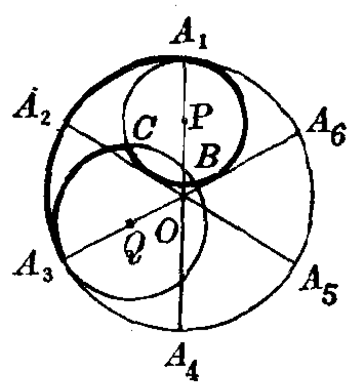
关键：将移交的总台数表示成只含x的式子。

第二次考试

理科系：1～6题，150分钟。

文科系：1，2，7，8题，100分钟。

1．如图，圆O的半径为1，将它的圆周6等分，各分点依次为A_1、A_2、…、A_6。设与弧$A_2A_1A_6$以及半径OA_2、OA_6相切的圆的圆心为P，这个圆P的圆周和线段OP的交点为B。在线段OA_3上确定一点Q，使它满足$OQ=PA_1$。以Q为圆心，QA_3为半径的圆周与P圆的交点当中，相对于直径A_1B来说，同A_2位于同侧的一点记作C。



（图5）

证明四边形$OPCQ$是平行四边形．再求出弧$A_1A_2A_3$、弧A_3C、弧CBA_1所围成的部分（图中粗线围成的部分）的面积。

2．设函数$f(x)=(x^2-4)(x^2-9)$在$t \leqslant x \leqslant t+1$范围内的最大值是$g(t)$。当$t$在$-3 \leqslant t \leqslant 3$范围内变动时，求函数$s=g(t)$，并画出它的图象。

3．用C表示抛物线$y=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}$。通过$C$上一点$Q\left(t, \frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}\right)$、并且与$C$在$Q$点切线垂直的直线，叫做$C$在$Q$点