經濟數學導引(I)

（微積分）

經濟數學導引(I)

（微積分）

目　錄

1. 集合，數與函數 ………… 1

1.1 集合 …………………… 1

1.1.1 集合的概念 ……… 1

1.1.2 定義 ……………… 1

1.2 數 …………………… 2

1.2.1 引言 ……………… 2

1.2.2 關於實數系 ……… 3

1.2.3 不等式與絕對值 … 4

a) 不等式 …………… 4

b) 區間 ……………… 5

c) 符號與絕對值 …… 5

1.2.4 有界數集 ………… 6

1.2.5 經濟學中的數與量 7

1.3 函數 …………………… 9

1.3.1 函數觀念 ………… 9

1.3.2 圖示 ……………… 10

1.3.3 初等函數 ………… 15

a) 有理函數 ………… 15

b) 代數函數 ………… 15

c) 三角函數 ………… 16

d) 指數函數與對數函數 16

.3.4 序列（整數變數的函數）…………… 17

1.4 經濟學之函數 ………… 19

1.4.1 需求函數 ………… 19

1.4.2 生產函數 ………… 20

1.4.3 成本函數 ………… 22

1.4.4 供給函數 ………… 23

1.4.5 消費函數 ………… 23

1.4.6 投資函數 ………… 24

1.4.7 綜合生產函數 …… 24

1.4.8 綜合供給函數 …… 24

1.4.9 交易餘額需求 …… 24

1.4.10 流動性偏好 ……… 25

1.5 數列的極限值 ………… 25

1.5.1 有界數列 ………… 25

1.5.2 序列聚點的定義 … 26

1.5.3 單調與收斂數列 … 27

1.5.4 常數 e …………… 28

1.5.5 極限值的計算 …… 30

1.6 函數的極限值 ………… 32

1.7 連續函數 ……………… 36

1.7.1 連續性的定義 …… 36

1.7.2 連續函數的性質 … 38

1.7.3 經濟學函數的連續性 ……………… 42

1.8 第一章的附錄 ………… 43

1.8.1 極坐標 …………… 43

1.8.2 曲線族 …………… 45

1.8.3 複數……………… 46
複數的概念……… 46
1.8.4 複數的計算……… 48
a) 加法與減法 ……… 48
b) 乘法 ……………… 48
c) 除法 ……………… 49
d) 乘冪 ……………… 50
e) 開方 ……………… 50

2. 微分學 ……………… 53

2.1 引言……………… 53
2.2 微商……………… 53
2.2.1 微商的定義……… 53
2.2.2 函數的連續性與可微性……………… 55
2.2.3 一個物理學的例子……………… 56
2.2.4 一個經濟學的例子……………… 57
2.2.5 一階導數的直接計算……………… 57
2.2.6 以導數爲基礎的經濟概念…………… 58
2.3 微分規則……………… 59
2.3.1 函數 $f(x)=c=$ 常數及 $g(x)=x$ 的微分…………… 59
2.3.2 函數和的微分…… 60
2.3.3 函數積的微分…… 60
2.3.4 冪函數 $f(x)=x^n$ 的微分…………… 62
2.3.5 函數的商的微分… 64
2.3.6 反函數的微分…… 65
2.3.7 連鎖規則，即合成函數的微分……… 67
2.4 指數函數與對數函數… 69
2.4.1 指數函數的性質… 69
2.4.2 對數函數的性質… 70
2.4.3 不同底對數函數間的關係…………… 71
2.4.4 對數函數的微分… 72
2.4.5 指數函數的微分… 73
2.5 增長率……………… 74
2.5.1 常數比率的持續增長……………… 74
2.5.2 利息與複利……… 76
2.6 函數的對數導數與彈性……………… 77
2.6.1 對數圖形………… 77
2.6.2 對數導數………… 78
2.6.3 函數的彈性 80
2.6.4 需求的價格彈性… 83
2.6.5 其他經濟函數的彈性……………… 86
2.7 三角函數……………… 87
2.7.1 三角函數的一些重要性質 87
2.7.2 三角函數的微分… 89
2.8 反三角函數（測圓函數）……………… 91
2.8.1 反三角函數的概念……………… 91
2.8.2 反三角函數的微分……………… 93
2.9 雙曲線函數…………… 95
2.10 微分學的均値定理……96

2.10.1 Rolle定理……… 96
2.10.2 均值定理 ……… 97
2.10.3 單調函數 ……… 99
2.11 微分…………………… 100
2.11.1 微分的概念 …… 100
2.11.2 微分的計算規則‥102
2.11.3 微分用於誤差計算 ……………………103
2.12 高階導數 ……………… 103
2.12.1 高階導數的概念… 104
2.12.2 乘積的 n階導數‥ 104
2.12.3 一個物理的例子… 105
2.12.4 經濟學的例子 …· 105
2.13 凸及凹函數 ………… 107
2.13.1 凸函數的概念 … 107
2.13.2 凸函數的性質 … 108
凸函數的切線定理 …………………… 109
2.13.3 凸域 …………… 110
2.13.4 凹，擬凹與擬凸函數 ………………… 111
2.13.5 經濟學的例子 … 111

3. 函數之討論 ……………113

3.1 一般曲線………………113
3.1.1 第一階段…………113
3.1.2 第二階段…………115
a) 函數之局部情形 …116
b) 大域性質 …………118
3.1.3. 第三階段 ……… 118
3.1.4 例子………………121
3.1.5 最適問題之數學例子………………… 123
3.2 經濟學上最適問題之例子………………………125
3.2.1 利潤最大問題……125
3.2.2 生產之最適投入量 ……………………129
3.2.3 單位成本最小問題 ……………………129
3.3 經濟學之特別函數……131
3.3.1 Engel 函數………131
3.3.2 生產函數…………135
a) 線性生產函數 ……136
b) Cobb-Douglas生產函數 ………………137
c) 有理分式生產函數 …………………… 138
d) CES 生產函數……139

4. 積分學 ……………………142

4.1 定積分的概念…………142
4.1.1 引言………………143
4.1.2 定積分的定義……145
4.1.3 定積分的一些定理 ……………………148
4.2 積分學的均值定理……149
4.3 不定積分………………151
4.3.1 不定積分的概念…152
4.3.2 不定積分的基本公式……………………152
4.4 微積分基本定理………153
4.5 變數代換法……………156
4.5.1 不定積分的代換法 ……………………156
4.5.2 定積分的代換法…160

4.6　部分積分法……………163
4.7　有理函數的積分………166
4.7.1　有理函數的性質…166
4.7.2　有理函數的部分分式…………………167
4.7.3　有理函數的積分…172
4.8　瑕積分…………………176
4.8.1　有跳躍點函數的積分…………………176
4.8.2　有極點函數的積分……………………176
4.8.3　無限積分區間……178
4.9　積分的一些經濟學的應用………………………179
4.9.1　資本化……………179
4.9.2　常數折舊率………182
4.9.3　內部利率…………183
4.9.4　空間市場平衡之下的生產價格………183
4.9.5　消費者剩餘………184
a)　線性需求…………185
b)　有常數彈性的需求函數…………………186

5. 級數…………………………187

5.1　概念與定義……………187
5.2　正項級數………………192
5.2.1　根值判別法………193
5.2.2　比例判別法………193
5.2.3　發散的判別………194
5.3　絕對與條件收斂………195
5.4　經濟學的例子…………197
5.4.1　一次投資的乘數作用…………………197
5.4.2　持續投資的乘數作用…………………197
5.4.3　複利………………197
5.4.4　所得流量的資本價值…………………198
5.4.5　年金………………200
5.5　均勻收斂………………200
5.6　冪級數…………………201
5.7　Taylor 公式與 Taylor 級數……………………205
5.8　曲線的切觸與極值的判別……………………213
5.9　不定形（L'Hospital規則）…………………216

索　引……………………………223

德中名詞對照……………………230

1.集合，數與函數

1.1 集　合

1.1.1 集合的概念

集合的概念是整個數學的基礎。我們可以把一個集合定義爲“若干確定的，可區分的事物合併所成的整體”。這些事物就叫做這個集合的元素。如果A是一個集合，我們把a是A的一個元素（a包含在A中）這個敘述用符號寫爲：$a \in A$。符號$a \notin A$表示：a不包含在A中。

我們舉出在以下常常要用到的一些集合的例子：

1. 全部自然數的集合N。則有：$1 \in N$，$5 \in N$，$\frac{1}{2} \notin N$等。

2. 全部偶數的集合G．例如我們有：$2 \in G$，$3 \notin G$．

3. 全部奇數的集合U。

4. 由元素1，2，5和7所組成的集合C．我們寫作：$C=\{1, 2, 5, 7\}$。

5. 單位圓是坐標滿足方程式$x^2+y^2=1$的所有點$P=(x, y)$組成的集合。我們簡寫爲：$K=\{P=(x, y) \mid x^2+y^2=1\}$。

6. 不含任何元素的集合，即空集合，我們用符號ϕ表示。

1.1.2 定　義

集合A叫做B的子集，如果對於每個$a \in A$都有$a \in B$。我們寫作$A \subset B$（唸作：集合A包含在集合B中）或$B \supset A$。如果有一個$b \in B$而$b \notin A$則稱A是B的一個眞子集。

符號$A \notin B$表示：A不是B的子集。如果$A \subset B$且$B \subset A$，則稱這兩個集合相等：$A=B$。

對於以上所給出的集合N, G, U, C，下列關係成立：

$$G \subset N ;\quad C \subset N ;\quad U \subset N ; G \not\subset U ; C \not\subset G .$$

如果$A \subset B$；則將元素$b \in B$，不屬於A者，所成的集合叫做A在B中的補集，記作：$B-A$．例如我們有$G=N-U$．

在A中且同時也在B中的所有元素組成的集合，我們記爲$A \cap B$，並把它叫做A與B的交集。我們也說，A與B相交（見圖1）。

至少包含在集合A與B二者之一中的所有元素組成的集合，叫做A與B的聯集。我們把它記作：$A \cup B$（A聯B）（見圖2）。

例如我們有下列關係：

$$G \cap N = G ;\quad G \cap U = \emptyset ;\quad C \cap G = \{2\} .$$

要證明二集合A與B相等時，我們通常由證出$A \subset B$以及$B \subset A$達到。由這樣的方法不難推得下列規則：

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C ,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C ,$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) ,$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) .$$

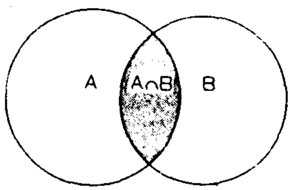

圖1.

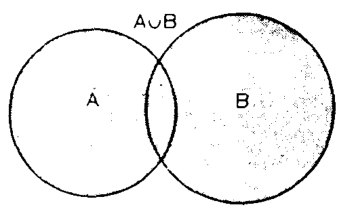

圖2.

1.2 數

1.2.1 引 言

---

[1] 參考 R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen. 4. Auflage. Braunschweig 1918.

H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, München 1927.

經濟學的數學方法以數與量，如銷貨與價格，的運算爲起點，數也構成數學分析的基礎，以認識論的方法研討數的概念的基礎，不能算作我們的工作。這樣的問題應該留給數學家，或者更加適當地，留給哲學家去討論[1]。我們只要能應用確定的規則，對於所予的數作正確的運算。

1.2.2 關於實數系

自然數 1, 2, 3,……由計數而得到，它們可以任意相加或相乘。爲了也使 $a+x=b$ 形狀的方程式，其中 a 與 b 是任意給予的自然數，恒可求解，必須在自然數集合中加入 0 與負數 -1, -2, -3, ……而擴展成整數集合。如此當 a 與 b 是任意整數時，方程式 $a+x=b$ 則亦恒有唯一的解，換句話說：在整數的範圍中，可以不受拘束地作減法運算。

設 p 與 q 是任意整數。如果我們由引入有理數 p/q，$q \neq 0$，而將整數集合擴大，則每個 $ax=b$ 形狀的方程式（例如 $2x=3$），其中 $a \neq 0$ 與 b 是任意有理數，都有一個唯一確定的有理數解。乘法的反運算，除法，因此在有理數集合中有了普遍定義。

通常將有理數以一直線，即數線，上的點直觀地顯示，在此直線上任取一點定爲原點（即 0 點），並取另一點作爲點 1．0 與 1 之間的線段就用作尺度，以將每一個正的或負的有理數對應到數線上一個確定的位置。習慣上，正數置於 0 的右邊，而負數置於左邊。

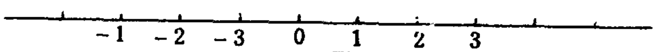

圖 3.

如果我們想像以上述方法將有理數用數線表示，則其具有以下性質：有理數分佈在數線上“到處稠密”，這就是說，在兩個任意相近的有理數之間必定還可找到另外的有理數。例如在 0 與 1/10 之間還有有理數 1/100。在 0 與 1/100 之間還有有理數 1/1000 等等。

如果我們如以上所述將有理數以數線上的點表示，則可確認，有理數的範圍還可以自然地予以擴大，即將數線上的每一點對應到一個數。由這種唯一的對應則將有理數集合擴展爲實數集合。例如由幾何方法作出的線段 $\sqrt{2}$ 就沒有有理數對應，對於半徑 ½ 的圓周 π 也是一樣。實數，不是有理的，就叫做無理數，與有理數相同，無理數在數線上也是到處稠密的。

我們能夠證明，每個無理數都可以任意精確地用有理數來逼近。每個實數都可以寫成十進位小數，有限或循環小數對應有理數，其他的對應無理數

而每個無窮小數都可以用有限小數任意接近。

例如無理數$\sqrt{2}$可自下方以較小的有理數，以及自上方以較大的有理數任意精確地逼近。

我們在此省略一般的證明，只給出若干逼近的步驟。

$z'_1=1<\sqrt{2}<z''_1=2$，　　因爲$1<2<4$；
$z'_2=1.4<\sqrt{2}<z''_2=1.5$，　因爲$(1.4)^2<2<(1.5)^2$；
$z'_3=1.41<\sqrt{2}<z''_3=1.42$，因爲$(1.41)^2<2\ (1.42)^2$.[1]

數z'_i與z''_i決定數線上一個小段，即區間I_i。我們看出，每個區間I_{i+1}完全被包含在前一個區間I_i中，當指標i增大時，區間I_i的長度趨近到0，一個這樣的區間序列I_1, I_2, …, I_i, …叫做一個區間節套，這些區間逐漸收縮到一個確定的，同時屬於所有區間的點z。這個最內部的點z顯示一方面爲遞增的有理點序列z'_1, z'_2, z'_3, …, z'_n, …的極限點，另一方面爲遞減的有理點序列z''_1, z''_2, z''_3, …的極限點。因此z點是兩個有理點列的共同極限點。我們寫作：

$$\lim_{n\to\infty} z'_n=\lim_{n\to\infty} z''_n.\ ^{2}$$

因爲對於每個i有：$z'_i<\sqrt{2}<z''_i$，我們得到：

$$\lim_{n\to\infty} z'_n=\lim_{n\to\infty} z''_n=\sqrt{2}$$

以上所述無理數$\sqrt{2}$以有理數逼近的步驟，導致下列實數的解析定義：如果z是一個以有理數爲端點的區間節套的極限點，我們則稱z爲一實數。

非常重要的一點，就是在擴展所得的實數集合中，有理數的所有基本運算規則仍然成立。

1.2.3 不等式與絶對值

a）不等式 對於任意兩個實數a與b，三個大小關係：a小於b，a等

---

[1] 符號$a<b$表示：a比b小，如果$a<b$，$a=b$兩個式子中至少有一個成立，則合寫爲$a\leq b$．

[2] 參考1.5.3節。

於b或a大於b，之中必定有一個而且只有一個成立。我們簡寫爲$a<b$，$a=b$，$a>b$（即$b<a$）.

如果第一或第二關係成立，則寫爲：

$$a\leq b\quad（或 b\geq a）.$$

對於不等式的計算，我們有下列規則：

1. 由$a\leq b$及$b\leq c$得$a\leq c$.
2. 由$a\leq b$及$c\leq d$得$a+c\leq b+d$.
3. 由$a\leq b$及$c>0$得：$ca\leq cb$；$\frac{a}{c}\leq\frac{b}{c}$.
4. 由$a\leq b$及$c<0$得：$ca\geq cb$；$\frac{a}{c}\geq\frac{b}{c}$
5. 由$a\leq b$得$-a\geq -b$.
6. 由$0<a\leq b$得$0<\frac{1}{b}\leq\frac{1}{a}$
7. 由$a\leq b<0$得$\frac{1}{b}\leq\frac{1}{a}<0$.

b）區　間　一個區間就是滿足下列雙不等式之一的所有實數x的集合：

$$a\leq x\leq b,\quad a<x<b,\quad a\leq x<b,\quad a<x\leq b.$$

我們將區間分爲下列幾種類型：

$a\leq x\leq b$：　有限閉區間（端點$x=a$及$x=b$屬於區間）.

$a<x<b$：　有限開區間（端點不屬於區間）.

$a\leq x<b$：　有限半開區間。

$\left.\begin{array}{l} a<x<\infty: \\ -\infty<x\leq b: \\ -\infty<x<\infty: \end{array}\right\}$　無限區間[1]。

c）符號與絕對值　一個實數x的符號，我們以sign x表示，定義如下：

$$\operatorname{sign} x=+1\quad 對於\quad x>0,$$

[1] 符號∞表示'無窮大'。

$$\operatorname{sign} x = -1 \quad \text{對於} \quad x < 0.$$

對於 $x = 0$ 則 sign x 未定義．

一個實數 x 的絕對值 $|x|$ 定義如下：

$$|x| = x \quad \text{對於} \quad x \geq 0,$$
$$|x| = -x \quad \text{對於} \quad x < 0.$$

例如我們有：

$$|7| = 7, \quad |-7| = 7, \quad |0| = 0.$$

因此每個實數可以表示如下：

$$x = \operatorname{sign} x \, |x|.$$

我們不難推得，關於絕對值計算的一些規則：

1. $|-x| = |x|$.

2. 由 $|x|=a$,其中 $a>0$，可得 $x=a$ 或 $x=-a$．$|x|=a$ 與方程式 $x^2=a^2$ 同義．

3. 對於任意實數 x 及 y，所謂三角不等式成立：

$$|x+y| \leq |x|+|y|; \quad |x-y| \leq |x|+|y|,$$
$$|x+y| \geq \big||x|-|y|\big|; \quad |x-y| \geq \big||x|-|y|\big|.$$

例如：

$$|10-3| = 7 < |10|+|-3| = 13,$$
$$|-3-8| = 11 > 5 = \big||-3|-|-8|\big|.$$

4. 對於兩個任意實數 a 與 b，$b \neq 0$，的積 ab 及商 $\frac{a}{b}$，我們有

$$|ab| = |a|\,|b|,$$
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

1.2.4 有界數集

一個實數的集合 A 稱爲有上界（或有下界），假如存在一個實數 M，使得 $x \leq M$（或 $x \geq M$）對於每個 $x \in A$ 成立。

M稱為A的一個上界（或下界）。

如果一個集合B同時有上界與下界，我們則說B有界。如此則存在一個實數N，使得對於每個$x \in B$都有$|x| \leq N$.我們稱N為B的一個界限。

例如區間$a \leq x \leq b$有界。a及$a-1$都是區間的下界，而b及$b+2$都是區間的上界，自然數的集合有下界，但沒有上界。

下列關於有界集合的定理對於微分學的建立有重大意義。

定理 1：如果A是一個有上界（或有下界）的實數集合，則在A的所有上界（或下界）之中存在一個最小上界（或最大下界）。

A的最小上界也叫做A的上限，記作$\sup\limits_{x \in A} x$（sup是Supremum的縮寫）。A的最大下界也叫做A的下限，記作$\inf\limits_{x \in A} x$（inf是Infimum的縮寫）。

定理 2：如果$a = \inf\limits_{x \in A} x$及$b = \sup\limits_{x \in A} x$，則在$A$中恒可取出兩個序列$(x_n)$及$(y_n)$，使得

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = b.$$

我們在此省略定理的證明，因為證明中需要對實數有更確實的認識。[1]

1.2.5 經濟學中的數與量

對於經濟問題的數學分析，一般的起點就是可測度的經濟量，如數量與價格及由這些構成的綜合數：國民生產毛額及其中各種成分；以及各種指數，例如物價水準與工資水準。

在個體經濟理論中，主要興趣在於貨物的價格與數量。這些都是正數，為了簡單起見，通常假設其可連續變動，因而視為實數。對於數量而言，這只對於可以任意分割的貨物（液體，氣體，條狀）符合；而對於價格則從不符合。注意一個變數的單位因次，也很重要。例如記載一個企業的總生產。所製造的各類貨物可對應到單位價格。如將貨物數量乘以相應的單位價格，最後求其總和，就得到一個企業的總生產值，以錢幣單位（如SFr.，DM，$等）表示。如果我們將一項家計中需求的貨物數量乘以單位價格，就得到這項家計的總支出，同樣也是一個以錢幣單位測度的量。

---

[1] 例如參考：H. Grauert, I. Lieb, Differential- und Integralrechnung I. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.

在總體經濟中出現綜合數，單位因次通常亦爲錢幣單位，例如國民生產總額Y，它定義爲所有貨物及勞務效用的總值，在一個國民經濟中及在一定期間內完成者。原則上它就是一個國民經濟中所有企業創造價值的總和。同樣地，國民生產總額的主要成分、消費、投資、儲蓄、也都有相同的單位因次（錢幣單位）。

消費C爲貨物及勞務效用的總值，在一個期間中家計所耗用者，消費部分的典型例子爲麵包、牛油、醫療服務、電影、汽車等。

政府消費G特別包括貨物及勞務效用，爲國家所耗用者，例如公立學校或道路的預算，以及公務人員的勞務效用。

投資I爲貨物及勞務效用，在一個期間中所產生，但在同一期間中未被耗用者，例如新建的大樓及機器，倉儲貨物的增加等。

資金K是所有在一個國民經濟中提供的生產要素的總值。因此投資I表示資金的增長。

儲蓄S是國民生產Y中未被耗用的部分。

也有些量，如勞力以時間單位（工作小時）或勞動人數，又如電力，運輸量等，則以其他適當的自然單位測度。

作爲沒有單位因次的量有“國民經濟[1]的總比例數”。例如其中包含：

儲蓄率$\frac{S}{Y}$，即儲蓄S與國民生產Y的比值。

資金比率$\frac{K}{Y}$，即以國民生產Y除資金K。

工資率$\frac{w \cdot N}{Y}$，即工資總值（每人工資$=w$乘以勞工人數N）除以國民生產Y。

類似的比率數有：

消費率$\frac{C}{Y}$，

投資率$\frac{I}{Y}$，

[1] 見L. R. Klein, The Great Ratios of Economics, The Quarterly Journal of Economics, 75（1961年5月）。

錢幣的“收入速率”$\frac{Y}{M}$，其中M表示錢幣數量。

輸出率$\frac{X}{Y}$，X是一個國民經濟的輸出值，

等等。

在這些可測度的，並以取定單位完善定義的量之外，有時也出現一些在理論上有興趣的，但用目前已有經驗不能測度的，或者難以實現的量，如效用以及關於未來物價與數量的期望值，與經濟主體的狀況，即使在經濟理論中，如同其餘的科學，所探討的對象原則上只建立在可測度的量上，然而對於某些理論上的討論，那些不能直接驗證的量還是很有用處，只要我們能夠按照一般規則計算。

1.3 函 數

1.3.1 函數觀念

如果X與Y是任意集合，則一個自X到Y的函數或映射f就是一個規則，將每個$x \in X$唯一地對應到一個$y \in Y$。（我們有時把一個函數f寫成$f(x)$，我們也將依照一般的講法，說函數$f(x)$或$y=f(x)$）。

集合X稱爲f的定義域，所有$y \in Y$，有一x使得$f(x)=y$者，形成的集合稱爲f的像集$f(x)$或值域，如果$f(x)=Y$，則稱f爲一個將X映成Y的映射。

在本書中常見的情形，不論函數f的定義域或值域都是實數的集合，定義域大都是一個開的，閉的，有限或無限區間，或是自然數的集合，我們則說，f是一個實變數的實值函數。

函數或映射的觀念在整個數學及其應用中有特別重要的地位。

上述定義中的對應可以由經驗（由測量），由一個數學方程式，由一個計算機程式，或者由一個數值表繪出。我們注意到，這個定義是很廣泛的，可以容許完全任意的對應。

如果一個函數f由一個數學方程式繪出（例如：$f(x)=a-bx$；$f(x)=ax^2$；$f(x)=c$，其中c爲一定數），我們則說函數f有一顯式，並稱$f(x)$爲因變數，x爲自變數（獨立變數）。我們也稱$f(x)$爲f在x處的函數值，有時函數也自然地由一個方程式$F(x,y)=0$的形式給出。我們將變數x以數值代入，求出滿足方程式的y值，而得到有關的對應，

其間對於 x 的一個確定的值，往往可求出多個 y 值（例：$x^2+y^2=1$，因此 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$）。雖然如此不能得到上述定義的函數，我們常常稱之為"多值"函數。在許多應用的例子中，可由事件的性質決定應取那一個函數值，我們因而能夠同樣處理（計算）多值函數，如同"單值的"一般。

我們稱函數 f 為一對一，假如由 $x_1\neq x_2$ 即得：$f(x_1)\neq f(x_2)$。一個一對一的函數是可逆的。f 的逆函數（反函數），記作 f^{-1}，將 f 的值域 $f(X)$ 中每個元素 $f(x)$ 對應到元素 x。

f^{-1} 的定義域因此與 f 的值域一致。如果這個一對一函數 f 以方程式 $y=f(x)$ 給出，則我們要得到逆函數，只要自這個方程式解出 x：$x=f^{-1}(y)$。

例：

1. $y=f(x)=3x+5$；　$x=f^{-1}(y)=\dfrac{y}{3}-\dfrac{5}{3}$；

2. $y=g(x)=\dfrac{1}{x+3}$，　$x\neq-3$；$x=f^{-1}(y)=\dfrac{1}{y}-3$；

3. $y=k(x)=x^2$，$x>0$；　$x=k^{-1}(y)=\sqrt{y}$，$y>0$.

我們容易驗證下列公式成立：

$$f^{-1}(f(x))=x\,,\qquad f(f^{-1}(y))=y\,.$$

在上述定理中，我們用到一個過程，可以推廣且在分析中非常重要：函數的合成。如果 f 與 g 是兩個函數，f 的值域包含在 g 的定義域中，則可作函數 $F(x)=g(f(x))$。我們說，F 由 g 與 f 合成而得到。

例如 $f(x)=x^2+4$ 及 $g(x)=\sqrt{x}$，則 f 的值域包含在 g 的定義域中。因此可定 g 與 f 的合成：$F(x)=g(f(x))=\sqrt{x^2+4}$。

1.3.2 圖示

一個函數 f 的性質常可很直觀地由圖形表示上看出。圖形可由描點而得到，即在一個直角坐標系中將自變數 x 及函數值 $f(x)$ 給出，通常將自變數 x 在橫軸（橫坐標），而 $f(x)$ 在縱軸（縱坐標）上表示，這樣所作出的曲線也稱為函數 f 的圖形（見圖 4）。

以下我們討論一些特別函數的圖形，但不進一步深究所考慮函數的理論。

1. 如果 $f(x)=ax+b$，其中 a 與 b 為給予常數，則稱 f 為一線性函數。

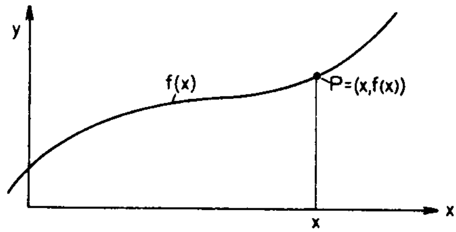

圖 4。

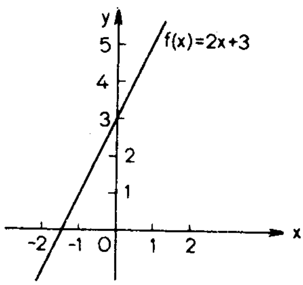

圖 5。

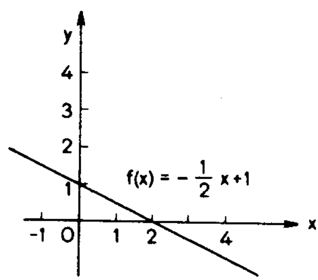

圖 6。

我們將下列線性函數用圖形表示：

$$f_1(x) = 2x+3,$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{2}x+1 .$$

f_1 的圖形是一根上升的直線（圖 5），而 f_2 的圖形則是一條下降的直線（圖 6）.

一般地，係數 a 給出直線 $f(x)$ 的斜率（如果 α，$0<\alpha<\pi$，是一直線與正 x 軸的交角，則 $\mathrm{tg}\ \alpha$ 即爲直線的斜率）. b 則給出直線與 y 軸相交的位置。

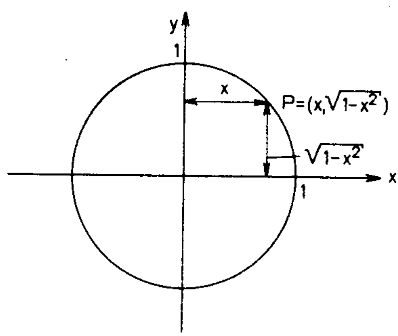

圖 7。