随机振动基础与振动环境试验

南 京 航 空 学 院

1981. 3.

出　版　说　明

目前，由于随机振动的理论和方法在航空、船舶、机械、建筑、地质及其他领域得到愈来愈广泛的应用。所以，在三机部有关人员中普及随机振动知识，为飞行器设计、生产服务，为贯彻执行环境振动标准打下基础，是很有必要的。为此，三机部振动环境标准技术组建议，由南京航空学院一系１０３教研室组织举办随机振动短训班，本教材就是为这个短训班由几个单位共同编写的。参加编写的人员是：第一章至第五章——南航张曾锠，第六章——六三〇所屈见忠，第七、八章——六二三所姚起杭、付博，最后由南京航空学院印刷出版。由于我们水平所限，加之时间仓促，未能进行统稿和审稿，照原稿付印，所以在内容的安排上存在不少缺点，请读者批评指正。

编　者

一九八一年五月

一　　前　言

振动一般分为两大类。一类称为确定性振动，一类称为随机振动。

确定性振动指振动量随时间变化的规律可以用时间函数确定地表示出来的振动，因而可以精确预测未来任一时刻的振动量值。最简单的例如简谐振动，它的位移（或速度、加速度）随时间交替变化的规律用时间的正弦函数确定地表示为

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$$

其中A为振辐，ω为圆频率，φ为初相角。只要知道了这三个量，任一时刻的x（t）值都可按上式精确确定。

随机振动谐振动量随时间交替变化的规律不能用时间函数确定地表示出来的振动，因而无法精确预测未来任一时刻振动的量值。例如下图所示机翼表面某点压力随时间的脉动，我们无法根据已有的记录用一确定的时间函数去预测未来任一时刻（例如t＞T）压力的精确值。它属于随机振动。

随机振动虽然不能精确预测，但不是没有规律。当我们观察大量同类现象时发现，它表现出统计规律性。因此，随机振动一般不指单个振动现象，而是指大量同类现象的集合。

概率论以及以概率论为基础的数理统计、随机过程，是研究随机振动的数学方法。

飞行中的飞机，由于发动机、螺旋桨、大气紊流等因素的作用，飞机结构以及安装在飞机上的特设、附件、仪表等，均处在振动环境

随机振动基础与振动环境试验

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

前　　言

振动一般分为两大类。一类称为确定性振动，一类称为随机振动。

确定性振动指振动量随时间变化的规律可以用时间函数确定地表示出来的振动，因而可以精确预测未来任一时刻的振动量值。最简单的例如简谐振动，它的位移（或速度、加速度）随时间交替变化的规律用时间的正弦函数确定地表示为

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$$

其中A为振辐，ω为圆频率，φ为初相角。只要知道了这三个量，任一时刻的x（t）值都可按上式精确确定。

随机振动谐振动量随时间交替变化的规律不能用时间函数确定地表示出来的振动，因而无法精确预测未来任一时刻振动的量值。例如下图所示机翼表面某点压力随时间的脉动，我们无法根据已有的记录用一确定的时间函数去预测未来任一时刻（例如t＞T）压力的精确值。它属于随机振动。

随机振动虽然不能精确预测，但不是没有规律。当我们观察大量同类现象时发现，它表现出统计规律性。因此，随机振动一般不指单个振动现象，而是指大量同类现象的集合。

概率论以及以概率论为基础的数理统计、随机过程，是研究随机振动的数学方法。

飞行中的飞机，由于发动机、螺旋桨、大气紊流等因素的作用，飞机结构以及安装在飞机上的特设、附件、仪表等，均处在振动环境

下工作。在地面模拟飞行振动环境。对产品进行环境振动试验是保证产品振动可靠性和降低成本的有效方法。

早期的飞机。采用螺旋桨及活塞式发动机。飞机的振动环境以稳态周期振动为主。机载设备振动环境试验都是定额正弦或扫描正弦振动试验。近代高速飞机。由于喷气噪声、大气紊流等因素的作用。实测表明。飞机上的振动环境属于宽频带（例如 10^{HZ} ～2000 HZ）的随机振动。因此随机振动试验已被引进标准。特别是近几年来随着电子计算和技术的飞速发展。数控随机振动试验设备的价格已大幅度下降，为普遍采用随机振动环境试验创造了条件。

只有了解了随机振动的描述方法。它的统计规律以及结构、设备对随机激励的响应特性等。才能明确了解机载设备的振动环境。按照合适的振动规范。完成振动环境试验。

这本讲义主要是为在生产上从事振动环境试验的同志熟悉随机振动环境试验而准备的。

讲义共分七章。前四章属于随机振动基本知识。从概率论的基本概念入手。然后介绍随机振动的描述方法。系统对随机激励的响应。统计误差分析；后三章介绍当前振动范围制订中的一些主要过程和问题。并以一个典型机载设备振动环境标准为例。说明当前振动标准的内容和使用方法。

第一章　概率论基本知识*

工程上遇到的随机振动现象，大多表现出一定程度的统计规律性。统计规律应用概率论的方法去描述、去研究。因此概率论是研究随机振动现象最基本的数学工具。这一章介绍这方面的基本知识。

§1　必然事件和随机事件

1. 必然事件、不可能事件

在自然界和生产实践中，经过观察、分析和实践，人们发现可把各种各样的事件大致分为两类：必然事件和随机事件。

在一个大气压下，把水加热到100℃，则水必定沸腾。

把重锤从地面上10米高处放开，则重锤必然向地面落下来。

这两个例子是大家在日常生活中习以为常的，但是我们还可以来分析一下。“水沸腾”是一个事，但这个事件的必然发生必须在一定条件之下。这个“一定条件”就是：在一个大气压下，把水加热到100℃。如果在一个大气压下，把水热到90℃，那么水就不会沸腾。可见，离开了一定条件，谈一个事件是没有什么意义的，至少含义是不清的。再如“重锤下落”这个事件，是在条件”从地面上10米高处放开”下发生的。在这个条件下，由于地球引力的作用，重锤必然下落。

上面两个例子，我们称为必然事件。

在一定条件下必然发生的事件称为必然事件。

在一定条件下决不会发生的事件称为不可能事件。

在“一个大气压下把水加热到100℃”的条件下，“水不沸腾”

* 本章内容主要摘自北大等单位编“地质勘探数字技术”的第十、十一、十三章。

这个事件是不可能事件。在“从地面上１０米高处放开”的条件下，“重锤不动”这个事件是不可能事件。

在一定条件下，必然事件，不可能事件是否发生，结论是肯定的。因此必然事件和不可能事件在这点上本质是相同的。但是自然界和生产中还出现大量另外的事件，即随机事件。

2 随机事件

在一定条件下可能发生也可能不发生的事件称为随机事件。

例如，有１００件产品，其中有4种产品是不合格的。现从这１００件产品中任意取出一件，要求抽出来的产品是不合格的。显然这个事件是随机事件。

又如，同一架飞机在确定的航线上和在大致相同的飞行条件下作多次飞行。飞机上同一测振点记下每次飞行时的振动加速度时间历程。取出每次记得的离起飞同一时间上加速度值。要求这个值超过其平均值。这也是一个随机事件。

在相同条件下得到的记录不会完全一样，而只会大同小异，为什么会有差异呢？这是因为即使在同一条件（我们已经能够掌握和认识的条件）下，仍然有一些不确定的、复杂的、次要因素的影响，致使记录会有差质。

§2 频率、概率

随机事件作为一个个别现象来说，要么发生、要么不发生，似乎是捉摸不定，无规律可循。但是从大量试验中，我们就会发现随机事件的出现呈现出规律性。这种规律性用概率来描述，概率刻画随机事件出现可能性的大小。

在相同条件进行大量重复的试验，观察某事件A发生或不发生，

我们会发现A发生或不发生是有规律的。

例如在相同条件下生产某产品，事件A表示生产出的这个产品为废品。我们重复试验1000次，即生产1000个产品，其中废品为47个，所占比例为0.047。再生产1000个产品，连同前面共有2000个产品，其中废品为103个，所占比例为0.0515。再生产1000个产品，连同前面共有3000个产品，其中废品为148个，所占比例为0.0493。情况见下表

试验次数（即产品总数）N	1000	2000	3000
事件A出现次数（即废品个数） μ	47	103	148
二者之比 $\frac{\mu}{N}$	0.047	0.0515	0.0493

可以发现，二者之比$\frac{\mu}{N}$在0.05左右摆动，而且随着试验次数的增加，$\frac{\mu}{N}$越来越接近0.05呈现稳定性。

在相同条件下做N次试验，我们称事件A出现的次数μ为事件A的频数。$\frac{\mu}{N}$称为事件A的频率。

下面我们给出概率的统计定义。

定义：在相同条件下，进行大量试验（即N充分大），若事件A的频率$\frac{\mu}{N}$呈现稳定性，则我们称事件A是有概率的，用P(A)表示事件A的概率，它近似等于$\frac{\mu}{N}$，即

$$P(A) \approx \frac{\mu}{N}$$

概率反映出大量现象的必然规律。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

1—6

对随机事件的认识是对概率论整个学科认识的出发点，也即概率论的概念都是建立在随机事件这个概念基础之上。

哪些随机现象有概率，这种规律性通过什么形式来刻划，要通过实践不断发现、验证和认识。

§3 概率的性质

在这一节，我们先讨论事件的运算，然后从概率的统计定义，也即从概率的角度讨论概率的性质。

1. 事件的运算

事件的运算有下列几种，用几何图形加以直观说明。

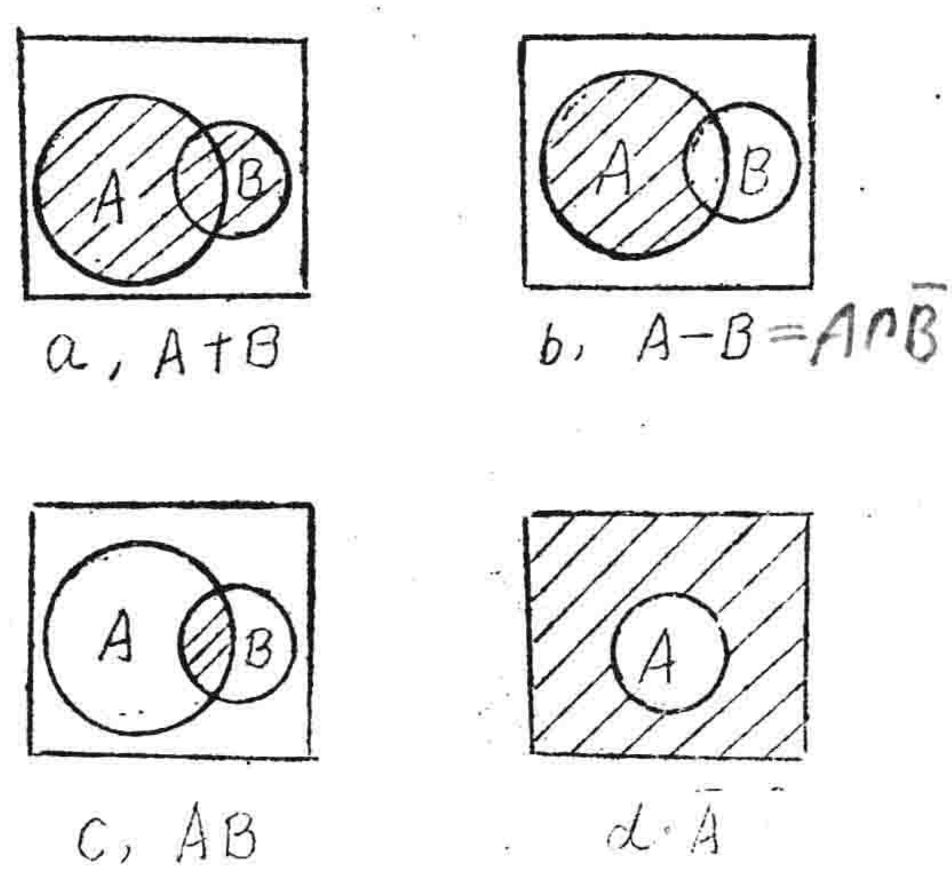


图1－1 事件运算示意图

(1)并.和。事件A和事件B中至少有一个发生。这一事件称为A与B之和，记为A＋B（见图1－1 a）。或 $A\cup B$

(2) 差。事件A发生而B不发生，这一事件称为A与B之差，记为A－B（见图1－1 b）。$A\cap\bar{B}=A-B$

(3)交 积。事件A、B同时发生，这一事件称为A、B之积，或称

为A与B之交。记为AB（见图1－1c）。

⑷非逆。事件A不发生，这一事件称为A的逆，记为$\overline{A}$（见图1－1d）。

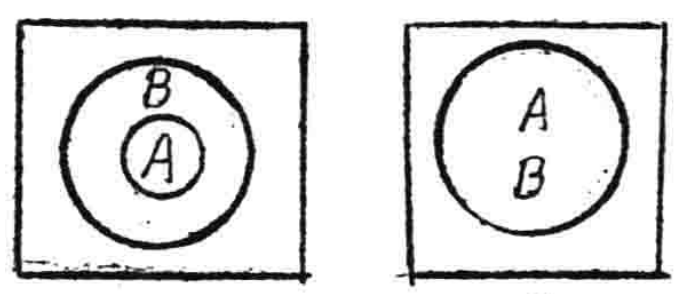
图1．1的说明：设想在正方形内任取一点，以A表示“所取的点落在左边圆内”这一事件，以B表示“所取的点落在右边圆内”这一事件，在图中用阴影部分表示运算以后的事件。

事件与事件之间还有下面常见的关系：

⑴ 包含。事件A发生时B一定发生，则称B包含A，记作$A\subset B$，或$B\supset A$（见图1－2a）。

⑵ 相等。A发生时B一定发生，B发生时A一定发生，则称A与B相等，记作A＝B（见图1－2b）。

关于事件的不相容关系我们将在以后介绍。



a, $A\subset B$　　b, $A=B$

图1—2　事件之间的关系

2　概率的简单性质

我们把随机事件记作为A或B，必然事件记为U，不可能事件记为V。以下我们用统计定义说明概率的简单性质。

⑴ 必然事件 的概率等于1

$$P(U)=1$$

不可能事件的概率等于0

$$P(V)=0$$

设在相同条件下做N次试验，由于必然事件U每次都发生，所以它的概数$\mu_u=N$，它的概率$\frac{\mu_u}{N}=\frac{N}{N}=1$。按统计定义，必有

$P(U)=1$。由于不可能事件V每次都不发生，所以它的频数μ_v

$=0$。它的频率 $\frac{\mu_v}{N}=\frac{0}{N}=0$，所以 $P(V)=0$

(2) 任何随机事件A的概率都在0与1之间

$$0\leq P(A)\leq 1$$

设在N次试验中，A出现的频数为μ_a。显然A最少出现0次。最多出现N次。即$0\leq\mu_a\leq N$。因而A的频率$\frac{\mu_a}{N}$有关系$0\leq\frac{\mu_a}{N}\leq 1$。按统计定义，即有$0\leq P(A)\leq 1$。

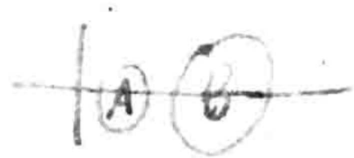
(3) 若$A\subset B$（即事件B包含事件A），则

$$P(A)\leq P(B)。$$

设在N次试验中，A出现的频数为μ_a，B出现的频数为μ_b。因因为A出现则B一定出现，因此B出现的次数比A出现的次数多，即$\mu_a\leq\mu_b$。由此可知，$\frac{\mu_a}{N}\leq\frac{\mu_b}{N}$，按统计定义有$P(A)\leq P(B)$。

3. 概率的加法定理

(1) 不相容事件



事件A与事件B不能同时发生，则称事件A，B为不相容事件。也也即要求A、B之积为不可能事件（$AB=V$）。

例如，在一次射击中，事件“命中目标”和事件“不中目标”是不相容事件，因为它们不能同时发生。若在两次射击中，考虑事件A“第一次命中目标”和事件B”第二次不中目标”，则这两个事件不是不相容的，因为在第一次命中后第二次可能不中目标，事件A与B可以同时发生。这说明要判断两个事件的关系，必须注意是在什么样的条件下进行试验。

事件A_1、A_2……，A_n叫做互不相容事件，是指事件A_1，A_2，……，A_n中的任何两个事件都不可能同时出现。否则就称为相容事件。

例1. 在一大堆检波器中，抽取n个检波器，考虑以下事件：

A_1 ＝n 个中没有次品。

A_2 ＝n 个中有一个次品。

A_3 ＝n 个中有 2 个次品。

………………………………

A_{n+1} ＝n 个中有n 个次品。

则 A_1、A_2 ……，A_{n+1} 是不相容事件。

例 2 在一大堆检波器中抽取 3 个，令事件

A_1 ＝ 3 个中有 1 个次品。

A_2 ＝ 3 个中有 2 个次品。

A_3 ＝ 3 个中有 1 个以上的次品。

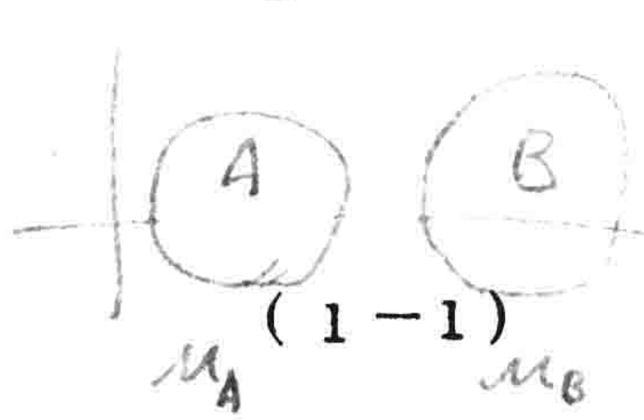
则 A_1，A_2，A_3 是相容的事件。这因为 A_2，A_3 可同时发生。

(2) 频率加法定理。

设A、B 为两个不相容事件。在相同条件下，做N 次试验，A出现的频数为 μ_a，B 出现的频数为 μ_b。我们考虑事件 A＋B，由于A与B 不相容，所以A＋B出现的次数 $\mu=\mu_a+\mu_b$。所以A＋B的频率为 $\frac{\mu}{N}=\frac{\mu_a}{N}+\frac{\mu_b}{N}$，其中 $\frac{\mu_a}{N}$ 为A 的频率，$\frac{\mu_b}{N}$ 为 B 的频率。这就是概率加法定理。

定理：两个不相容事件A、B之和A＋B的频率 $\frac{\mu}{N}$ 等于二个事件A、B的频率（$\frac{\mu_a}{N}$，$\frac{\mu}{N}$）之和，即

$$\frac{\mu}{N}=\frac{\mu_a}{N}+\frac{\mu_b}{N} \tag{1-1}$$



(3) 概率加法定理。

由概率的统计定义和频率加法定理，可知概率加法定理。

定理：对两个不相容事件A、B有

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \qquad (1-2)$$

这个加法定理对任意n个不相容事件都对。也即，对任意n个不相容的事件A_1，A_2……，A_n 有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \qquad (1-3)$$

例3. 条件与事件见例1。我们考虑A_1，A_2，A_3。事件$A_1+A_2+A_3$表示在n个检波器中至多有2个次品。按照加法定理，这个事件的概率为

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)。$$

4. 条件概率、概率乘法定理，独立事件

(1) 条件概率

在已知事件B出现的条件下，事件A出现的概率称为A对于B的条件概率，记为P(A／B)。

实际上，条件概率就是在新的条件下的概率。我们不妨把概率与条件概率做一比较。

	概　率	条件概率
条　件	原有一定条件	原有一定条件＋事件B出现
事　件	A	A
概　率	P(A)	P(A／B)

例4 某车间有2个组生产检波器，某日第一组生产检波器130个，其中次品为11个，第2组生产检波器150个，其中次品为9个加在一起，共生产检波器280个，次品为20个，现从产品中任取一个，考虑事件

A＝抽到的一个是废品。

B＝抽到的一个是第一组生产的。

按照古典定义，A的概率为

$$P(A)=\frac{20}{280}=\frac{1}{14}。$$

现在考虑在已知B出现的条件下，A出现的概率。也即，已知抽到的一个产品是第一组的（B出现），在这个新条件下，考虑事件A"抽到的一个是废品"。因为在B条件下，产品总共为130个，废品为11个，所以这时A出现的概率为

$$P(A/B)=\frac{11}{130}$$

(2) 条件频率

在N次试验中，事件B出现μ_b次，而在事件B出现的条件下，事件A出现了ν次，则称$\frac{\nu}{\mu_b}$事件A对事件B的条件频率。

显然事件B的频率为$\frac{\mu_b}{N}$。现在我们考虑事件AB的频率。AB表示A、B同时发生，我们不妨考虑，首先B要发生，其次，A也要发生，这样AB出现的次数$\mu_{ab}=\nu$，于是$\frac{\nu}{N}=\frac{\mu_{ab}}{N}$为事件AB的频率。我们得到的条件频率定理。

定理：事件A对事件B的条件频率

$$\frac{\nu}{\mu_b}=\frac{\text{事件AB的频率}\frac{\mu_{ab}}{N}}{\text{事件B的频率}\frac{\mu_b}{N}} \quad (1-4)$$

(3) 概率乘法定理

根据概率的统计定义，由（1－4）得

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com