Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

Subseries: Fondazione C.I.M.E., Firenze
Adviser: Roberto Conti

1047

Fluid Dynamics

Varenna 1982

Edited by H. Beirão da Veiga

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

Subseries: Fondazione C.I.M.E., Firenze
Adviser: Roberto Conti

1047

Fluid Dynamics

Lectures given at the 3rd 1982 Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held at Varenna, Italy, August 22 - September 1, 1982

Edited by H. Beirão da Veiga

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984

Editor

H. Beirão da Veiga
Dipartimento di Matematica, Università
38050 Povo (Trento), Italy

AMS Subject Classifications (1980): 35D05, 35F25, 35F30, 35L60, 76N10

ISBN 3-540-12893-X Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo
ISBN 0-387-12893-X Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin Tokyo

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

INTRODUCTION

This volume contains lectures and seminars presented at the "International Mathematical Summer Center" on "Fluid Dynamics" held at the "Villa Monastero", Varenna, Italy from August 22 to September 1, 1982.

The Session was organized by "Fondazione CIME" and sponsored by the Consiglio Nazionale delle Ricerche.

In organizing the meeting we have attempted to bring together different aspects in the field of fluid dynamics. Morning sessions were occupied by survey talks given by Prof. C. Bardos (Université Paris-Nord, France), Prof. A. Majda (University of California, Berkeley, U.S.A.) and Prof. J. Serrin (University of Minnesota, Minneapolis, U.S.A.).

The first part of this proceedings consists of C. Bardos and A. Majda lectures. Prof. Serrin's lectures on "Concepts of Continuum Thermo-mechanics" will appear later as part of a book. The second part consists of the afternoon seminar meetings about recent progress on the field.

I wish to express my thanks to the main lecturers, to all active participants who supported the meeting by their stimulating discussions and to the CIME scientific committee for the invitation to organize the conference.

Trento, October 1983.

Hugo BEIRÃO DA VEIGA

C.I.M.E. Session on Fluid Dynamics

List of participants

M. Arai, Emmyoji-Kitaura 2-13 (11-404), Ooyamazaki, Kyoto 618

M. Asadzadeh, Chalmers University of Technology, Department of Mathematics, S-412 96 Goteborg

J. Audounet, Université P. Sabatier, 118 Route de Narbonne, 31077 Toulouse

F.Bampi, Istituto Matematico Università, Via L.B. Alberti 4, 16132 Genova

I. Barbieri, Istituto Matematico Università, Piazza di Porta S. Donato 5, 40127 Bologna

C. Bardos, Université Paris-Nord, Centre Scientifique et Polytechnique, Av. J. B. Clement, 93430 Villetaneuse

E. Batta, Via Del Cantone 6, 06100 Perugia

H. Beirão da Veiga, Dipartimento di Matematica, Università, 38050 Povo (Trento)

M. Benati, Istituto Matematico Università, Via L.B. Alberti 4, 16132 Genova

P. Cannarsa, Via O. Tommasini 34, 00162 Roma

A. Ceré, Via G. B. Cortesi 6, 40141 Bologna

F. Conti, Scuola Normale Superiore, 56100 Pisa

T. Elmroth, Matematiska Institutionen, Chalmers Tekniska Hogskola, S-412 96 Goteborg

M. Fabrizio, Via S. Frediano 10, 40136 Bologna

A. Fernandez, Catedra de Mecanica de Fluidos, E.T.S. Ingenieros Industriales, Av. Reina Mercedes s/n, Sevilla 12

I. Ferrari, Via Ortensie 11, 41100 Modena

J. Fleckinger, 41 rue Boyssonne, 31400 Toulouse

F. Franchi, Via E. Toti 36, 40051 Altedo (Bologna)

L. Gardini, Viale della Repubblica 8, 40100 Bologna

G. Geymonat, Istituto Matematico del Politecnico, Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino

D. Graffi, Via A. Murri 9, 40137 Bologna

A. Lagha-Benabdallah, Cité des annassers IV, Bat. 3 - app. n.8, Kouba, Alger

S. Larsson, Department of Mathematics, Chalmers University of Technology, S-412 96 Goteborg

A. Majda, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, Cal. 94720

P. Marcati, Dipartimento di Matematica, Università, 38050 Povo (Trento)

C. Marchionna,, Viale Abruzzi 44, 20131 Milano

C. Marchioro, Dipartimento di Matematica, Università, 38050 Povo (Trento)

G. Matarazzo, Via Morelli e Silvati 62, 83100 Avellino

A.Maugeri, Via Etnea 688, 95128 Catania

A. Morro, Istituto Matematico Università, Via L.B. Alberti 4, 16132 Genova

G. Mulone, Via Sebastiano Catania 325, 95123 Catania

R. Nardini, Istituto Matematico Università, Piazza di Porta S. Donato 5, 40127 Bologna

M.C. Nucci, Istituto Matematico Università, Via Vanvitelli 1, 06100 Perugia

M. Padula, Via Vaiani 60, 80010 Quarto (Napoli)

P. Pucci, Istituto Matematico Università, Via Pascoli, 06100 Perugia

G. Raugel, 6 boulevard Jourdan, 75014 Paris

R. Salvi, Istituto Matematico del Politecnico, Via Bonardi 9, 20133 Milano

G. Salzano, I.A.C., Viale del Policlinico 137, 00161 Roma

P. Secchi, Dipartimento di Matematica, Università, 38050 Povo (Trento)

H. Sellers, 3003 N. Charles - Apt 2-G, Baltimore, MD 21218

J. Serrin, Univ. of Minnesota, School of Mathematics, 127 Vincent Hall, 206 Church Street S.E., Minneapolis, Minn. 55455

D. Socolescu, Institut f. ang. Math., Univ. Karlsruhe, Englerstr. 2, D 7500 Karlsruhe 1

Z. Tutek, Department of Mathematics, University of Zagreb, P.O.Box 187, Marulicev trg 19, 41001 Zagreb

A. Valli, Dipartimento di Matematica, Università, 38050 Povo (Trento)

N. Virgopia, Istituto Matematico Università, Città Universitaria, 00100 Roma

Lecture Notes in Mathematics

For information about Vols. 1–844, please contact your bookseller or Springer-Verlag.

Vol. 845: A. Tannenbaum, Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric Aspects. X, 161 pages. 1981.

Vol. 846: Ordinary and Partial Differential Equations, Proceedings. Edited by W. N. Everitt and B. D. Sleeman. XIV, 384 pages. 1981.

Vol. 847: U. Koschorke, Vector Fields and Other Vector Bundle Morphisms – A Singularity Approach. IV, 304 pages. 1981.

Vol. 848: Algebra, Carbondale 1980. Proceedings. Ed. by R. K. Amayo. VI, 298 pages. 1981.

Vol. 849: P. Major, Multiple Wiener-Itô Integrals. VII, 127 pages. 1981.

Vol. 850: Séminaire de Probabilités XV. 1979/80. Avec table générale des exposés de 1966/67 à 1978/79. Edited by J. Azéma and M. Yor. IV, 704 pages. 1981.

Vol. 851: Stochastic Integrals. Proceedings, 1980. Edited by D. Williams. IX, 540 pages. 1981.

Vol. 852: L. Schwartz, Geometry and Probability in Banach Spaces. X, 101 pages. 1981.

Vol. 853: N. Boboc, G. Bucur, A. Cornea, Order and Convexity in Potential Theory: H-Cones. IV, 286 pages. 1981.

Vol. 854: Algebraic K-Theory. Evanston 1980. Proceedings. Edited by E. M. Friedlander and M. R. Stein. V, 517 pages. 1981.

Vol. 855: Semigroups. Proceedings 1978. Edited by H. Jürgensen, M. Petrich and H. J. Weinert. V, 221 pages. 1981.

Vol. 856: R. Lascar, Propagation des Singularités des Solutions d'Equations Pseudo-Différentielles à Caractéristiques de Multiplicités Variables. VIII, 237 pages. 1981.

Vol. 857: M. Miyanishi, Non-complete Algebraic Surfaces. XVIII, 244 pages. 1981.

Vol. 858: E. A. Coddington, H. S. V. de Snoo: Regular Boundary Value Problems Associated with Pairs of Ordinary Differential Expressions. V, 225 pages. 1981.

Vol. 859: Logic Year 1979–80. Proceedings. Edited by M. Lerman, J. Schmerl and R. Soare. VIII, 326 pages. 1981.

Vol. 860: Probability in Banach Spaces III. Proceedings, 1980. Edited by A. Beck. VI, 329 pages. 1981.

Vol. 861: Analytical Methods in Probability Theory. Proceedings 1980. Edited by D. Dugué, E. Lukacs, V. K. Rohatgi. X, 183 pages. 1981.

Vol. 862: Algebraic Geometry. Proceedings 1980. Edited by A. Libgober and P. Wagreich. V, 281 pages. 1981.

Vol. 863: Processus Aléatoires à Deux Indices. Proceedings, 1980. Edited by H. Korezlioglu, G. Mazziotto and J. Szpirglas. V, 274 pages. 1981.

Vol. 864: Complex Analysis and Spectral Theory. Proceedings, 1979/80. Edited by V. P. Havin and N. K. Nikol'skii. VI, 480 pages. 1981.

Vol. 865: R. W. Bruggeman, Fourier Coefficients of Automorphic Forms. III, 201 pages. 1981.

Vol. 866: J.-M. Bismut, Mécanique Aléatoire. XVI, 563 pages. 1981.

Vol. 867: Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin. Proceedings, 1980. Edited by M.-P. Malliavin. V, 476 pages. 1981.

Vol. 868: Surfaces Algébriques. Proceedings 1976–78. Edited by J. Giraud, L. Illusie et M. Raynaud. V, 314 pages. 1981.

Vol. 869: A. V. Zelevinsky, Representations of Finite Classical Groups. IV, 184 pages. 1981.

Vol. 870: Shape Theory and Geometric Topology. Proceedings, 1981. Edited by S. Mardešić and J. Segal. V, 265 pages. 1981.

Vol. 871: Continuous Lattices. Proceedings, 1979. Edited by B. Banaschewski and R.-E. Hoffmann. X, 413 pages. 1981.

Vol. 872: Set Theory and Model Theory. Proceedings, 1979. Edited by R. B. Jensen and A. Prestel. V, 174 pages. 1981.

Vol. 873: Constructive Mathematics. Proceedings, 1980. Edited by F. Richman. VII, 347 pages. 1981.

Vol. 874: Abelian Group Theory. Proceedings, 1981. Edited by R. Göbel and E. Walker. XXI, 447 pages. 1981.

Vol. 875: H. Zieschang, Finite Groups of Mapping Classes of Surfaces. VIII, 340 pages. 1981.

Vol. 876: J. P. Bickel, N. El Karoui and M. Yor. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour IX – 1979. Edited by P. L. Hennequin. XI, 280 pages. 1981.

Vol. 877: J. Erven, B.-J. Falkowski, Low Order Cohomology and Applications. VI, 126 pages. 1981.

Vol. 878: Numerical Solution of Nonlinear Equations. Proceedings, 1980. Edited by E. L. Allgower, K. Glashoff, and H.-O. Peitgen. XIV, 440 pages. 1981.

Vol. 879: V. V. Sazonov, Normal Approximation – Some Recent Advances. VII, 105 pages. 1981.

Vol. 880: Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups. Proceedings, 1980. Edited by J. Carmona and M. Vergne. IV, 553 pages. 1981.

Vol. 881: R. Lutz, M. Goze, Nonstandard Analysis. XIV, 261 pages. 1981.

Vol. 882: Integral Representations and Applications. Proceedings, 1980. Edited by K. Roggenkamp. XII, 479 pages. 1981.

Vol. 883: Cylindric Set Algebras. By L. Henkin, J. D. Monk, A. Tarski, H. Andréka, and I. Németi. VII, 323 pages. 1981.

Vol. 884: Combinatorial Mathematics VIII. Proceedings, 1980. Edited by K. L. McAvaney. XIII, 359 pages. 1981.

Vol. 885: Combinatorics and Graph Theory. Edited by S. B. Rao. Proceedings, 1980. VII, 500 pages. 1981.

Vol. 886: Fixed Point Theory. Proceedings, 1980. Edited by E. Fadell and G. Fournier. XII, 511 pages. 1981.

Vol. 887: F. van Oystaeyen, A. Verschoren, Non-commutative Algebraic Geometry. VI, 404 pages. 1981.

Vol. 888: Padé Approximation and its Applications. Proceedings, 1980. Edited by M. G. de Bruin and H. van Rossum. VI, 383 pages. 1981.

Vol. 889: J. Bourgain, New Classes of $\mathcal{L}^p$-Spaces. V, 143 pages. 1981.

Vol. 890: Model Theory and Arithmetic. Proceedings, 1979/80. Edited by C. Berline, K. McAloon, and J.-P. Ressayre. VI, 306 pages. 1981.

Vol. 891: Logic Symposia, Hakone, 1979, 1980. Proceedings, 1979, 1980. Edited by G. H. Müller, G. Takeuti, and T. Tugué. XI, 394 pages. 1981.

Vol. 892: H. Cajar, Billingsley Dimension in Probability Spaces. III, 106 pages. 1981.

Vol. 893: Geometries and Groups. Proceedings. Edited by M. Aigner and D. Jungnickel. X, 250 pages. 1981.

Vol. 894: Geometry Symposium. Utrecht 1980, Proceedings. Edited by E. Looijenga, D. Siersma, and F. Takens. V, 153 pages. 1981.

Vol. 895: J.A. Hillman, Alexander Ideals of Links. V, 178 pages. 1981.

Vol. 896: B. Angéniol, Familles de Cycles Algébriques – Schéma de Chow. VI, 140 pages. 1981.

Vol. 897: W. Buchholz, S. Feferman, W. Pohlers, W. Sieg, Iterated Inductive Definitions and Subsystems of Analysis: Recent Proof-Theoretical Studies. V, 383 pages. 1981.

Vol. 898: Dynamical Systems and Turbulence, Warwick, 1980. Proceedings. Edited by D. Rand and L.-S. Young. VI, 390 pages. 1981.

Vol. 899: Analytic Number Theory. Proceedings, 1980. Edited by M.I. Knopp. X, 478 pages. 1981.

continuation on page 199

Vol. 1011: J.M. Sigal. Scattering Theory for Many-Body Quantum Mechanical Systems. IV, 132 pages. 1983.

Vol. 1012: S. Kantorovitz, Spectral Theory of Banach Space Operators. V, 179 pages. 1983.

Vol. 1013: Complex Analysis – Fifth Romanian-Finnish Seminar. Part 1. Proceedings, 1981. Edited by C. Andreian Cazacu, N. Boboc, M. Jurchescu and I. Suciu. XX, 393 pages. 1983.

Vol. 1014: Complex Analysis – Fifth Romanian-Finnish Seminar. Part 2. Proceedings, 1981. Edited by C. Andreian Cazacu, N. Boboc, M. Jurchescu and I. Suciu. XX, 334 pages. 1983.

Vol. 1015: Equations différentielles et systèmes de Pfaff dans le champ complexe – II. Seminar. Edited by R. Gérard et J.P. Ramis. V, 411 pages. 1983.

Vol. 1016: Algebraic Geometry. Proceedings, 1982. Edited by M. Raynaud and T. Shioda. VIII, 528 pages. 1983.

Vol. 1017: Equadiff 82. Proceedings, 1982. Edited by H.W. Knobloch and K. Schmitt. XXIII, 666 pages. 1983.

Vol. 1018: Graph Theory, Łagów 1981. Proceedings, 1981. Edited by M. Borowiecki, J.W. Kennedy and M.M. Sysło. X, 289 pages. 1983.

Vol. 1019: Cabal Seminar 79–81. Proceedings, 1979–81. Edited by A.S. Kechris, D.A. Martin and Y.N. Moschovakis. V, 284 pages. 1983.

Vol. 1020: Non Commutative Harm [redacted]
Proceedings. 1982. Edited by J. [redacted]
pages. 1983.

Vol. 1021: Probability Theory and [redacted]
ceedings. 1982. Edited by K. Itô and [redacted]
1983.

Vol. 1022: G. Gentili, S. Salamon an [redacted]
"Luigi Bianchi". 1982. Edited by E. [redacted]

Vol. 1023: S. McAdam, Asymptotic [redacted]
1983.

Vol. 1024: Lie Group Representatio [redacted]
Edited by R. Herb, R. Lipsman and J. [redacted]

Vol. 1025: D. Tanre, Homotopie [redacted]
Quillen, Sullivan. X, 211 pages. 198 [redacted]

Vol. 1026: W. Plesken, Group Rin [redacted]
Integers. V, 151 pages. 1983.

Vol. 1027: M. Hasumi, Hardy Clas [redacted]
mann Surfaces. XII, 280 pages. 19 [redacted]

Vol. 1028: Séminaire d'Analyse P. L [redacted]
Années 1981/1983. Edité par P. L [redacted]
VIII, 328 pages. 1983.

Vol. 1029: Séminaire d'Algèbre Pau [redacted]
Proceedings. 1982. Edité par M.-P. [redacted]

Vol. 1030: U. Christian, Selberg's [redacted]
XII, 196 pages. 1983.

Vol. 1031: Dynamics and Process [redacted]
Ph. Blanchard and L. Streit. IX, 21 [redacted]

Vol. 1032: Ordinary Differential [redacted]
ceedings. 1982. Edited by W. N. Eve [redacted]
1983.

Vol. 1033: Measure Theory and its Applications. Proceedings, 1982. Edited by J.M. Belley, J. Dubois and P. Morales. XV, 317 pages. 1983.

Vol. 1034: J. Musielak, Orlicz Spaces and Modular Spaces. V, 222 pages. 1983.

Vol. 1035: The Mathematics and Physics of Disordered Media. Proceedings, 1983. Edited by B.D. Hughes and B.W. Ninham. VII, 432 pages. 1983.

Vol. 1036: Combinatorial Mathematics X. Proceedings, 1982. Edited by L.R.A. Casse. XI, 419 pages. 1983.

Vol. 1037: Non-linear Partial Differential Operators and Quantization Procedures. Proceedings, 1981. Edited by S.I. Andersson and H.-D. Doebner. VII, 334 pages. 1983.

Vol. 1038: F. Borceux, G. Van den Bossche, Algebra in a Localic Topos with Applications to Ring Theory. IX, 240 pages. 1983.

Vol. 1039: Analytic Functions, Błażejewko 1982. Proceedings. Edited by J. Ławrynowicz. X, 494 pages. 1983

Vol. 1040: A. Good, Local Analysis of Selberg's Trace Formula. III, 128 pages. 1983.

Vol. 1041: Lie Group Representations II. Proceedings 1982–1983. Edited by R. Herb, S. Kudla, R. Lipsman and J. Rosenberg. IX, 340 pages. 1984.

Vol. 1042: A. Gut, K. D. Schmidt, Amarts and Set Function Processes. III, 258 pages. 1983.

Vol. 1043: Linear and Complex Analysis Problem Book. Edited by V.P. Havin, S.V. Hruščëv and N.K. Nikol'skii. XVIII, 721 pages. 1984.

Vol. 1044: E. Gekeler, Discretization Methods for Stable Initial Value Problems. VIII, 201 pages. 1984.

Vol. 1045: Differential Geometry. Proceedings, 1982. Edited by A.M. Naveira. VIII, 194 pages. 1984.

Vol. 1046: Algebraic K-Theory, Number Theory, Geometry and Analy-
[redacted] pages. 1984.
[redacted] Edited by H. Beirão

This series reports new developments in mathematical research and teaching – quickly, informally and at a high level. The type of material considered for publication includes.

1. Research monographs
2. Lectures on a new field or presentations of a new angle in a classical field
3. Seminar work-outs
4. Reports of meetings, provided they are
   a) of exceptional interest and
   b) devoted to a single topic.

Texts which are out of print but still in demand may also be considered if they fall within these categories.

The timeliness of a manuscript is more important than its form, which may be unfinished or tentative. Thus, in some instances, proofs may be merely outlined and results presented which have been or will later be published elsewhere. If possible, a subject index should be included. Publication of Lecture Notes is intended as a service to the international mathematical community, in that a commercial publisher, Springer-Verlag, can offer a wide distribution of documents which would otherwise have a restricted readership. Once published and copyrighted, they can be documented in the scientific literature.

Manuscripts

Manuscripts should be no less than 100 and preferably no more than 500 pages in length.
They are reproduced by a photographic process and therefore must be typed with extreme care. Symbols not on the typewriter should be inserted by hand in indelible black ink. Corrections to the typescript should be made by pasting in the new text or painting out errors with white correction fluid. The typescript is reduced slightly in size during reproduction; best results will not be obtained unless on each page a typing area of 18 x 26.5 cm (7 x 10 1/2 inches) is respected. On request, the publisher can supply paper with the typing area outlined.

Manuscripts generated by a word-processor or computerized typesetting are in principle acceptable. However if the quality of this output differs significantly from that of a standard typewriter, then authors should contact Springer-Verlag at an early stage.

Authors of monographs receive 50 free copies; editors of proceedings receive 75 free copies: all authors are free to use the material in other publications.

Manuscripts should be sent to Prof. A. Dold, Mathematisches Institut der Universität Heidelberg, Im Neuenheimer Feld 288, 6900 Heidelberg, Germany; Prof. B. Eckmann, Eidgenössische Technische Hochschule, CH-8092 Zürich, Switzerland; or directly to Springer-Verlag Heidelberg.

Springer-Verlag, Heidelberger Platz 3, D-1000 Berlin 33
Springer-Verlag, Tiergartenstraße 17, D-6900 Heidelberg 1
Springer-Verlag, 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010/USA

ISBN 3-540-12893-X
ISBN 0-387-12893-X

TABLE OF CONTENTS

INTRODUCTION AUX PROBLEMES HYPERBOLIQUES NON LINEAIRES

C. BARDOS

Département de Mathématiques - C.S.P. Université
de Paris-Nord, Av. J.B. Clément, 93430 Villetaneuse
et
Centre de Mathématiques Appliquées
Ecole Normale Supérieure
45, rue d'Ulm - 75005 Paris

INTRODUCTION

L'objet de cet exposé est de suivre au maximum les relations existant entre les notions d'entropies et les solutions faibles des systèmes hyperboliques. En évitant les détails techniques, on se propose de donner ainsi des résultats d'existence d'unicité et d'approximation. Le cas scalaire est traité complètement, selon les idées de Kruckov, car il est exemplaire et facile.

Au paragraphe II, on introduit la notion d'entropie pour les systèmes et on montre les relations entre cette notion et la notion de système symétrisable.

Le paragraphe III est essentiellement descriptif, on y regarde les propriétés du p système qui est à la fois assez simple pour donner lieu à plusieurs résultats explicites, et qui contient cependant beaucoup de phénomènes généraux.

Le paragraphe IV est enfin consacré à l'introduction des entropies généralisées et à leur utilisation pour prouver la convergence des solutions d'équations avec viscosité, selon les idées de Di Perna.

La rédaction de ce texte a suivi le cours CIME, il a donc été influencé par les commentaires et les réactions des autres participants.

Je tiens à remercier en particulier, pour leur aide et leur intérêt, A. Majda, J. Serrin, P. Geymonat et H. Da Veiga à qui, en plus du travail scientifique, revinrent les tâches d'organisation matérielle, qui rendirent mon séjour au CIME 82 particulièrement agréable.

TABLE DES MATIERES

I.- LOI DE CONSERVATION SCALAIRE

1.- INTRODUCTION

Il est agréable de commencer un cours sur les problèmes hyperboliques par le cas des équations scalaires, car l'algèbre est particulièrement simple et permet une description explicite des phénomènes liés à l'hyperbolicité.

Les résultats concernant l'existence et l'unicité de la solution peuvent être facilement obtenus en particulier à l'aide du principe du maximum et de la multiplication par la fonction signe. Il en résulte que les méthodes utilisées ne peuvent pas, en général, être appliquées aux systèmes, sauf pour le cas très particulier des équations de Hamilton-Jacobi. Néanmoins, les lois scalaires permettent d'exhiber un certain nombre de pathologies fondamentales dues à la non linéarité.

2.- CARACTERISTIQUES, VITESSE FINIE DE PROPOGATION ET APPARITION DES SINGULARITES

On se propose d'étudier le problème de Cauchy pour des équations de la forme

$$(I.1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad .$$

Les fonctions $u \to a_i(u)$ sont supposées assez régulières et on notera a le champ de vecteur de composantes $(a_i(u))_{1\leq i\leq n}$. La donnée initiale u(x,o) sera notée $\phi(x)$, elle sera de régularité variable selon les exemples.(I.1) est une équation scalaire dont la solution u(x,t) est une fonction dépendant de n variables d'espace et d'une variable t le temps. A une variable d'espace (I.1) s'écrit aussi $\frac{\partial u}{\partial t} + f(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ et un cas particulier fondamental est fourni par l'équation de Burger $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

L'équation de Burger représente le mouvement idéal d'un fluide unidimensionnel en l'absence de forces extérieures, u(x,t) désigne la vitesse de la particule située au point x à l'instant t, la trajectoire est donc donnée par l'équation différentielle

$$(I.2) \qquad \dot{x}(t) = u(x(t),t) \quad .$$

Plus généralement, on appellera caractéristiques les solutions des équations différentielles :

(I.3) $\dot{x}(t) = f(u(x(t),t))$.

La relation (I.1) exprime que la fonction $t \to u(x(t),t)$ est constante. Il en est donc de même du second membre de (I.3).

Il en résulte que les caractéristiques sont des droites d'équation :

(I.4) $x(t) = x_o + t\, f(\phi(x_o))$.

La résolution du problème de Cauchy pour t assez petit est alors immédiate. Cette résolution a une interprétation géométrique simple, que nous explicitons sur l'exemple de l'équation de Burger.

On introduit la surface réglée Σ définie dans $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_z$ par

(I.5) $\Sigma = \{(x,t,z) = (x, t\phi(x_o), t\,.\,\phi(x_o))$.

Pour $|t|$ assez petit, la projection de Σ sur le plan (x,t) est univoque et la solution est donnée par $u(x,t) = z$ où z est défini par la relation $(x,t,z) \in \Sigma$. (cf. figure I.1).

On peut alors déduire de la construction ci-dessus deux conséquences importantes.

1.- Les solutions se propagent à vitesse finie : plus précisément si ϕ est une fonction continûment différentiable sur $\mathbb{R}$, uniformément bornée ($|\phi(x)| \leq M$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$) la pente des caractéristiques est majorée en valeur absolue par le nombre $N = \sup\limits_{|\xi| \leq M} |f(\xi)|$. Il en résulte que la valeur de la solution au point (x,t) ne dépend que de la valeur de la donnée initiale dans la boule $B = \{X |\ |X - x| \leq Mt\}$.

En particulier, si ϕ est nulle en dehors de la boule $|x| \leq R$, $u(x,t)$ est nulle en dehors du cône $C = \{(x,t) |\ |x| \leq R + M|t|\ \}$.

En dimension 1, on peut également considérer une donnée initiale ϕ égale à la constante ϕ_- pour $x < -R$,et égale à la constante ϕ_+ pour $x > R$. Un raisonnement analogue montre alors que $u(x,t)$ sera égal à ϕ_- dans la région $\Sigma_- = \{(x,t) \mid x < -R - M|t|\}$ et à ϕ_+ dans la région $\Sigma_+ = \{(x,t) \mid x > R + M|t|\}$ (cf. figure I.2).

A la vitesse de propagation et à la non-linéarité est associé un phénomène nouveau qui est l'apparition de singularités. En effet, en dimension un d'espace l'existence de deux points x_- et x_+ vérifiant la relation $f(\phi(x_-)) > f(\phi(x_+))$

entraîne la collision des caractéristiques
$X_- = x_- + tf(\phi(x_-))$ et $X_+ = x_+ + tf(\phi(x_+))$ et la solution ne peut plus être déterminée par la méthode précédente. Au point de rencontre elle devrait choisir entre les valeurs $f(\phi(x_+))$ et $f(\phi(x_-))$!

Une autre manière de montrer l'apparition de singularités consiste à prouver que la dérivée de la solution ne peut pas rester bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_x)$.

Supposons, pour simplifier, que f soit une fonction uniformément croissante (i.e. il existe une constante $\alpha > 0$ telle que l'ont ait $f'(\xi) > \alpha \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$). En dérivant par rapport à x, on obtient pour la fonction $v(t) = -\frac{\partial u}{\partial x}(x(t),t)$ la relation

$$\text{(I.6)} \qquad \frac{dv}{dt} = f'(u(x(t),t))\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x(t),t)\right)^2 \geq \alpha v^2 .$$

Il en résulte que v deviendra infinie au bout d'un temps fini dès qu'il existera un point ξ tel que l'on ait :

$$\text{(I.7)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(\xi,0) = \phi'(\xi) < 0.$$

Ceci correspond bien à la situation décrite ci-dessus (i.e. l'existence de deux points x_- et x_+ vérifiant $f(\phi(x_-)) > f(\phi(x_+))$).

L'apparition de chocs conduit donc à introduire de nouvelles classes de solutions. Il s'agira bien sûr de solutions au sens des distributions. Il convient de souligner sur ces exemples l'importance de la notion de solutions faibles pour les problèmes non linéaires.

I.3.- SOLUTION FAIBLE, CONDITION DE CHOC ET D'ENTROPIE

Désormais, on se limitera à considérer le problème de Cauchy pour des temps positifs. On introduit des primitives $F(\xi)$ des fonctions $f_i(\xi)$ et on notera F le champ $F(\xi) = (f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_n(\xi))$.

On dira que u est une solution faible du problème de Cauchy si elle vérifie la relation :

$$\text{(I.8)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(F_i(u)) = 0, \quad u(x,0) = \phi(x).$$

<u>Remarque 1.-</u> Il sera désormais commode d'utiliser la notation $\nabla . F(u)$ pour la fonction $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(F_i(u))$.

Remarque 2.- Compte tenu de l'équation (I.8), $\frac{\partial u}{\partial t}$ est définie dans un espace de distribution convenable, il en résulte que la fonction $t \to u(.,t)$ est continue, à valeur dans ce même espace et donc que la relation $u(.,0) = \phi(.)$ a bien un sens.

Supposons que u soit une fonction continûment différentiable en dehors d'une surface orientable Σ de l'espace $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^+_t$. Désignons par ν la normale à Σ et par u^+ et u^- les limites de u de part et d'autre de Σ. Alors l'équation (I.8) est équivalente aux deux assertions suivantes

(i) en dehors de Σ on a, au sens usuel, l'équation :

$$\text{(I.9)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} f_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 .$$

(ii) sur Σ on a la formule des "sauts" :

$$\text{(I.10)} \qquad \nu_t(u^+ - u^-) + \nu_x(F(u^+) - F(u^-)) = 0.$$

(Dans la formule (I.10) ν_t et ν_x désignent respectivement les composantes de la normale ν selon l'axe des temps et selon le plan $\mathbb{R}^n_x$).

La relation (I.10) s'appelle relation de Rankine-Hugoniot.

Remarque 3.- Dans le cas d'une dimension d'espace, on convient d'orienter ν_x de la gauche vers la droite et la relation (I.10) s'écrit alors :

$$\text{(I.11)} \qquad F(u^+) - F(u^-) = -(\nu_x/\nu_t)(u^+ - u^-) ,$$

ou, en désignant par x(t) l'équation de la courbe Σ :

$$\text{(I.12)} \qquad \dot{x}(t) = (F(u^+) - F(u^-))/(u^+ - u^-) \quad . \text{[1]}$$

Pour l'équation de Burger , on a $f(u) = u$ et $F(u) = u^2/2$. L'équation (I.12) s'écrit alors :

$$\text{(I.13)} \qquad \dot{x}(t) = \frac{1}{2}(u^+ + u^-).$$

----

(1) F est une primitive de f.

On trouve que la vitesse de propagation du choc n'est autre que la moyenne des vitesses avant et après le choc.

L'analyse des conditions de Rankine-Hugoniot pour l'équation de Burger permet de fournir des contre-exemples à l'unicité. On choisit comme donnée initiale la fonction $\phi(x) = -\text{ sign } x$, alors pour tout nombre $a > 1$, les droites $x = (\frac{a-1}{2})t$ et $x = (\frac{1-a}{2})t$ sont respectivement de pentes positives et négatives et la fonction u définie par les relations

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x > (\frac{a-1}{2})t \\ a & \text{si} \quad 0 > x > (\frac{a-1}{2})t \\ -a & \text{si} \quad 0 < x < (\frac{1-a}{2})t \\ +1 & \text{si} \quad x < (\frac{1-a}{2})t \end{cases}$$

est constante en dehors des droites de discontinuité et vérifie la relation de Rankine-Hugoniot sur les droites de discontinuité, c'est une solution de l'équation de Burger. Cette solution n'est pas physique, elle correspond à une indétermination liée au fait suivant : des caractéristiques sortent des lignes de choc (cf. figure I.3). La donnée initiale $\phi(x) = \text{sign } x$ représente un fluide dont toutes les particules situées à droite de zéro, sont animées de la vitesse -1, tandis que toutes les particules situées à gauche de zéro sont animées de la vitesse $+1$. La solution naturelle pour un tel fluide est l'équilibre :

$$u(t,x) = -1 \quad \text{si} \quad x > 0, \qquad u(t,x) = 1 \quad \text{si} \quad x < 0,$$

qui est bien solution, au sens des distributions, de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2/2) = 0$.

On se propose donc de préciser un critère d'unicité pour les solutions faibles exprimant que les caractéristiques rentrent dans le choc, et pour cela, on pose les définitions suivantes :

<u>Définition 1</u>.- A toute fonction régulière η on associe la fonction vectorielle q, flux d'entropie de la fonction η pour l'équation :

$$\text{(I.11)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla . F(u) = 0$$