上海大学出版社

2005年上海大学博士学位论文 39

函数值Padé-型逼近与退化的广义逆函数值Padé逼近及在积分方程中的应用

● 作者：潘宝珍

● 专业：计算数学

● 导师：顾传青

上海大学出版社

2005年上海大学博士学位论文 39

函数值Padé-型逼近与退化的广义逆函数值Padé逼近及在积分方程中的应用

● 作者：潘宝珍

● 专业：计算数学

● 导师：顾传青

A Dissertation Submitted to Shanghai University for the Degree of Doctor (2005)

Functional Valued Padé-type Approximant and Degeneracies of Generalised Inverse Funtion-valued Padé Approximant and Applications in Integral Equations

Ph. D. Candidate: Pan Baozhen
Supervisor: Gu Chuanqing
Major: Computational Mathematics

Shanghai University Press
· Shanghai ·

摘　要

本文的主要结果分为三个部分.

第一部分是对函数值 Padé-型逼近的理论进行了研究.本文首次在多项式空间上引入了一种线性泛函,从而定义了一种函数值 Padé-型逼近(FPTA),并将它应用于求解第二类 Fredholm 积分方程.函数值 Padé-型逼近与以往的函数值 Padé 逼近方法相比,其逼近方法对幂级数在极点处附近具有较好的逼近效果,并且它的分母多项式的次数可以是任意的,这就避免了广义逆函数值 Padé 逼近的分母多项式的次数必须是偶数次的限制.在此基础上本文建立了四种有效的算法,通过积分方程的实例分别加以了验证.数值实验结果很好地验证了算法的有效性和实用性.随后,给出了函数值 Padé-型逼近的两种形式的误差公式,最后还对函数值 Padé-型逼近的收敛性进行了详细的讨论,并给出了判定函数值 Padé-型逼近的行、列收敛的充分条件及收敛速率.

第二部分是对退化的广义逆函数值 Padé 逼近进行了讨论.所谓退化是指在构造广义逆函数值 Padé 逼近的过程中其分母多项式的次数是奇数次的或者其分母具有零点.本文首先给出了扩充的广义逆函数值 Padé 逼近定义,这在一定的程度上是拓广了广义逆函数值 Padé 逼近的范围.然后证明了扩充的广义逆函数值 Padé 逼近的存在、唯一性定理.构造了在退化的各种情形下型为$[n-\sigma/2k-2\sigma]$的广义逆函数值 Padé 逼近

式，最后讨论了扩充的广义逆函数值 Padé 逼近表的元素具有正方块分布特征.这些研究丰富了广义逆函数值 Padé 逼近的理论和方法.

第三部分讨论的是关于函数值 Padé-型逼近及广义逆函数值 Padé 逼近方法的应用.其一是用广义逆函数值 Padé 逼近的 ε-算法的实部逼近法和函数值 Padé-型逼近正交行列式这两种新方法来加速函数序列的收敛性，并从理论上加以分析.其二是用广义逆函数值 Padé 逼近的 ε-算法取实部的方法及函数值 Padé-型逼近正交行列式公式令分母为零的方法来估计第二类 Fredholm 积分方程的特征值，这两种新方法的特点是算法简单,收敛速度快,最后通过实例分别加以验证.

关键词　线性泛函，函数值 Padé-型逼近，正交多项式，递推算法，收敛定理，广义逆函数值 Padé 逼近，退化，积分方程

Abstract

This article consists of three parts.

In the first part, theory and method of the function-valued Padé-type approximant (FPTA) is studied. The function-valued Padé-type approximant is defined by using introducing a function-valued linear functional on polynomial space, then it is applied to solve the second kind of Fredholm integral equations. The method of FPTA in this paper has better approximation effect at the poles of the given series than the previous methods. Moreover, due to the degree of its denominator polynomials may be odd or even order number, so FPTA fills up the gap of the generalised inverse function-valued Padé approximant (*GIPA*). Four efficient algorithms to compute FPTA are established, respectively. Some examples are given to show these algorithms are efficient and useful. Two kinds of error formulas of FPTA are proved. In the end, the row and column convergence problems for FPTA are discussed in detail and two sufficient conditiions are given.

In the second part, the degeneracy cases of generalised inverse function-valued Padé approximant (*GIPA*) are at first discussed. The degeneacy cases means that the denominator polynomial of *GIPA* has odd degree or has zeroes of odd

order at the origin or both. At first, the extended *GIPA* is defined, which enlarges the domain of *GIPA*. Its existence and uniqueness theorems are proved. Second, *GIPA* in the degeneracy cases of type $[n-\sigma/2k-2\sigma]$ are constructed. In the end, the characteristic of the table for the extended *GIPA* is presented. The study about the degeneracy cases greatly enriches the theory of function-valued Padé-type approximation.

In the third part, the application problems of *GIPA* and FPTA are discussed. In section one, two new methods, which is called the real part method of ε - algorithm of *GIPA* and the determinant method of orthogonal polynomials of FPTA, respectively, are presented to accelerate convergence of the given function sequences. In section two, two new methods estimating the characteristic values of the second kind of Fredholm integral equations are presented by means of taking its real part of ε - algorithm and taking the zeros of the determinant of orthogonal polynomials, respectively. Some exapmles are given to illustrate above methods.

Key words Linear functional, Function-valued Padé-type approximant, Orthogonal polynomity, Recursive algorithm, Generalised inverse function-valued Padé approximant, Degeneracy, Convergence theorem, Integral equation.

目　　录

第一章　绪　　论

§1.1　第二类 Fredholm 积分方程简介

积分方程是近代数学的一个重要分支，它与微分方程，计算数学和随机分析等有着紧密的重要联系. 另外它又是数学联系力学、数学物理和工程等应用学科的一个重要的工具. 积分方程的研究早在 19 世纪就已经开始，由于 19 世纪科学技术的发展，从一些实际问题提出了许多有关积分方程的问题，而数学物理中关于积分

$$g(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\mathrm{i}st}f(t)\mathrm{d}t \tag{1.1.1}$$

的反演问题也许是积分方程联系最早的问题之一. 1811 年 Fourier 解决了上面的问题. 指出函数

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mathrm{i}st}g(s)\mathrm{d}s \tag{1.1.2}$$

即是上方程的解. 以后不久 Abel 在研究质点力学问题时，导出了此之特殊形式的积分方程，以后称之为特殊的 Abel 方程：

$$\int_0^1\frac{\phi(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\mathrm{d}\eta=\sqrt{2g}f(y) \tag{1.1.3}$$

其中 $\phi(\eta)$是未知函数，$f(y)$是已知函数，g 是重力加速度.

1823 年，Abel 在它的关于推广“tautochrone” 问题的研究中，引导出一般形式的 Abel 积分方程

$$g(s)=\int_a^s \frac{f(t)}{(s-t)^\alpha}\mathrm{d}t,\quad (0<\alpha<1,\ g(\alpha)=0)\quad (1.1.4)$$

其中 $g(s)$是一已知函数，$f(t)$是未知函数，并得出方程(1.1.4)的解为

$$f(t)=\frac{\sin\pi a}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t \frac{g'(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\mathrm{d}s.$$

以后 Abel 方程成为许多数学家研究的对象，并从许多方面加以推广.

1896 年 Volterra 的工作是线性积分方程研究的重要转折点. 在这一工作中，他研究了称之为 Volterra 积分方程的方程：

$$x(s)-\lambda\int_a^s K(s,t)x(t)\mathrm{d}t=f(s),\quad (a\leqslant s\leqslant b)\ (1.1.5)$$

其中 $x(s)$是未知函数，$K(s,t)$，$f(s)$是已知函数，λ 是一数值参数. 又 $K(s,t)$称为方程(1.1.5)的核，$f(s)$称为方程(1.1.5)的自由项. 他证明：如果 $K(s,t)$在正方形区域$[a,b]\times[a,b]$上连续，$f(s)$在$[a,b]$上连续，则对任意的 λ，方程(1.1.5)有而且只有一连续解，而且这一解可用逐次逼近法求得.

对积分方程的研究来说，较为困难的是讨论所谓的 Fredholm 积分方程

$$x(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t=f(s)\quad (a\leqslant s\leqslant b)\quad (1.1.6)$$

应当指出，方程(1.1.6)在 Fredholm 之前已有许多人研究过. 1856 年，A. Beer 在研究位势理论的边界问题时，引出过形如(1.1.6)的方程(其中 $\lambda=1$)，他实质上用了所谓的迭代法：

$$x_0(s)=f(s),$$

$$x_n(s)=f(s)+\int_a^b K(s,t)x_{n-1}(t)\mathrm{d}t,\quad n=1,2,\cdots$$

求解这一方程，但遗憾的是他未考虑这一迭代过程的收敛性.

1877 年 C. Neumann 补足了这一缺陷，他发现这一程序并非不加条件即可收敛，1896 年 H. Poincaré 形式地引入了参数 λ，他指出，方程的解 $x(s)$ 与参数 λ 有关，而且 Neumann 级数

$$x(s) = f(s) + \sum_{m=1}^{\infty} x_m(s),$$

其中

$$x_0(s) = f(s), \quad x_m(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) x_{m-1}(t) \mathrm{d}t, \quad m = 1, 2, \cdots$$

是在 $\lambda=0$ 附近的幂级数，当 $|\lambda|$ 充分小时，该级数收敛. 另外，Poincare 还得知解 $x(s)$ 是 λ 的半纯函数，但他没有得出固有值 λ 存在的一般的命题. 1900 年 Fredholm 在假定区间 $[a, b]$ 有限及核、自由项为连续的条件下，使方程 (1.1.6) 的求解问题得以完全解决. 它的指导思想是把积分方程(1.1.6)与有穷的代数方程组作类比，直接用行列式求解，并把方程(1.1.6)的解表示成两式的商. 这一方法与解线性方程组的 Gramer 法则相仿. 具体来讲就是用下面的近似方程

$$x(s) - \lambda \sum_{j=1}^{n} K(s, t_j) x(t_j) \Delta t_j = f(s) \tag{1.1.7}$$

代替方程(1.1.6). 在(1.1.7)中令 $s = t_1, t_2, t_3, \cdots, t_n$，则得出未知量为 $x(t_j)$，$j = 1, 2, \cdots, n$ 的线性方程组

$$x(t_i) - \lambda \sum_{j=1}^{n} K(t_i, t_j) x(t_j) \Delta t_j = f(t_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.1.8}$$

如果 λ 不是方程组(1.1.8)的系数行列式

$$d_n(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda K(t_1,t_1)\Delta t_1, & -\lambda K(t_1,t_2)\Delta t_2, & \cdots & -\lambda K(t_1,t_n)\Delta t_n,\\ -\lambda K(t_2,t_1)\Delta t_1, & 1-\lambda K(t_2,t_2)\Delta t_2, & \cdots & -\lambda K(t_2,t_n)\Delta t_n,\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -\lambda K(t_n,t_1)\Delta t_1, & -\lambda K(t_n,t_2)\Delta t_2, & \cdots & 1-\lambda K(t_n,t_n)\Delta t_n\end{bmatrix}$$

的特征根，则方程(1.1.8)可解，把所求得的值 $x(t_j)$代入(1.1.7)，即得方程(1.1.6)的近似解

$$x(s)\approx f(s)+\lambda\frac{Q_\lambda(s,t_1,t_2,\cdots,t_n)}{d_n(\lambda)} \qquad (1.1.9)$$

其中 Q_λ 和 $d_n(\lambda)$都是 λ 的多项式. Fredholm 指出，在 $K(s,t)$连续的假定下，当 $\Delta t_j\to 0$ 时，(1.1.9)中的分子和分母分别收敛于 $\lambda\int_a^b D_\lambda(s,t)f(t)\mathrm{d}t$ 和 $d(\lambda)$，这里 D_λ 和 $d(\lambda)$ 是 λ 的整函数，分别称为核 $K(s,t)$ 的 Fredholm 行列式和第一阶 Fredholm 子式. 如果引入所谓的 Fredholm 豫解式

$$H_\lambda(s,t)=\frac{D_\lambda(s,t)}{d(\lambda)},$$

则对一切使 $d(\lambda)\neq 0$ 的值 λ，函数

$$x(s)=f(s)+\lambda\int_a^b H_\lambda(s,t)f(t)\mathrm{d}t \qquad (1.1.10)$$

即是方程的(1.1.6)解.

定理 1.1.1[2] 设 $K(s,t)$ 是 $a\leqslant s,t\leqslant b$ 上的连续核，λ 是 $K(s,t)$的正则值. 则对任意给定的连续函数 $f(s)$，积分方程

$$x(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t \qquad (1.1.11)$$

有唯一的连续解，并且这一解有下面的形式

$$x(s)=f(s)+\lambda\int_a^b H_\lambda(s,t)f(t)\mathrm{d}t \qquad (1.1.12)$$

§1.2 函数值 Padé 逼近已做的主要工作

1.2.1 经典的函数值 Padé 逼近

函数值 Padé 逼近是从函数值幂级数出发获得有理函数逼近式的一个非常有效的方法. 它的基本思想是对于一个给定形式的函数值幂级数，构造一个被称为函数值 Padé 逼近式的有理函数，使它的 Taylor 展开式尽可能多的项与原函数值幂级数相吻合.

设 $f(s, \lambda)$是一个函数值形式的幂级数

$$f(s, \lambda) = y_0(s) + y_1(s)\lambda + y_2(s)\lambda^2 + \cdots + y_n(s)\lambda^n + \cdots \tag{1.2.1}$$

$$y_i(s) \in C[a, b], \quad s \in [a, b]$$

$f(s, \lambda)$的一个经典的函数值 Padé 逼近即为函数值的有理分式 $U(s, \lambda)/V(s, \lambda)$，它满足下列逼近条件

$$f(s, \lambda)V(s, \lambda) - U(s, \lambda) = O(\lambda^{m+n+1}) \tag{1.2.2}$$

其中 $U(s, \lambda)$和 $V(s, \lambda)$是关于 λ 次数分别为 m 和 n 的函数值多项式，由逼近条件(1.2.2)，函数值有理分式函数 $U(s, \lambda)/V(s, \lambda)$ 成立：

$$\begin{aligned} & U(s, \lambda)/(V(s, \lambda))^{-1} \\ &= y_0(s) + y_1(s)\lambda + y_2(s)\lambda^2 + \cdots + y_{n+m}(s)\lambda^{n+m} \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

换言之，有理分式 $U(s, \lambda)/(V(s, \lambda))^{-1}$ 与 $f(s, \lambda)$ 的函数值幂级数前 $m+n+1$ 相吻合，在式(1.2.3) 中的 $R(s, \lambda) = O(\lambda^{m+n+1})$ 称为经典的函数值 Padé 逼近的余项.

设 $U(s, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} a_i(s)\lambda^i$， $V(s, \lambda) = \sum_{i=0}^{n} b_i(s)\lambda^i$ 由式(1.2.2)，(1.2.3)，可得

$$\begin{aligned}&(b_0(s)+b_1(s)\lambda+b_2(s)\lambda^2+\cdots+b_n(s)\lambda^n)(y_0(s)+\\&y_1(s)\lambda+y_2(s)\lambda^2+\cdots)\\=\;&a_0(s)+a_1(s)\lambda+a_2(s)\lambda^2+\cdots+a_m(s)\lambda^m+O(\lambda^{m+n+1})\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

比较式(1.2.4)的两边 $1, \lambda, \lambda^2, \cdots, \lambda^{n+m}$ 的系数，可推导如下的方程

$$\begin{bmatrix}a_0(s)\\a_1(s)\\\vdots\\a_m(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_0(s)&0&0&\cdots&0\\y_1(s)&y_0(s)&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\y_m(s)&y_{m-1}(s)&y_{m-2}(s)&\cdots&y_{m-n}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_0(s)\\b_1(s)\\\vdots\\b_n(s)\end{bmatrix} \tag{1.2.5}$$

$$\begin{bmatrix}y_{m+1}(s)&y_m(s)&\cdots&y_{m-n+1}(s)\\y_{m+2}(s)&y_{m+1}(s)&\cdots&y_{m-n+2}(s)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\y_{m+n}(s)&y_{m+n-1}(s)&\cdots&y_m(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_0(s)\\b_1(s)\\\vdots\\b_n(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \tag{1.2.6}$$

对方程(1.2.5)，(1.2.6)，规定 $y_j(s)=0\ (j<0)$.

如果规定 $b_0(s)=1$，即 $V(s,\lambda)$ 为首 1 多项式，则方程(1.2.6)可写成

$$\begin{bmatrix}y_m(s)&y_{m-1}(s)&\cdots&y_{m-n+1}(s)\\y_{m+1}(s)&y_m(s)&\cdots&y_{m-n+2}(s)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\y_{m+n-1}(s)&y_{m+n-2}(s)&\cdots&y_m(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1(s)\\b_2(s)\\\vdots\\b_n(s)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}y_{m+1}(s)\\y_{m+2}(s)\\\vdots\\y_{m+n}(s)\end{bmatrix} \tag{1.2.7}$$

通常此方程称为 Padé 方程. 当 $[m/n]_f=U_{mn}(s,\lambda)/V_{mn}(s,\lambda)$ 为非退化时，$[m/n]_f$ 的分子行列式公式与分母行列式公式[80, 131] 分别为

$$U_{mn}(s,\lambda)=\det\begin{bmatrix} y_{m-n+1}(s) & y_{m-n+2}(s) & \cdots & y_{m+1}(s) \\ y_{m-n+2}(s) & y_{m-n+1}(s) & \cdots & y_{m+2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{m-n} y_i(s)\lambda^{i+n} & \sum_{i=0}^{m-n+1} y_i(s)\lambda^{i+n-1} & \cdots & \sum_{i=0}^{m} y_i(s)\lambda^{i} \end{bmatrix} \tag{1.2.8}$$

$$V_{mn}(s,\lambda)=\det\begin{bmatrix} y_{m-n+1}(s) & y_{m-n+2}(s) & \cdots & y_{m+1}(s) \\ y_{m-n+2}(s) & y_{m-n+3}(s) & \cdots & y_{m+2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{n} & \lambda^{n-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.9}$$

1.2.2 广义逆函数值 Padé 逼近

下面叙述的是 Graves - Morris，顾传青、李春景关于广义逆函数值 Padé 逼近已做的工作.

设幂级数 $f(s,\lambda)$作为 λ 的函数在 $\lambda=0$ 处解析. 自 20 世纪 90 年代起 Graves - Morris[80]引入了广义逆函数值 Padé 逼近($GIPA$)来加速函数值幂级数(1.2.1)的收敛和估计积分方程(1.1.11)的特征值.

定义 1.2.1 [80] $R(s,\lambda)$为式所给的 $f(s,\lambda)$的型为$[n/2k]$的广义逆函数值 Padé 逼近.

$$R(s,\lambda)=\frac{P(s,\lambda)}{Q(\lambda)} \tag{1.2.10}$$

此处 $P(s,\lambda)$，$Q(\lambda)$是 λ 的多项式. 作为 s 的函数，$P(s,\lambda)\in L_2(a,b)$，且 $P(s,\lambda)$，$Q(\lambda)$ 满足下列条件：

(i) $\deg\{P(s,\lambda)\}\leqslant n-\alpha$，$\deg\{Q(\lambda)\}=2k-2\alpha$；

(ii) $Q(\lambda) \mid \| P(s, \lambda) \|^2$;

(iii) $Q(\lambda) = Q^*(\lambda)$. 此处 $Q^*(\lambda)$ 为 $Q(\lambda)$ 的共 轭函数;

(iv) $Q(0) \neq 0$;

(v) $Q(\lambda) f(s, \lambda) - P(s, \lambda) = O(\lambda^{n+1})$, $Q(0) \neq 0$.

如果 $P(s, \lambda)$, $Q(\lambda)$ 满足定义 1.2.1 中的(i)—(v),则由式(1.2.10)给出的 $R(s, \lambda)$ 是唯一的,其中分母 $Q(\lambda)$ 可由下式给出

$$Q(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 0 & M_{01} & M_{02} & \cdots & M_{0,\,2k-1} & M_{0,\,2k} \\ -M_{01} & 0 & M_{12} & \cdots & M_{1,\,2k-1} & M_{1,\,2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -M_{0,\,2k-1} & -M_{1,\,2k-1} & -M_{2,\,2k-1} & \cdots & 0 & M_{2k-1,\,2k} \\ \lambda^{2k} & \lambda^{2k-1} & \lambda^{2k-2} & \cdots & \lambda & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.11}$$

此处

$$M_{ij} = \sum_{l=0}^{j-i-1} \int_a^b y_{l+i+n-2k+1}(s) [y_{j-l+n-2k}(s)]^* \, ds \tag{1.2.12}$$

$$i = 0, 1, 2, \cdots, 2k, \quad j = i+1, i+2, \cdots, 2k$$

且定义,当 $j < 0$ 时, $y_j(s) = 0$. Graves-Morris指出,对广义逆函数值 Padé 逼近定义 1.2.1 中的分子 $P(s, \lambda)$, 可由下式给出

$$P(s, \lambda) = [Q(\lambda) f(s, \lambda)]_0^n$$

其中$[..]_0^n$ 表示关于从常数项到次数为 λ^n 项的 Maclaulin 截断多项式. 顾传青、李春景[95, 114, 118]在 Graves-Morris 工作的基础上,拓展了广义逆函数值 Padé 逼近方法的定义,借助 $L_2(R)$上的范数公式,构造了一个新的函数值复广义逆

$$\frac{\lambda}{g(x)} = \frac{(\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x), -\lambda_1 g_2(x) + \lambda_2 g_1(x))}{\| g_1(x) \|^2 + \| g_2(x) \|^2}$$
$$= \frac{\lambda g^*(x)}{\| g(x) \|^2} \tag{1.2.13}$$