

第三届振动与噪声在工程中的应用年会

论文集

信号处理学会振动与噪声学组
汽车工程学会测试专业委员会
中国振动工程学会信号处理委员会
东方振动与噪声研究所

序号	题 目	
1	一种改进的多点参照识别物理参数的模态分析方法	黄世霖 田吉方 小野隆彦(1)
2	结构修改中的一种实模态摄动方法	于旭光 黄世霖(7)
3	传递函数 Hilbert 变换非线性特征在故障诊断应用中的初探	徐 敏 杨永胜(12)
4	参数识别的自适应格型滤波法	朱东屏 王宏禹(16)
5	褶积镶边法及时域平均法在振形斜率测量中的应用	孔凡平 贾文成(20)
6	一种新的离散傅里叶变换对	陈中林(24)
7	汽车平顺性试验数据处理系统的介绍	梁增镇 陆正煜 齐洪刚(29)
8	模型修改理论与灵敏度分析方法在电视机缓冲防护衬垫优化设计中的应用	王 喆 韩祖舜 傅志方(33)
9	信号功率谱的再处理方法	何正嘉 屈梁生(37)
10	非同步采样引起的双通道 FFT 的相位误差及其补偿	温仲元 袁景侠(41)
11	时域相位信息提取的新方法	黄迪山 陆乃炎等五人(45)
12	沃尔什——傅里叶变换(WFT)及其在旋转机械故障诊断中的应用	徐世昌 刘 华(49)
13	CF-500 双通道分析仪标定和随机振动数据处理	王 有 王占岐 董世兴(55)
14	在 CCDOS 运行下的振动信号处理系统 ORAS	郑万泔 李贤琪 杜明生(59)
15	IDB-1 型智能心现场动平衡仪	韦文林 靳怀义 张铁异(63)
16	试验模态分析与灵敏度分析在整车振动问题中的应用	陈立明等九人(67)
17	加速度传感器的标定与振动测量中的一些问题	张于北(71)
18	关于现场声强测量的几个问题	徐 滇 沈海斌(75)

- 19 用相干分析法识别车辆噪声源 蒋维铭 乔秀娟 邓楚南(79)
- 20 齿轮传动噪声源的诊断 刘爱群 李 启(83)
- 21 应用振幅概率分布统计特性分离地震记录的信号与噪声 傅才芳(88)
- 22 用系统辨识方法处理汽车操纵稳定性试验数据 陈 炎(92)
- 23 五吨叉车模态试验中几个技术问题的理论与实践 董成功 朱光汉等四人(96)
- 24 利用信号处理技术分析汽车空调冷风机组的振动问题 林循泓 潘得引(98)
- 25 汽车零部件可靠性分析及其疲劳寿命的预测 王占岐 董世兴 王 有(102)
- 26 关于汽车水平振动对人/椅系统影响的研究 张金换 于旭光 宋宝库 黄世霖(105)
- 27 诊断、建模、灵敏度分析和优化设计——发动机支承改进设计四步法 潘旭峰 胡子正 郭惠乐(112)
- 28 空压机噪声建模及分析 刘 茂(116)
- 29 应用时间序列法分析轴流风机噪声 范立志等五人(118)
- 30 风机噪声的时间序列法分析 刘 明(120)
- 31 脉冲激振复合材料锤头及力信号波形的研究 解中宁 徐 革 隋 新(124)
- 32 普通滚齿机进行硬齿面刮削加工可行性的探讨 解中宁 徐 革等四人(128)
- 33 机器噪声源识别技术的研究 刘振国(132)
- 34 传动系扭振激振源的信号分析 杨树忠(137)
- 35 模态参数识别P r o n y法的一种改进 欧阳普仁 杨叔子 谢月云(141)
- 36 旋转机械故障诊断与可靠性分析 姜兴谭(148)
- 37 频响函数估计的总体最小二乘方法 张令弥 姚迎宪(150)

《一种改进的多点参照识别物理参数的模态分析方法》

清华大学汽车工程系 黄世霖 田吉方

日本小野测器 小野 隆彦

摘要

本文提出了多点参照识别物理参数模态分析方法的几种改进方案,着重分析、讨论了频带外模态影响的补偿方法与识别空间的缩减方法,通过仿真计算与实例分析得到了较好的结果,证实了这些方法是行之有效的。

关键词: 模态分析, 多点参照, 空间缩减, 频带内(外)模态, 参与因子, 奇异值分解。

一、引言

多点参照方法由于综合了多点激振的数据,同时考虑了更多的数据信息,可以更为有效地减小噪声的影响,识别出耦合严重的几阶模态以至具有相同模态的不同模态,而且由于多点激振时(就多点激振而言),激振能量分配较为均匀,可以改善结构的非线性影响。最近发展起来的物理参数识别的分析方法是较有前途的一种方法,由于这种方法可以识别出系统的质量、刚度与阻尼矩阵,所以它易于与有限元技术相结合,从而可以和系统的优化技术与计算机辅助设计技术结合起来。

这种方法首先发表于1985年,以后,张令弥与F.Lembregts等人又进一步发展和改进了这种方法[1][2][3][4]。在此,本文作者提出了几种考虑频带外模态影响的方法;并提出了子空间缩减技术的几种新的考虑,通过改进,可使分析频带内模态数的估计数更为明显、准确,同时也减小了频带外模态对空间缩减矩阵的影响。仿真计算与实际结构分析的结果表明了这些方法是行之有效的。

二、物理参数识别方法的主要公式:

首先说明几个字母代表的意义: m 表示模型的自由度数(对于实测物体表示测点数), n 表示所取的模态数, r 表示参照点数。

一般线性系统传递函数的逆Laplace变换是脉冲响应函数,在多点拾振多点参照的情况下,它是一个矩形矩阵,用 $[H(t)]$ 表示,它可以用模态参数表出:

$$[H(t)] = [\Phi] e^{[A]t} [L] \quad (t \geq 0) \quad (mxr)$$

其中: 矩阵 $[\Phi]$ ($mx2n$) 表示模态振型矩阵(包括其共轭对),

矩阵 $[A]$ ($2nx2n$) 表示特征值矩阵

矩阵 $[L]$ ($2mxr$) 表示模态参与因子矩阵。

由上式及其时间导数的Laplace变换结合一般特征值问题的方程式可以推得这种识别方法的曲线方程(见参考资料[4]):

$$[A_0] \{H(s)\} + S[A_1] \{H(s)\} + [B_0] + S[B_1] = -S^2 \{H(s)\} \quad (mxr) \quad (1)$$

其中: $[B_1] = -[\Phi][L]$,

$$[B_0] = -([A_1][\Phi] + [\Phi][A]) [L],$$

$[A_0]$, $[A_1]$, $[B_0]$, $[B_1]$ 皆为未知的常数矩阵(为方便起见,以后在表示矩阵时,作适当的简化)。

方程(1)即是此识别方法的曲线拟合方程。上式在 S 域内成立,当然,在取 $s=j\omega$ 时也成立。这样就可以利用实测的频率响应函数的数据对系统进行识别了。在感兴趣的频率范围内进行频率采样(采样点数用 l 表示),在最小二乘的基础上识别出未知矩阵 $[A_0]$, $[A_1]$, $[B_0]$, $[B_1]$, 其中矩阵 $[A_0]$,

$[A_1]$ 可以用来求解系统的特征值问题,从而得到系统的模态参数。但是由于 $[A_0]$ 与 $[A_1]$ 矩阵的尺寸较大,这不仅对计算机的能力要求较高,而且还可能引入较多的计算模态,所以需要利用空间缩减技术减小识别空间。由于识别空间的缩减必然会造成截断误差,本文作者试图用几种方法对这种误差进行修正。

三、空间缩减技术与截断误差的补偿方法:

(一) 空间缩减技术:

一般来说,在实际应用中,在某一频段内,待识别的模态数远远小于测点数,即 $n \ll m$, 所以无需求解 m 维的最小二乘问题与特征值问题,为了达到减少计算时间等目的,就需要借助于奇异值分解技术将 m 维空间缩减到 np 维空间,此空间的维数大致与分析频带内主要的线性无关向量组的个数相等,即大致与频带内的模态数相等。这里我们采用奇异值分解技术进行空间的缩减,所谓奇异值分解(SVD),其数学意义是将一矩阵中线性无关向量的个数用奇异值的大小分布表示出来,奇异值越大表示其对应的线性无关向量在此矩阵中的信息最强。所以,我们最好是在传递函数中提取这种信息,由奇异值的大小分布,近似地判断出分析频带内模态的个数。

在以前的文献中,人们主要使用位移传递函数的自谱矩阵 $([sp] = \sum \text{real parts of } (H(s_i)H^T(s_i)))$ 的特征值分解(此时与奇异值分解相同)来提取这种信息,而本文中则对矩阵 $[I_m][H(j\omega)]$ 或 $[I_m][\omega H(j\omega)]$ 进行奇异值分解以获得缩小空间的变换矩阵 $[T]$,即:

$$\sum [I_m(H(j\omega_1)) \cdot I_m(H^T(j\omega_1))] = [T^0] [sq] [T^0]^T$$

$$\text{或: } \sum [I_m(\omega, H(j\omega_1)) \cdot I_m(\omega, H^T(j\omega))] = [T^0] [sq] [T^0]^T$$

其中: I_m 表示复数的虚部,

$[sq]$ 表示奇异值矩阵

$[T^0]$ 表示奇异向量矩阵(实正交矩阵)

选择明显较大的 np 个奇异值对应的奇异向量,组成矩形的线性变换矩阵 $[T] (n \times np)$ 。

这种方法的优点是:

1. 在实际结构的分析中,由于高阶模态的位移值较小,即使它们在分析频段之内,其对应的奇异值也可能较小,有可能将之忽略。使用矩阵 $\omega H(j\omega)$ 的信息进行分析,可使整个频带内峰值数据的大小分布较为均匀,从而可以减少忽略高阶模态的可能性。根据不同的结构与分析频带的范围,还可以选取加速度信息,从中提取奇异向量。
2. 由传递函数及其对频带外的它阶模态的修正项可以看出,频带外模态的耦合主要来自实部,所以只利用其虚部进行分析可以减少频带外模态的影响,从而可以更明显地指出频带内的模态数,并且对提高识别精度也有益处。

将传递函数矩阵 $[H]$ 变换到它的某个子空间内,作下列变换:

$$\begin{aligned} [H] &= [T]^T [H] \\ &= [T]^T ([H_1] + [H_2]) = [h_1] + [h_2] \quad (np \times r) \end{aligned}$$

其中: $[H] = [H_1] + [H_2]$

或写成:

$$[H] = [T] ([h_1] + [h_2])$$

其中: $[H]$ 代表子空间内的传递函数,

$[H_1]$ 与 $[H_2]$ 分别代表由分析频带内、外模态组合的传递函数矩阵,

$[h_1]$ 与 $[h_2]$ 分别代表由分析频带内、外模态组合的传递函数矩阵在子空间内的形式。

将(2)式代入(1)式中,并用矩阵[T]^T前乘(1)式得:

$$\begin{aligned} & [a_0] [h_1] + s [a_1] [h_1] + [b_0] + s [b_1] + s^2 [h_1] \\ & = - ([T]^T [A_0] [H_2] + s [T]^T [A_1] [H_2] + s^2 [T]^T [H_2]) \quad (np \times r) \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $[a_0] = [T]^T [A_0] [T]$, $[a_1] = [T]^T [A_1] [T]$,
 $[b_0] = [T]^T [B_0]$, $[b_1] = [T]^T [B_1]$,
 $[a_0]$, $[a_1]$, $[b_0]$, $[b_1]$ 是未知的实矩阵。

(二) 分析频带外模态的补偿:

由于子空间缩减势必造成截断误差,为了减小这个误差,可以使用不同的补偿方法。这里介绍三种方法,前二种方法是由分析频带外模态组合的传递函数 $[H_2]$ 的不同选择产生的。

1. 输入余项补偿法 (Input Residual Compensation Method, 简称IRC 法)

对于小阻尼系统,忽略频带外各模态的阻尼,频带外模态组合的传递函数可以写成:

$$[H_2] = \sum ([R_1] / (\Omega_k^2 + s^2) + s [R_2] / (\Omega_k^2 + s^2))$$

其中: Ω_k 表示第 k 阶模态的固有频率,

$[R_1]_k$ 与 $[R_2]_k$ 是未知的常数矩阵。

将上式代入(3)式,并简化可得:

$$\begin{aligned} & [a_0] [h_1] + [a_1] s [h_1] + [b_0] + s [b_1] + \sum ([U_1]_k / (\Omega_k^2 + s^2) + s [U_2]_k / (\Omega_k^2 + s^2) + s^2 [U_3]_k / (\Omega_k^2 + s^2) + \\ & s^3 [U_4]_k / (\Omega_k^2 + s^2) - s^2 [h_1]) \quad (np \times r) \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $[a_0]$, $[a_1]$, $[b_0]$, $[b_1]$, $[U_1]_k$, $[U_2]_k$, $[U_3]_k$, $[U_4]_k$ ($k=1, 2, \dots, nb$) 是未知的常数矩阵。

上式即为缩减空间后考虑频带外模态影响的一种曲线拟合方程。矩阵 $[a_0]$ 与 $[a_1]$ 是缩减空间内结构的特性矩阵。

2. 余项补偿法 (简称RC法)

对于小阻尼系统,分析频带外模态的影响可以近似地表示为:

$$[H_2] = [D_1] + [D_2] / s^2 \quad (m \times r)$$

其中: $[D_1]$ 与 $[D_2]$ 是传递函数余项待定常数矩阵。

将上式代入(3)式,并整理得:

$$[a_0] [h_1] + s [a_1] [h_1] + [b_0] + s [b_1] + s^2 [v_1] + [v_2] / s + [v_3] / s^2 - s^2 [h_1] \quad (np \times r) \quad (5)$$

其中: $[a_0]$, $[a_1]$, $[b_0]$, $[b_1]$, $[v_1]$, $[v_2]$, $[v_3]$ 是未知的常数矩阵, $[a_0]$ 与 $[a_1]$ 的意义与IRC法中的意义相同。

3. 扩展子空间补偿法 (Expansible Subspace Compensation Method, 简称ESC 法)

这种补偿法是通过选择不同的奇异向量矩阵[T]与np来对频带外模态进行补偿的。

假设某一频段内有 n_1 阶模态,此时可取 $np > n_1 + 1$,把识别空间作适当的扩展,将频带外的模态也引入识别空间,对所识别的模态进行补偿。但应该注意的是在扩展的空间内引入的必须是频带外相邻模态侵入频带内的奇异向量,如果引入的是“噪声模态”,反而会降低识别精度。当传递函数的噪声较大时应十分注意扩展空间的选择与组合。

在实际应用中,如果模态耦合较弱,在空间缩减后,即使不对频带外模态的影响进行任何补偿也可以得到较好的结果。

在得到矩阵 $[a_0]$ 与 $[a_1]$ 后,通过求解扩展矩阵 $\begin{bmatrix} [0] & [1] \\ [a_0] & -[a_1] \end{bmatrix}$ 的特征值问题,即可求得系统在分析频带内的模态参数,即特征值 $[\lambda]$ 与特征向量 $[\phi_s]$,物理坐标下的模态振型可以由下式求出:

$$[\phi] = [T] [\phi_s] \quad (m \times n)$$

其中: $[\phi]$ 为系统在物理坐标下的模态振型,

n 表示模态数。

此外, 模态参与因子矩阵 $\{I_i\}$, 可以在物理空间或缩减空间内, 用最小二乘的方法求得。

四. 仿真计算与实例分析:

对于分析方法的验证, 可以用已知物理参数的力学模型通过仿真计算来进行。为了证实此方法的实用性, 我们还对一实际结构(平板)进行了模态分析(此方法的软件编制在HP320 微机中)

(一) 五个自由度的汽车模型:

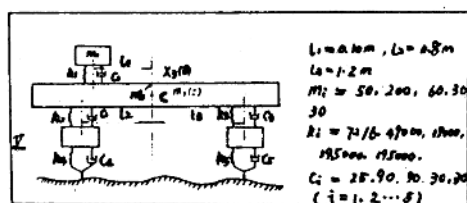
汽车模型及其参数见图一及表一。

<表一>

模态数	1	2	3	4	5
频率(hz)	1.7302	2.8649	4.6025	13.4846	14.5010
阻尼	1.7668%	3.0280%	3.6538%	2.6366%	2.5208%

1. 补偿方法的效果:

将模态参数合成传递函数, 参考点选为质量块1和2。用来进行空间缩减的曲线拟合方程(1)对FRF数据(频响函数数据)进行最小二乘曲线拟合, 可以得到精确值。而用空间缩减的方程(3)进行曲线拟合时, 会产生空间截断误差, 这里只识别第四阶模态, 并分别用IRC法, 与ESC法进行修正, 其结果列在表二中(频率范围取为13Hz-14Hz)。



(图一)

<表二>

修正方法		无修正(np=1)		IRC 法(np=1)	
模态参数		结果	误差	结果	误差
第4 阶模态	频率(HZ)	13.3967	0.7%	13.4745	0.07%
	阻尼	3.3470%	27%	2.6066%	1.1%

(表二续见下页)

(续表二)

修正方法		RC法(np=1)		ESC法(np=3)		RC与ESC 法(np=3)	
模态参数		结果	误差	结果	误差	结果	误差
第4阶模态	频率(Hz)	13.4332	0.3%	13.4802	0.03%	13.4845	0.0%
	阻尼	2.5742%	2.4%	2.7336%	3.7%	2.6380%	0.04%

< 表三 >

矩阵形式		1 [#] (np=1)		2 [#] (np=1)		3 [#] (np=1)	
模态参数		结果	误差	结果	误差	结果	误差
第4阶模态	频率(Hz)	13.1970	2%	13.3967	0.7%	13.4665	0.1%
	阻尼	7.265%	176%	3.3470%	27%	2.6381%	0.06%

1[#] ——代表从自谱矩阵中分解奇异值。 2[#] ——代表从 $I_m[H(j\omega)]$ 中分解奇异值

3[#] ——代表将 $I_m[H(j\omega)]$ 中每个元素进行三次立方后, 再进行奇异值分解。

通过大量的计算表明, 将RC法与ESC法结合起来使用可以得到较好的结果。在实际应用中, 由于RC方法中修正项的一般性对“噪声模态”也有一定的补偿作用。

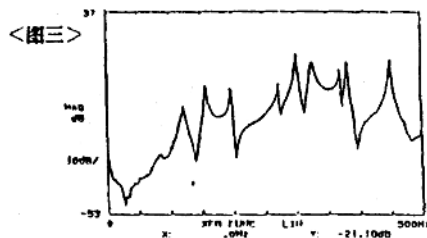
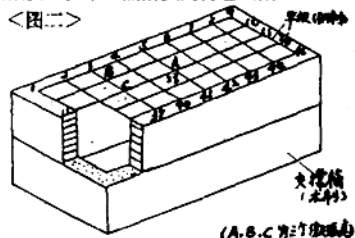
2. 奇异值对频带内模态数的指导能力:

使用不同的矩阵进行奇异值分解, 对频带内模态数的指导能力也有所不同, 而且对模态参数的识别精度也有一定的影响, 其结果列在表三之中(频率范围: 13Hz~14Hz)。

在此频率范围内, 只有一阶模态, 自谱矩阵的奇异值序列为 $\{2.5, 1, 0.05, \dots\}$, $I_m[H(j\omega)]$ 矩阵的奇异值序列为 $\{28, 1, 0.009, \dots\}$; 可见, 后者对频带内模态数的指导能力较强, 大量的仿真计算与实例分析也证实了这一点。从表三之中还可以看出, 3[#]的模态参数的识别值最好, 它的奇异值序列为 $\{116, 1, 4.5 \times 10^{-18}, \dots\}$, 模态数的能力也最强。

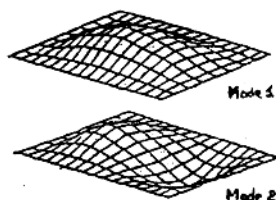
(二) 平板的模态分析:

为了证实这种方法的实用性与有效性, 作者在HP320 微机上编制了分析程序, 使用这个程序, 对一个四周固定的平板进行了3点激励, 45点拾振的模态分析。板长600mm, 宽300mm, 厚2mm, 如图二所示; 图三是在第12点激励, 在第31点拾振的传递函数。



首先在10Hz至500Hz 的频率范围内进行识别, 识别出9 阶模态, 模态参数如表四所示(振型数据略去)。这些模态参数是在多维空间(>9)内得到的, 只有高阶模型可能受到外界模态的污染, 可以认为这些参数是较为准确的(空间缩减矩阵由分解矩阵 $\text{Im}[\omega H(j\omega)]$ 求得)。第1, 2 阶模态的振型由图四所示。

<图四>



(表四)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
频率(HZ)	120.15	156.75	197.15	272.37	302.64	327.36	372.31	382.74	451.09
阻尼	2.62%	1.18%	0.52%	0.52%	0.46%	0.95%	0.28%	0.32%	0.24%

45个测点(135个传递函数), 识别9 阶模态需10分钟左右。

下面, 仅仅就识别第7 阶模态, 并用各种方法对之进行补偿, 结果由表五所示(频率范围为328.75Hz~381Hz)

(表五)

		无修正(np=1)		IRC法(np=1)		RC 法(np=1)		ESC 法(np=3)	
		结果	误差	结果	误差	结果	误差	结果	误差
mode 7	频率	372.47	0.04%	372.34	0.01%	372.32	0.003%	372.23	0.02%
	阻尼	0.32%	14%	0.27%	3%	0.30%	7%	0.30%	7%

(注: 表中的百分比误差是与表四中相应的数据相比得到的)

经验表明: 当识别若干低阶模态时, 用位移传递函数进行奇异值分解较好; 当识别若干高阶模态时, 使用加速度信息较为合适; 而当分析频带较宽时, 最好使用速度信息, 以免丢失高阶或低阶模态。

通过一些仿真计算与实例分析, 通过对各种可选参数的组合分析, 可以对此方法做一个初步的小结:

1. 一般来说, 对于耦合严重的模态, 用IRC 法与ESC 法进行修正的效果较好, 用RC法修正效果欠之。但当传递函数的噪声较大或频带内数值不均匀时, 使用ESC 法进行修正较为困难, 需要寻找与频带外模态相对应的奇异值; 而此时用RC法进行修正的效果却较好, 因为其修正项的一般性对“噪声模态”也具有一定的补偿作用。
2. 当奇异值有很明显的突跳时, 即使不使用修正项, 也可以得到较好的, 其原因是频带外模态的侵入较少。
3. 用传递函数的虚部进行奇异值分解, 使模态数的估计数较为准确, 对改善模态参数的识别精度也有作用。
4. 根据分析频段的不同, 为了防止遗漏模态, 可以适当的選擇位移、速度和加速度的信息、进行奇异值分解。
5. 某阶模态参数的识别精度与激振点的位置有关, 如果某一阶模态的信息很强(例如激振点选在此阶模态的峰点处), 则此阶模态的识别精度较高, 并且受他阶模态的影响也较小。

参考文献

- [1]. Proc. of the 3rd IMAC Conference, pp1145-1151, 1985.
- [2]. ASME Design Engineering Division Conference and Exhibit on Mechanical Vibration and Noise Control, Cincinnati, Ohio, 1985.
- [3]. Proc. of the 4th IMAC Conference, pp1237-1245, 1986.
- [4]. Proc. of the 4th IMAC Conference, pp589-598, 1986.

摘要

本文尝试了一种实模态摄动方法,用来预测和修改结构的动特性,使结构修改具有一定的目的性和全局性,并允许进行较大幅度的修改。初步的计算结果表明,该方法计算简便,可以用于有限元模型和试验模型的修改,对一些比例阻尼结构和工程中的非比例小阻尼结构具有一定的应用价值。

引言

结构修改是模态分析中的一个目标环节,也是结构设计中的重要步骤。结构修改中大致有两类问题:一是已知结构物理参数的修改方案,来预测相应的动特性(模态参数)的变化;二是按照一定的动特性要求,来选择最佳的物理参数的修改方案。我们称第一类问题为正问题,第二类问题为逆问题。近年来人们在结构修改方面做了大量的工作,发展了很多方法。通常的做法是通过灵敏度分析来选择修改方案,然后对修改后的结构进行动特性预测。这基本上还属于第一类问题,一般不能满足全局性的动特性要求。理想的办法是能够按控制理论的思想实现对能控系统的极点的自由配置。然而对复杂的力学结构,这是非常困难的。鉴于以上的分析,我们尝试了一种简单的可能应用于工程问题的实模态摄动方法,可以实现有目的地全面地满足动特性要求的修改预测。

严格地讲,实模态的分析方法只能用于比例阻尼的结构,对于非比例阻尼的情况实模态理论就不成立了。但对工程中的一些阻尼不大的结构,用实模态理论近似地描述、分析,简便而直观,应用依然是很广泛的。近来,人们又发展了许多有关复模态向实模态转化的分析方法^[1],这将进一步扩大实模态理论的应用范围。

二. 基本原理

一个振动系统,若不考虑阻尼的影响,其自由振动方程^[2]:

$$[m](\ddot{\psi}) + [k](\psi) = (0) \quad (1)$$

由此式可以得到系统的特征值和特征向量矩阵:

$$[\omega] = [\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2] \quad (n \times n)$$

$$[\phi] = [\{\psi_1\}, \{\psi_2\}, \dots, \{\psi_n\}] \quad (n \times n)$$

设结构参数发生一个微小变化,变化后的参数表示为:

$$[m'] = [m] + [\Delta m]$$

$$[k'] = [k] + [\Delta k]$$

$$[\omega'^2] = [\omega^2] + [\Delta \omega^2]$$

$$[\phi'] = [\phi] + [\Delta \phi]$$

$$\text{其中, } [\phi'] = [\{\psi_1'\}, \{\psi_2'\}, \dots, \{\psi_n'\}] = [\{\psi_1\}, \{\psi_2\}, \dots, \{\psi_n\}] \begin{bmatrix} 1 & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & 1 & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{即: } \{\psi_1'\} = \{\psi_1\} + c_{12}\{\psi_2\} + \dots + c_{1n}\{\psi_n\}$$

$$\{\psi_2'\} = c_{21}\{\psi_1\} + \{\psi_2\} + \dots + c_{2n}\{\psi_n\}$$

$$\{\psi_n'\} = c_{n1}\{\psi_1\} + c_{n2}\{\psi_2\} + \dots + \{\psi_n\}$$

方程(1)解耦,可得: $[K] = [M][\omega^2]$

其中: $[K] = [\phi]^T[k][\phi]$, $[M] = [\phi]^T[m][\phi]$

对变化后的参数也有同样的关系: $[K'] = [M'][\omega'^2]$

将 $[K']$, $[M']$, $[\omega']$, $[\phi']$ 的一阶摄动表达式(2)代入上式,忽略 Δ 的高阶小量,得:

$$[\phi]^T[\Delta k][\phi] + [\phi]^T[\Delta m][\phi][\omega^2] = [\Delta]$$

$$\text{或 } \Delta_{ji} = \{\psi_j\}^T[\Delta k]\{\psi_i\} - \omega_i^2\{\psi_j\}^T[\Delta m]\{\psi_i\} \quad (3)$$

$$\text{其中: } \Delta_{ji} = M_{ji}\Delta\omega_i^2 \quad j=i$$

$$M_{ji}c_{ij}(\omega_i^2 - \omega_j^2) \quad j \neq i \quad (4)$$

设 $[\Delta k] = \sum_{e=1}^E [\Delta k_e] = \sum_{e=1}^E (\partial [k_e] / \partial k_e) \Delta k_e$

$$[\Delta m] = \sum_{e=1}^E [\Delta m_e] = \sum_{e=1}^E (\partial [m_e] / \partial m_e) \Delta m_e$$

其中, 11, 12 分别为刚度和质量阵中发生变化的元素的个数。

令 $p_{ek} = (\psi_e)^T (\partial [k_e] / \partial k_e) (\psi_e)$, $p_{em} = \omega^2 (\psi_e)^T (\partial [m_e] / \partial m_e) (\psi_e)$

由(3), 得 $\Delta_{11} = (p_{ek})^T (\Delta k_e) + (p_{em})^T (\Delta m_e)$ (5)

其中, $(p_{ek})^T = (p_{1k}, p_{2k}, \dots, p_{11k})$, $(\Delta k_e)^T = (\Delta k_{1e}, \Delta k_{2e}, \dots, \Delta k_{11e})$

$(p_{em})^T = (p_{1m}, p_{2m}, \dots, p_{12m})$, $(\Delta m_e)^T = (\Delta m_{1e}, \Delta m_{2e}, \dots, \Delta m_{12e})$

由前面假设, 有: $(\Delta \psi_1) = c_{11}(\psi_1) + c_{12}(\psi_2) + \dots + c_{1, n-1}(\psi_{n-1}) + c_{1n}(\psi_n)$

由(4)式

$$(\Delta_{11}) = \begin{cases} M_1 \Delta_1^2 \\ M_1(\omega_1^2 - \omega_1^2)c_{11} \\ \vdots \\ M_{i-1}(\omega_{i-1}^2 - \omega_{i-1}^2)c_{i-1, i-1} \\ M_{i+1}(\omega_{i+1}^2 - \omega_{i+1}^2)c_{i+1, i+1} \\ \vdots \\ M_n(\omega_n^2 - \omega_n^2)c_{1n} \end{cases}$$

可构造恒等式:

$$(\delta_{11})_{r \times 1} = \begin{Bmatrix} M_1 \Delta_1^2 \\ \Delta \psi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Gamma \end{Bmatrix}_{r \times n} (\Delta_{11})_{n \times 1} \quad (6)$$

其中, $\Gamma = [(\psi_1), \dots, (\psi_{i-1}), (\psi_{i+1}), \dots, (\psi_n)] [\lambda_1]$

$$[\lambda_1] = \begin{pmatrix} 1/(M_1(\omega_1^2 - \omega_1^2)) \\ \vdots \\ 1/(M_{i-1}(\omega_{i-1}^2 - \omega_{i-1}^2)) \\ 1/(M_{i+1}(\omega_{i+1}^2 - \omega_{i+1}^2)) \\ \vdots \\ 1/(M_n(\omega_n^2 - \omega_n^2)) \end{pmatrix}$$

将(5)代入(6), 得:

$$(\delta_{11})_{r \times 1} = [\Gamma]_{r \times n} [p_k]_{n \times 11} (\Delta k_e)_{11 \times 1} + [\Gamma]_{r \times n} [p_m]_{n \times 12} (\Delta m_e)_{12 \times 1}$$

$$\text{或, } (\delta_{11})_{r \times 1} = [P_k]_{r \times 11} (\Delta k_e)_{11 \times 1} + [P_m]_{r \times 12} (\Delta m_e)_{12 \times 1} \quad (7)$$

(7)式建立了结构物理参数(刚度、质量)的变化与结构模态参数(频率、振型)的变化之间的关系。
 $[P_m]$, $[P_k]$ 是与结构初始模态参数和物理参数有关的矩阵, 反映模态参数对质量和刚度的灵敏度。

从等式(7)可以看出, 解决正问题的过程就是一个简单的矩阵代数运算过程; 解逆问题则是一个求解线性方程组的问题, 这里将有三种可能的情况:

- (a) $r = l_1 + l_2$, 有唯一解;
- (b) $r < l_1 + l_2$, 超定解;
- (c) $r > l_1 + l_2$, 不定解。

其中 r 是考虑的模态参数的总数, l_1, l_2 分别是允许变化的刚度和质量的总数。第二种情况可以化成多组唯一解的情况, 对应于多种可以选择的修改方案; 第三种情况, 要求限制的模态参数多于允许变化的物理参数不能求得全部严格满足模态参数要求的修改方案, 可根据具体要求, 求得最优近似解, 如最小二乘解或局部精确解。

在实际工程问题中, 人们关心的、需要加以限制的模态参数是少于结构允许修改的物理参数的个数, 因而可以借助于灵敏度分析找到较为有效的修改方案。

三. 算 例

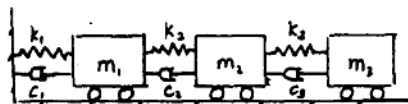
1. 比例阻尼结构

如图所示的三自由度力学模型，其结构参数为：

$$k_1=2\text{N/M}, k_2=5\text{N/M}, k_3=1\text{N/M}$$

$$M_1=1\text{kg}, M_2=1\text{kg}, M_3=0.5\text{kg}$$

$$C_1=0.2\text{NS/M}, C_2=0.5\text{NS/M}, C_3=0.1\text{NS/M}$$



初始模态参数

表 1

	ω_i	ζ_i	ψ_{i1}	ψ_{i2}	ψ_{i3}
i=1	0.7913	0.0395	0.5393	0.6877	1.0
i=2	1.6600	0.0830	-0.4452	-0.3779	1.0
i=3	3.4086	0.1704	1.0	0.9239	0.1921

a. 正问题:

在 m_3 上加0.5kg 质量, 修改后结果:

表 2

i		ω_i	ζ_i	ψ_{i1}	ψ_{i2}	ψ_{i3}
1	预 测	0.6572	—	0.4318	0.5673	1.0
	理论值	0.6574	0.0328	0.4322	0.5677	1.0
2	预 测	1.4129	—	-1.0030	-1.0033	1.0
	理论值	1.4142	0.0707	-1.0000	-1.0000	1.0
3	预 测	3.4012	—	1.0	-0.9135	0.0859
	理论值	3.4011	0.1701	1.0	0.9136	0.0865

注: 其中预测值是用本文方法得到的; 理论值是解特征值问题求得的。

以上频率误差 $<0.1\%$, 振型误差 $<0.5\%$

b. 逆问题: 要求 $\omega'_1=0.5$, $\omega'_2=2.0$, ω'_3 不变; 振型不限。计算结果列于表三中。

2. 非比例阻尼结构

这种情况下, 模态为复模态。频率和振型都是复数形式:

$$\text{复频率 } \lambda_i = -\alpha_i + j\omega_{di}$$

$$\text{复振型 } \Psi_{ij} = \psi_{ij} + j\psi_{ij}'$$

由于实模态理论简单、直观, 便于工程问题的分析应用, 因而对于一些复模态问题, 人们仍希望在实模态理论中研究。近来出现了不少有关复模态参数向实模态参数转化的理论, 对小阻尼结构, 目前工程常用的是简单的近似转换关系:

表3 (其余几种方案略)

 $m, \text{kg}, k, \text{N/M}$

方案结果	阶次	$\omega_{i,1}'$	$\psi_{i,1}'$	$\omega_{i,2}'$	$\psi_{i,2}'$
$\Delta m_1 = 0.38$	i=1	0.5	0.6834	0.9354	1.0
$\Delta m_2 = 3.97$	i=2	2.0	-0.0558	0.0504	1.0
$\Delta m_3 = -0.24$	i=3	3.4086	1.0	0.0923	0.0477
$\Delta m_1 = -0.83$	i=1	0.5	0.0952	0.8848	1.0
$\Delta m_2 = -0.44$	i=2	2.0	-0.1412	0.9958	1.0
$\Delta k_2 = -4.7$	i=3	3.4086	1.0	-2.7396	0.0053
方案1 的 理论结果	i=1	0.5060	0.6824	0.9337	1.0
	i=2	2.007	-0.0565	-0.0506	1.0
	i=3	3.4674	1.0	0.0937	0.0443

频率误差<0.3%, 振型误差<0.5%

$$\hat{\omega}_{i,1} = |\lambda_{i,1}| = \sqrt{n_{i,1}^2 + \omega_{d,1}^2}$$

$$\hat{\psi}_{i,1} = |\Psi_{i,1}| \operatorname{sign}(\Psi_{ij}')$$

(8)

下面是用本文的方法来预测一个非比例阻尼结构修改的例子。仍用前面的三自由度模型, 阻尼改为:

$$c_1=0.2, c_2=0.3, c_3=0.1$$

初始模态参数:

表4

	λ_i	$\Psi_{i,1}$	$\Psi_{i,2}$	$\Psi_{i,3}$
i=1	-0.0295+0.7898j	0.5393-0.8028j	0.6877+0.0014j	1.0+0.0j
i=2	-0.1373+1.654j	-0.4452-0.0040j	-0.3779+0.0009j	1.0+0.0j
i=3	-0.3833+3.3836j	1.0+0.0j	-0.9229+0.0072j	0.1945+0.0253j

用公式(8)转化的实模态参数:

$$\hat{\omega}_1=0.7904, \quad \hat{\psi}_{11}=0.5393, \quad \hat{\psi}_{12}=0.6877, \quad \hat{\psi}_{13}=1.0$$

$$\hat{\omega}_2=1.6601, \quad \hat{\psi}_{21}=-0.4452, \quad \hat{\psi}_{22}=-0.3779, \quad \hat{\psi}_{23}=1.0$$

$$\hat{\omega}_3=3.4084, \quad \hat{\psi}_{31}=1.0, \quad \hat{\psi}_{32}=-0.9229, \quad \hat{\psi}_{33}=0.1945$$

修改质量 m_1, m_2 和刚度 k_2 , $\Delta m_1 = \Delta m_2 = 0.5 \text{ kg}$, $\Delta k_2 = -1 \text{ N/M}$, 预测结果与由复模态方法经(8)式转换的理论解的对比列于表5。

表 5

		$\hat{\omega}_1$	$\hat{\psi}_{1,1}$	$\hat{\psi}_{1,2}$	$\hat{\psi}_{1,3}$
i-1	预测值	0.6775	0.5805	0.7710	1.0
	理论值	0.6778	0.5801	0.7703	1.0
i-2	预测值	1.5434	-0.3185	-0.1920	1.0
	理论值	1.5445	-0.3187	-0.1928	1.0
i-3	预测值	2.5389	1.0	-0.9326	0.4199
	理论值	2.5471	1.0	-0.9326	0.4182

频率误差 $<0.3\%$ ，振型误差 <0.5

四. 结 语

前面的分析计算表明公式(7)既可以用于比例阻尼结构以及非比例小阻尼结构的结构刚度、质量修改的动特性预测，又可以解其逆问题，使结构的设计和修改满足一定的动特性要求。该算法简单，有较好的精度可以用于有限元计算模型的修正和在模态试验基础上的实际结构的修改预测，对结构的优化设计具有一定的指导意义。但目前对修改后的阻尼变化尚不能预测，这有待于今后进一步的工作。

参考资料：

- [1]. Zhang jinghui, "On the transform of the complex mode into the real mode", IMAC-5
- [2]. Robert E. Sandstrom, William J. Anderson, "Modal Perturbation Methods for Marine Structures", SNAME Transactions, Vol. 90, 1982, pp. 41-54

徐 敏

杨永胜

上海交通大学振动、冲击、噪声研究所

摘 要

本文简介非线性系统传递函数实部与虚部经过Hilbert变换以后和虚部与实部具有一一对应关系的理论。利用实验传递函数Hilbert变换非线性特征,提出传递函数偏差指标,识别系统的非线性存在,探索其在机械故障诊断中的应用。采用这一方法,作者在滚珠轴承上做了实验,得到具有较为明显识别能力的判断效果。

1. 引言

Hilbert变换被广泛应用于物理学,全息摄影,光学和NMR付里叶分光器,干涉量度学,可见光相位不均匀系统及信息理论领域。自从1958年以来,离散Hilbert变换在机械动力系统故障诊断和数字语言处理与综合等方面也得到了广泛的应用。Hilbert变换得到如此广泛应用的原因是它把时不变线性系统的频率响应函数的实部与虚部联系了起来。

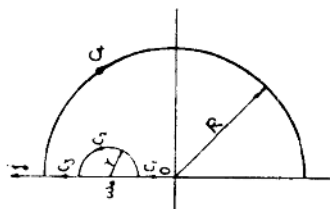
2. 原理

对于线性系统,有传递函数 $G(w)$,若 $\lim_{w \rightarrow \infty} G(w) = \text{Re}G(\infty) = \text{有限值}$,那么,我们来推导传递函数实部与虚部之间的Hilbert变换关系。

图1是所选择的Cauchy积分路径,由Cauchy积分定理知:

$$\oint_c (G(s)/(s-jw_0)) ds = 0 \quad (1)$$

图 1:
Cauchy 积分路径



$$\text{即: } \int_{c1} \frac{G(s)}{s-jw_0} ds + \int_{c2} \frac{G(s)}{s-jw_0} ds + \int_{c3} \frac{G(s)}{s-jw_0} ds + \int_{c4} \frac{G(s)}{s-jw_0} ds = 0 \quad (2)$$

下面,我们分别求各段积分

$$(1) \quad R \rightarrow \infty \text{ 时, } \int_{c4} \frac{G(s)}{s-jw_0} ds$$

$$s = Re, ds = jRe d\theta$$

$$\int_{c4} \frac{G(s)}{s-jw_0} ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{G(Re)}{Re - jw_0} jRe d\theta$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{G(Re)}{Re - jw_0} jRe d\theta = -j\pi \text{Re}G(\infty) \quad (3)$$

$$(2) \int_{c_2} \frac{G(s)}{s-j\omega_0} ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{G(re + j\omega_0 re)}{L \lim_{r \rightarrow 0} j} d\theta = +j\pi G(\omega_0) \quad (4)$$

$$(3) \int_{c_1+c_3} \frac{G(s)}{s-j\omega_0} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}G(\omega) + j\text{Im}G(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega \quad (5)$$

$$(4) \int_{c_1+c_2+c_3+c_4} \frac{G(s)}{s-j\omega_0} ds = 0$$

即: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}G(\omega) + j\text{Im}G(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega + j\pi G(\omega_0) - j\pi \text{Re}G(\infty) = 0 \quad (6)$

整理得:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}G(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega - \pi \text{Im}G(\omega_0) = 0 \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}G(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega + \pi \text{Re}G(\omega_0) - \pi \text{Re}G(\infty) = 0 \quad (8)$$

所以有:

$$\text{Im}G(\omega) = -\mathcal{H}\{\text{Re}G(\omega)\} \quad (9)$$

$$\text{Re}G(\omega) = \mathcal{H}\{\text{Im}G(\omega)\} + \text{Re}G(\infty) \quad (10)$$

式中 $\mathcal{H}$ 表示Hilbert变换, 因此, 线性系统传递函数的实部与虚部之间存在着如公式(9), (10)所示的Hilbert变换关系。

现在, 用 $\text{TR}_1, \text{TR}_2, \text{HTR}_1, \text{HTR}_2$ 分别表示实验传递函数的实部与虚部及Hilbert变换传递函数的实部与虚部, 公式(9), (10)意味着对于线性系统

$$\text{HTR}_1 = \text{TR}_1 \quad (11)$$

$$\text{HTR}_2 = \text{TR}_2 \quad (12)$$

若系统存在非线性, 则实验与Hilbert变换传递函数之间必定存在一定的偏差, 即:

$$\text{HTR}_1 \neq \text{TR}_1 \quad (13)$$

$$\text{HTR}_2 \neq \text{TR}_2 \quad (14)$$

定义:

$$\text{MTR}_1 = \text{TR}_1 - \text{HTR}_1 \quad (15)$$

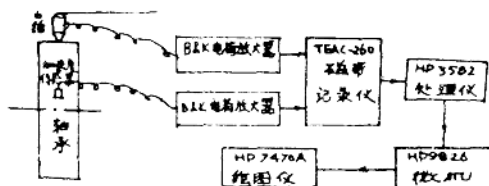
$$\text{MTR}_2 = \text{TR}_2 - \text{HTR}_2 \quad (16)$$

$\text{MTR}_1, \text{MTR}_2$ 即为实部传递函数偏差与虚部传递函数偏差, 其偏差的大小代表了系统非线性的程度, 其偏差的变化代表了系统情况的变化, 由此, 可通过监测 $\text{MTR}_1, \text{MTR}_2$ 在系统运行过程中的变化来达到系统故障诊断的目的。

3. 在液珠轴上的实验

本实验是在S0910轴承振动测量仪上使用309轴承作试件进行的, 实验及处理仪器如图2所示

图 2:
试验及处理仪器框图



实验分别是在轴承正常情况和故障情况下进行的，其故障是在轴承内圈打一裂纹，当此裂纹振动时，便引起振动刚度与阻尼的非线性，通过识别其非线性，便可对裂纹进行故障诊断。

4. 结果分析

每一部件或系统都存在一定的非线性，且Hilbert变换也有一定的截断误差，在运用这种方法进行故障的定量分析时，所采用的故障定量分析指标是其非线性大小变化这一动态指标，正常试件所得到的传递函数偏差定义为标准传递函数偏差，在此基础上，监测其变化规律，进行故障诊断。

图3(a, b)与图4(a, b)是正常轴承的传递函数与标准传递函数偏差，图中，实线是实验结果，虚线是Hilbert计算结果

图 3:
正常轴承传递函数
的实部(a)与虚部(b)

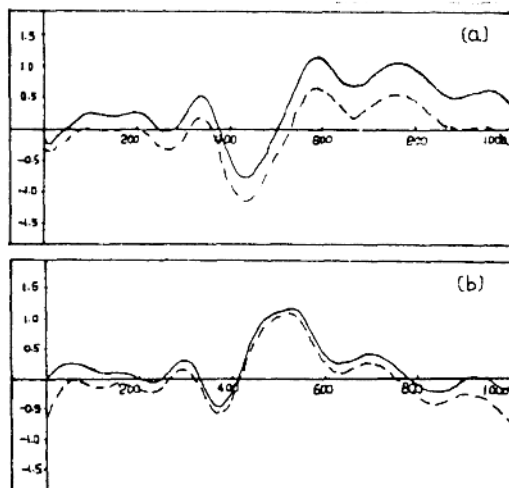


图 4:
正常轴承标准传递函数
偏差的实部(a)与虚部(b)

