

编号: 81389

上海交大译丛

造船实用设计国际讨论会译文集

(下 册)

上海交通大学技术资料情报室

1981年5月

前 言

1977年10月在日本东京召开《造船实用设计国际讨论会》。会上，宣读了五十六篇论文。这些论文介绍了最近船舶设计、船舶性能、性能设计、结构强度和结构设计等方面的研究、进展及其应用，论述了一些新的设计思想和处理方法，反映了世界造船实用设计的现况。我们选译了有关船舶设计及性能方面的文章十七篇，结构强度及结构设计方面的文章二十一篇，共计三十八篇，分上下两册出版，供从事造船设计、教学、科研的工程技术人员借鉴和参考。

译文集由造船系情报资料小组组织有关教师译出。为了尽快将论文集译出付印，工作比较仓促，加之我们缺乏经验和水平有限，译稿中一定有不少缺点和错误，恳请同志们批评指正。

造 船 系

目 录

弹性振动时矩形板附连质量的计算	(1)
计算机在船舶产品论证与初步设计阶段的应用	(14)
不合理的船舶结构设计造成的损失	(25)
船舶结构自动最优化设计的一种综合方法	(33)
关于船舶结构强度的基本设计衡准	(50)
概率极值的概念及其在船舶设计中的应用	(59)
滚装船的横结构设计与分析	(69)
集装箱船舱口角隅处的应力分布	(79)
局部压屈失稳对船体极限纵强度的影响	(88)
壳体弹性屈曲的设计准则	(98)
承受横向荷重的加筋板的非线性分析及设计	(108)

应用弹—塑性有限单元法进行船舶结构节点的最优化设计	(121)
构件设计中计算机系统的使用	(128)
对船舶和海上装置的板的损伤估算	(139)
由于内部裂纹疲劳扩展引起的破坏分析	(152)
对修理中油船裂纹的调查	(164)
船体结构损伤及其防范措施的近来趋势	(176)
船体和上层建筑的动力响应 ——振动测量值与计算值的对比研究	(185)
船体振动估算实用方法	(196)
大功率船舶的尾部振动	(210)
关于具有缺陷的船体构件强度之研究	(220)

弹性振动时矩形板附连质量的计算

K. C. Kim

南朝鲜 国立汉城大学

摘 要

本文计算了在无限的理想流体中弹性振动矩形薄板的附连质量,建立这个问题的公式时采用了椭圆柱体坐标系统,因此,矩形板可以用一个由椭圆柱体退化而成的薄板来表示,即薄板的宽度等于焦距。边界条件是简支。

由于这种坐标系统,横向有限而纵向连续的板可以直接处理;但是,两个方向都是有限的板就不能直接处理。因此对于后者,横向有限而纵向半有限的板是用一个适当的近似方法来研究的。

对基谐波和纵横比的范围由 1 到 10 以及 10 以上的每个方向有零节线或 1 条节线的振形提出了一些数值计算的例子。

一、引 言

关于同水那样一种流体相接触的弹性板的振动,许多学者对其附连质量进行了研究,例如兰姆^[1]和麦克拉克伦^[2]研究了园板的附连质量;Kito^[3]研究了矩形板的附连质量;林达霍姆等^[4]从试验研究悬臂板的附连质量等等。

对于某种振动方式,我们定义质量增值系数为附连质量与板本身振动质量之比,并且可用下式计算:

$$\beta = \frac{T_w}{T_p} \quad (1)$$

式中, T_p 是振动着的板本身的动能, T_w 是围绕该板的流体的动能。假定在两种介质中振动的振形是相同的,那么在这一假定下,我们就能够用系数 β , 通过如下的方程使之与真空中的固有频率 f_0 作一比较而求得板在一种流体中的固有频率 f_w 之值,

$$\frac{f_w}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \quad (2)$$

本文中,作者介绍了基于椭圆柱体坐标系统所建立的公式,就四边完全简支的矩形板导出的质量增值系数的计算。一矩形板可以用焦距等于该坐标系统中的该板宽度的椭圆柱退化而得的薄板来代表,而周围的流体假定为一种无限的理想流体。由于用了这种坐标系,横向为有限而纵向连续的板便能直接处理,但是两向有限的独立板不能直接处理,因此,横向有限而纵向半有限的半独立板可用适当的近似方法来研究。

二、问题的公式

如图 1 所示, 我们建立椭圆柱坐标系 (ξ, η, z) 和直角坐标系 (x, y, z) 的关系如下:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{2} \cosh \xi \cdot \cos \eta \\ y &= \frac{a}{2} \sinh \xi \cdot \sin \eta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

于是在 $\xi \rightarrow 0$ 的极限情况下, 我们可以得到由焦距为 a 的椭圆柱退化而得的宽度为 a 的薄板。同样, 在椭圆柱坐标系中, 双曲线弧长 ds_1 和椭圆弧长 ds_2 表示如下:

$$\left. \begin{aligned} ds_1 &= l_1 \cdot d\xi \\ ds_2 &= l_1 \cdot d\eta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中

$$l_1 = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)}$$

因为 ds_1 是沿着椭圆法线方向, 因此垂直于椭圆的弧长 dn 可以写成

$$dn = l_1 \cdot d\xi \quad (5)$$

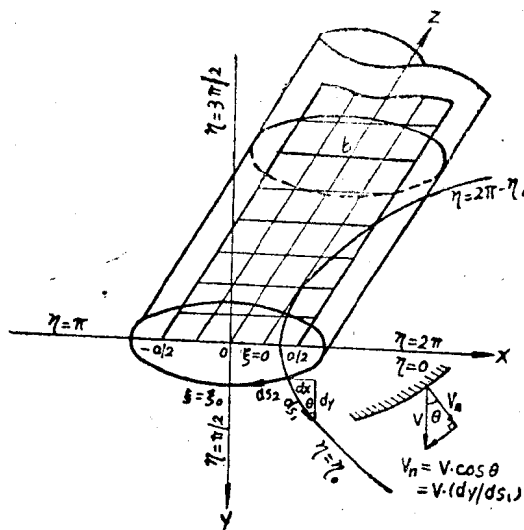


图 1 坐标系和速度向量的关系

按照板振动的基本理论, 如图 1 所示的边界 $x = \pm \frac{a}{2}$ 、 $z = 0$ 、 $z = b$ 为简支的矩形薄板, 它在空气中的固有频率 ω_{mn} 和相应的固有振形 w_{mn} 分别为

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D_E}{\rho_p h} \pi^2 \left\{ \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right\}} \quad (6)$$

$$w_{mn}(x, z) = W_{mn} \sin \left\{ \frac{m\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right\} \cdot \sin \frac{n\pi z}{b} \cdot \sin \omega_{mn} t \quad (7)$$

式中

$$m, n = 1, 2, 3, \dots$$

D_E = 板的弯曲刚度;

ρ_p = 板的质量密度;

h = 板的厚度。

因为板是由 $\xi \rightarrow 0$ 时椭圆柱退化而来的, 当我们把方程(3)引进方程(7)中, 并且应用极限 $\xi \rightarrow 0$ 时, 我们就得到用 η 和 z 来表示的固有振形如下;

$$w_{mn}(\eta, z) = W_{mn} \sin \left\{ \frac{m\pi}{2} (\cos \eta + 1) \right\} \cdot \sin \frac{n\pi z}{b} \cdot \sin \omega_{mn} t \quad (8)$$

将它们分成横向对称振形和横向反对称振形, 我们分别得到

$$w_{mn} = W_{mn} \cos \left(\frac{m\pi}{2} \cos \eta \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{b} \cdot \sin \omega_{mn} t$$

$$m = 1, 3, \dots \quad (9-1)$$

$$w_{mn} = W_{mn} \sin \left(\frac{m\pi}{2} \cos \eta \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{b} \cdot \sin \omega_{mn} t$$

$$m = 2, 4, \dots \quad (9-2)$$

此处符号已并入 W_{mn} 中。

另一方面, 围绕振动板的流体质点的振动由速度势 $\phi_{mn}(\xi, \eta, z, t)$ 来决定, 它必须满足拉普拉斯方程

$$\frac{1}{l_1^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_{mn}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi_{mn}}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi_{mn}}{\partial z^2} = 0 \quad (10)$$

其边界条件服从所给的问题, 即一个在流体的无穷远处, 另一个在振动板的表面上。它们可以写成如下的式子(参照图1);

$$\phi_{mn} = 0, \quad \text{在 } \xi \rightarrow \infty \text{ 处} \quad (11)$$

$$\left(\frac{1}{l_1} \cdot \frac{\partial \phi_{mn}}{\partial \xi} \right)_{\xi \rightarrow 0} \cdot \left(\frac{1}{l_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{\xi \rightarrow 0}^{-1} = \frac{dw_{mn}}{dt} \quad (12)$$

在讨论边界条件(12)时, 我们可以根据数学模型很方便地得出两个著名的物理概念, 它们是:

1. 纵向连续板概念

我们假定有无限多个板, 每块板宽度为 a , 长度为 b , 它们依次沿 Z 向排列, 并假定相邻两板彼此以相位差 180° 进行微小的弹性振动, 如图 2a 所示。

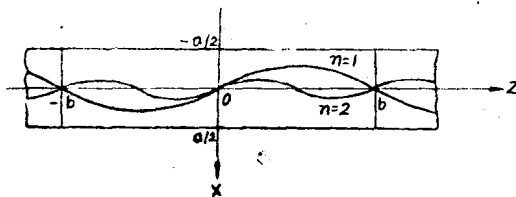


图 2a 纵向连续板概念

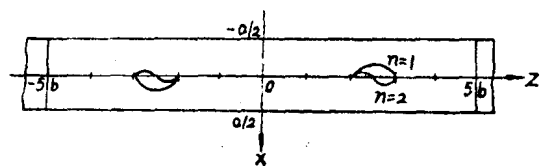


图 2b 纵向半有限板概念
(对应于 $p=5$ 的例子)

2. 半独立板概念

我们假定有无限多个板, 每块板宽度为 a , 长度为 pb (此处 p 是大于或等于 3 的任意奇数), 它们依次地沿 Z 向排列, 并假定每块板仅中间宽度为 a 长度为 b 的一段, 在相邻两板之间以相位差 180° 进行微小的弹性振动, 如图 2b 所示。前面讲的第 1 种情况相当于这里 $p=1$ 的情况。

在每种情况中, 边界条件(12)可以写成如下的式子:

(1) 纵向连续板

$$\left(\frac{\partial \phi_{mn}}{\partial \xi} \right)_{\xi \rightarrow 0} = \left(\frac{a}{2} \sin \eta \right) \cdot (\omega_{mn} W_{mn}) \cdot \cos \left(\frac{m\pi}{2} \cos \eta \right) \sin \frac{n\pi z}{b} \cdot \cos \omega_{mn} t$$

$$m = 1, 3, \dots \quad (13-1)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_{mn}}{\partial \xi} \right)_{\xi \rightarrow 0} = \left(\frac{a}{2} \sin \eta \right) \cdot (\omega_{mn} W_{mn}) \cdot \sin \left(\frac{m\pi}{2} \cos \eta \right) \cdot \sin \frac{n\pi z}{b} \cdot \cos \omega_{mn} t$$

$$m = 2, 4, \dots \quad (13-2)$$

(2) 半独立板

$$\left(\frac{\partial \phi_{mn}}{\partial \xi} \right)_{\xi \rightarrow 0} = \left(\frac{a}{2} \sin \eta \right) \cdot (\omega_{mn} W_{mn}) \cdot \cos \left(\frac{m\pi}{2} \cos \eta \right) \cdot \sum_{N=1}^{\infty} F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb} \cdot \cos \omega_{mn} t$$

$$m = 1, 3, \dots \quad (14-1)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_{mn}}{\partial \xi} \right)_{\xi \rightarrow 0} = \left(\frac{a}{2} \sin \eta \right) \cdot (\omega_{mn} W_{mn}) \cdot \sin \left(\frac{m\pi}{2} \cos \eta \right) \cdot \sum_{N=1}^{\infty} F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb} \cdot \cos \omega_{mn} t$$

$$m = 2, 4, \dots \quad (14-2)$$

此处 F_{nN} 是相当于 Z 方向第 n 阶振形展开成正弦级数中的富里叶系数。

三、质量增值系数

3.1 纵向连续板

令式(10)的解的形式为

$$\phi_{mn}(\xi, \eta, z, t) = \psi_{mn}(\xi, \eta) \cdot Z_n(z) \cdot \cos \omega_{mn} t = \Xi_{mn}(\xi) \cdot H_{mn}(\eta) \cdot Z_n(z) \cdot \cos \omega_{mn} t \quad (15)$$

考虑到式(13), 我们取

$$Z_n(z) = \sin \frac{n\pi z}{b} \quad (16)$$

于是方程式(10)可以化为

$$H \frac{d^2 \Xi}{d\xi^2} + \Xi \frac{d^2 H}{d\eta^2} - 2 \left(\frac{an\pi}{4b} \right)^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \cdot \Xi \cdot H = 0 \quad (17)$$

式(17)除以 $\Xi \cdot H$ 并重新排列一下, 于是得到

$$\frac{\Xi''}{\Xi} - 2 \left(\frac{an\pi}{4b} \right)^2 \cdot \cosh 2\xi = - \frac{H''}{H} - 2 \left(\frac{an\pi}{4b} \right)^2 \cos 2\eta$$

因此, 用一个分离常数 C 就可以得到一组两个常微分方程

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + \left\{ C - 2(-q_n) \cdot \cos 2\eta \right\} \cdot H = 0 \quad (18-1)$$

$$\frac{d^2 \Xi}{d\xi^2} + \left\{ C - 2(-q_n) \cdot \cosh 2\xi \right\} \cdot \Xi = 0 \quad (18-2)$$

其中
$$q_n = \left(\frac{an\pi}{4b} \right)^2 \quad (19)$$

式(18-1)和式(18-2)分别为众所周知的马瑟欧方程和修正了的马瑟欧方程^{[5]*}。由此, 式(15)中的 $\psi(\xi, \eta)$ 包含了任意两个函数的乘积, 它们分别是式(18-1)和式(18-2)对同一 C 值和 $-q_n$ 值的解。

作为式(18)的解, 我们要取一般的和修正过的整数阶的马瑟欧函数。此外, 作为式(18-2)的解, 我们取非周期性的马瑟欧函数, 它可展开成修正过的具塞尔函数 I 、 K 的乘积级数。同时, 作为式(18-1)的解, 我们取一个正弦椭圆函数, 考虑到振动板的横向振形, 对称振形取周期为 2π 的函数, 反对称振形取周期为 π 的函数。据此, 对横向对称振形就有

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^{\infty} Gek_{2r-1}(\xi, -q_n) \cdot se_{2r-1}(\eta, -q_n) \quad (20-1)$$

对横向反对称振形则有

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^{\infty} Gek_{2r}(\xi, -q_n) \cdot se_{2r}(\eta, -q_n) \quad (20-2)$$

显然, 式(20)满足边界条件(11), 因为当 $\xi \rightarrow \infty$ 时 $Gek(\xi, -q_n)$ 变成零, 这样, 我们就得到

$$\begin{aligned} \phi_{mn}(\xi, \eta, z, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} C_{mn, 2r-1} Gek_{2r-1}(\xi, -q_n) \cdot se_{2r-1}(\eta, -q_n) \cdot \sin \frac{n\pi z}{b} \cdot \cos \omega_{mn} t \\ m &= 1, 3, \dots \end{aligned} \quad (21-1)$$

$$\begin{aligned} \phi_{mn}(\xi, \eta, z, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} C_{mn, 2r} Gek_{2r}(\xi, -q_n) \cdot se_{2r}(\eta, -q_n) \cdot \sin \frac{n\pi z}{b} \cdot \cos \omega_{mn} t \\ m &= 2, 4, \dots \end{aligned} \quad (20-2)$$

这里 $C_{mn, 2r-1}$ 和 $C_{mn, 2r}$ 分别要依照边界条件(13-1)和(13-2)来决定, 由式(13)我们有

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} C_{mn, 2r-1} \cdot Gek'_{2r-1}(0, -q_n) \cdot se_{2r-1}(\eta, -q_n) &= \left(\frac{a}{2} \omega_{mn} W_{mn} \right) \cdot \sin \eta \cdot \cos \left(\frac{m\pi}{2} \cdot \cos \eta \right) \\ m &= 1, 3, \dots \end{aligned} \quad (22-1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} C_{mn, 2r} \cdot Gek'_{2r}(0, -q_n) \cdot se_{2r}(\eta, -q_n) &= \left(\frac{a}{2} \omega_{mn} W_{mn} \right) \cdot \sin \eta \cdot \sin \left(\frac{m\pi}{2} \cdot \cos \eta \right) \\ m &= 2, 4, \dots \end{aligned} \quad (22-2)$$

这里, 我们必须把(22)式的右边利用下列关系式展开成正弦椭圆函数的级数(直接展开见附录),

* 下文所使用的有关马瑟欧函数的符号都按麦克拉克伦在[5]中的定义一原注。

$$\sin \eta \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{2} \cos \eta\right) \sim \sum_{s=1}^{\infty} E_{m2s-1} \sin(2s-1)\eta$$

$$m = 1, 3, 5, \dots \quad (23-1)$$

$$\sin \eta \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2} \cos \eta\right) \sim \sum_{s=1}^{\infty} E_{m2s} \sin 2s\eta$$

$$m = 2, 4, 6, \dots \quad (23-2)$$

$$\sin(2s-1)\eta \sim (-1)^{s-1} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} A_{2s-1}^{(2r-1)}(q_n) \cdot \text{se}_{2r-1}(\eta, -q_n) \quad (24-1)$$

$$\sin 2s\eta \sim (-1)^{s-1} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} B_{2s}^{(2r)}(q_n) \cdot \text{se}_{2r}(\eta, -q_n) \quad (24-2)$$

这里 E_{m2s-1} 和 E_{m2s} 是在式(23)中待定的富里叶系数, $A(q_n)$ 和 $B(q_n)$ 分别是 $\text{se}_{2r-1}(\eta, -q_n)$ 和 $\text{se}_{2r}(\eta, q_n)$ 的富里叶展开中的规范化系数。将(22), (23)和(24)等式进行数学运算后 C_{mn2r-1} 和 C_{mn2r} 决定如下:

$$C_{mn2r-1} = \left(\frac{a}{2} \omega_{mn} W_{mn}\right) \text{Gek}'_{2r-1}(0, -q_n) \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \cdot (-1)^{r-1} E_{m2s-1} A_{2s-1}^{(2r-1)}(q_n) \quad (25-1)$$

$$C_{mn2r} = \left(\frac{a}{2} \omega_{mn} W_{mn}\right) \cdot \text{Gek}'_{2r}(0, -q_n) \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \cdot (-1)^{r-1} E_{m2s} B_{2s}^{(2r)}(q_n) \quad (25-2)$$

最后, 我们可以得到速度势

$$\phi_{mn} = \left(\frac{a}{2} \omega_{mn} W_{mn} \cdot \cos \omega_{mn} t\right) \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\text{Gek}_{2r-1}(\xi, -q_n)}{\text{Gek}'_{2r-1}(0, -q_n)} \cdot \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \cdot (-1)^{r-1} E_{m2s-1} A_{2s-1}^{(2r-1)}(q_n) \right\} \cdot \text{se}_{2r-1}(\eta, -q_n) \cdot \sin \frac{n\pi z}{b}$$

$$m = 1, 3, \dots \quad (26-1)$$

$$\phi_{mn} = \left(\frac{a}{2} \omega_{mn} W_{mn} \cos \omega_{mn} t\right) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\text{Gek}_{2r}(\xi, -q_n)}{\text{Gek}'_{2r}(0, -q_n)} \cdot \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \cdot (-1)^{r-1} E_{m2s} B_{2s}^{(2r)}(q_n) \right\} \cdot \text{se}_{2r}(\eta, -q_n) \cdot \sin \frac{n\pi z}{b}$$

$$m = 2, 4, \dots \quad (26-2)$$

现在我们根据下式计算流体的动能 T_w

$$T_w = \frac{1}{2} \rho_w \int_0^b \int_0^{2\pi} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\eta dz \quad (27)$$

式中, ρ_w 是流体的质量密度。用(26)式代替(27)式中的 ϕ , 并利用 $\text{se}(\eta, -q_n)$ 和 $\sin\left(\frac{n\pi z}{b}\right)$ 的正交性, 我们很容易得到

$$T_w = -\rho_w \left(\frac{a}{2} \omega_{mn} W_{mn} \cos \omega_{mn} t \right)^2 \frac{\pi b}{4} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Gek_{2r-1}(0, -q_n)}{Gek'_{2r-1}(0, -q_n)} \cdot \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} E_{m2s-1} A_{2s-1}^{(2r-1)}(q_n) \right\}^2$$

$m = 1, 3, \dots$

(28-1)

$$T_w = -\rho_w \left(\frac{a}{2} \omega_{mn} W_{mn} \cos \omega_{mn} t \right)^2 \frac{\pi b}{4} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Gek_{2r}(0, -q_n)}{Gek'_{2r}(0, -q_n)} \cdot \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} E_{m2s} B_{2s}^{(2r)}(q_n) \right\}^2$$

$m = 2, 4, \dots$

(28-2)

另一方面，在空气中振动板的动能 T_P 是

$$T_P = \frac{1}{2} \rho_P h \int_0^b \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{d w_{mn}}{dt} \right)^2 dx \cdot dz = \rho_P h \frac{ab}{8} (\omega_{mn} W_{mn} \cdot \cos \omega_{mn} t)^2$$
(29)

最后，由定义(1)，质量增值系数 β 为：

$$\beta_{mn} = \left(\frac{\rho_w}{\rho_P} \right) \cdot \left(\frac{a}{h} \right) \frac{\pi}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{-Gek_{2r-1}(0, -q_n)}{Gek'_{2r-1}(0, -q_n)} \cdot \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} E_{m2s-1} A_{2s-1}^{(2r-1)}(q_n) \right\}^2$$

$m = 1, 3, \dots$

(30-1)

$$\beta_{mn} = \left(\frac{\rho_w}{\rho_P} \right) \left(\frac{a}{h} \right) \cdot \frac{\pi}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{-Gek_{2r}(0, -q_n)}{Gek'_{2r}(0, -q_n)} \cdot \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} E_{m2s} B_{2s}^{(2r)}(q_n) \right\}^2$$

$m = 2, 4, \dots$

(30-2)

必须注意，取自公式(30)的值是指板的两边都与流体接触。因此，当板仅有一边接触流体时，我们应取公式所求得的一半。

3.2 半独立板

在这种情况下，我们可以假定速度势 ϕ_{mn} 是 $\sum_{N=1}^{\infty} F_{nN} \sin\left(\frac{N\pi z}{pb}\right)$ 中每一项的和。于是，我们把式(15)中的 $Z_n(z)$ 取为

$$Z_n(z) = F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb}$$
(31)

而不是取式(16)，并且如纵向连续板那样进行同样的数学运算。然后通过(18)和(20)相似的方程，只是用

$$q_N = \left(\frac{aN\pi}{4pb} \right)^2$$
(32)

而不是(19)式中的 q_n ，就得到

$$\phi_{mn} = \sum_N \left[\left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \left(C_{mn2r-1} \right)_N \cdot Gek_{2r-1}(\xi, -q_N) \cdot se_{2r-1}(\eta, -q_N) \right\} \cdot F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb} \right] \cos \omega_{mn} t$$

$m = 1, 3, \dots$

(33-1)

$$\phi_{mn} = \sum_N \left\{ \left[\sum_{r=1}^{\infty} (C_{mn2r})_N \cdot Gek_{2r}(\xi, -q_N) \cdot se_{2r}(\eta, -q_N) \right] \cdot F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb} \right\} \cos \omega_{mn} t$$

$m = 2, 4, \dots$

(33-2)

此外, 除了用边界条件(14)代替(13)外, 象前面用过的同样方法继续进行运算, 就得到

$$\phi_{mn} = \left(\frac{a}{2} \omega_{mn} W_{mn} \cos \omega_{mn} t \right) \sum_N \left[\sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} (-1)^{r-1} \right. \right.$$

$\cdot E_{m2s-1} A_{2s-1}^{(2r-1)}(q_N) \left. \right\} \cdot \frac{Gek_{2r-1}(\xi, -q_N)}{Gek'_{2r-1}(0, -q_N)} \cdot se_{2r-1}(\eta, -q_N) \right] \cdot F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb}$

$m = 1, 3, \dots$

(34-1)

$$\phi_{mn} = \left(\frac{a}{2} \omega_{mn} W_{mn} \cos \omega_{mn} t \right) \sum_N \left[\sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} (-1)^{r-1} \right. \right.$$

$\cdot E_{m2s} B_{2s}^{(2r)}(q_N) \left. \right\} \cdot \frac{Gek_{2r}(\xi, -q_N)}{Gek'_{2r}(0, -q_N)} \cdot se_{2r}(\eta, -q_N) \right] \cdot F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb}$

$m = 2, 4, \dots$

(34-2)

流体的动能便为

$$T_w = -\rho_w \left(\frac{a}{2} \omega_{mn} W_{mn} \cos \omega_{mn} t \right)^2 \frac{\pi pb}{4} \sum_N \left[\sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \right. \right.$$

$\cdot (-1)^{s-1} E_{m2s-1} A_{2s-1}^{(2r-1)}(q_N) \left. \right\}^2 \cdot \frac{Gek_{2r-1}(0, -q_N)}{Gek'_{2r-1}(0, -q_N)} \right] \cdot F_{nN}^2$

$m = 1, 3, \dots$

(35-1)

$$T_w = -\rho_w \left(\frac{a}{2} \omega_{mn} W_{mn} \cos \omega_{mn} t \right)^2 \frac{\pi pb}{4} \sum_N \left[\sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \right. \right.$$

$\cdot (-1)^{s-1} E_{m2s} B_{2s}^{(2r)}(q_N) \left. \right\}^2 \cdot \frac{Gek_{2r}(0, -q_N)}{Gek'_{2r}(0, -q_N)} \right] \cdot F_{nN}^2$

$m = 2, 4, \dots$

(35-2)

在空气中该振动板的动能是

$$T_P = \rho_P h \frac{apb}{8} (\omega_{mn} W_{mn} \cos \omega_{mn} t)^2 \sum_N F_{nN}^2$$

(36)

因此, 我们就得到质量增值系数如下:

$$\beta_{mn} = \left(\frac{\rho_w}{\rho_P} \right) \cdot \left(\frac{a}{h} \right) \frac{\pi}{2 \sum_N F_{nN}^2} \sum_N \left[\sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \cdot E_{m2s-1} A_{2s-1}^{(2r-1)}(q_N) \right\}^2 \right.$$

$\cdot \frac{-Gek_{2r-1}(0, -q_N)}{Gek'_{2r-1}(0, -q_N)} \left. \right] \cdot F_{nN}^2$

$m = 1, 3, \dots$

(37-1)

$$\beta_{mn} = \left(\frac{\rho_w}{\rho_P} \right) \cdot \left(\frac{a}{h} \right) \frac{\pi}{2 \sum_N F_{nN}^2} \sum_N \left[\sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} E_{m2s} B_{2s}^{(2r)}(q_N) \right\}^2 \right.$$

$\cdot \frac{-Gek_{2r}(0, -q_N)}{Gek'_{2r}(0, -q_N)} \left. \right] \cdot F_{nN}^2$

$m = 2, 4, \dots$

(37-2)

还必须注意：由该公式得到的值均指板的两边都与流体接触。

四、数字例子

在数值计算中，最好把 $-Gek(0, -q)/Gek'(0, -q)$ 展开成修正过的贝塞尔函数的乘积级数：

$$\frac{-Gek_{2r-1}(0, -q)}{Gek'_{2r-1}(0, -q)} = \sum_{t=1}^{\infty} A_{2t-1}^{(2r-1)}(q) (I_{t-1} \cdot k_t + I_t \cdot k_{t-1}) \quad (38-1)$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} A_{2t-1}^{(2r-1)}(q) \left\{ (2t-1) (I_{t-1} k_t - I_t k_{t-1}) + 2\sqrt{q} (I_{t-1} k_{t-1} + I_t k_t) \right\}$$

$$\frac{-Gek_{2r}(0, -q)}{Gek'_{2r}(0, -q)} = \sum_{t=1}^{\infty} B_{2t}^{(2r)}(q) (I_{t-1} k_{t+1} - I_{t+1} k_{t-1}) \quad (38-2)$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} B_{2t}^{(2r)}(q) \cdot 2t (I_{t-1} k_{t+1} + I_{t+1} k_{t-1} + 2I_t k_t)$$

这里

$$I = I(\sqrt{q})$$

$$K = K(\sqrt{q})$$

$$q = \begin{cases} q_n, \\ q_N, \end{cases}$$

对应于(30)式

对应于(37)式

4.1 纵向连续板

首先，我们必须决定式(23)中的富里叶系数 E_m 。对于数值计算例子，它们是用数值调和分析来计算的。

$A(q_n)$ 和 $B(q_n)$ 都从数学表⁽⁶⁾上读取，该表给出它们的值直到 $2r=14$ 或 $2r-1=15$ 和 $4q_n=100$ ，因而纵横比 $\alpha = b/a$ 和 n 被下列不等式限制：

$$q_n = \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \left(\frac{n}{\alpha} \right)^2 \leq 25$$

这样，在本文中对 $n=1$ 或 $n=2$ 和 $\alpha=1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 50$ ，进行了计算。对于 $\alpha=50$ ，计算其值是为了观察随着纵横比的增加其收敛性怎样。表1给出了计算结果。

表1 横向有限而纵向连续板的 $\beta_{mn} / [(\rho_w / \rho_P)(a/h)]$ 值

b/a	(m, n)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
1.0		0.50541	0.32807	0.32159	0.26763
2.0		0.67665	0.50541	0.34734	0.32158
3.0		0.74819	0.61114	0.35361	0.33957
4.0		0.78481	0.67665	0.35598	0.34734
6.0		0.81648	0.74819	0.35775	0.35361
8.0		0.83063	0.78381	0.35839	0.35598
10.0		0.83804	0.80398	0.35869	0.35712
50.0		0.85370	0.85121	0.35921	0.35914

注： $m=1$ 或 $m=2$ 对应于以纵向零节线或纵向1条节线； $n=1$ 或 $n=2$ 对应于横向零节线或横向1条节线。

4.2 半独立板

E_n 值和纵向连续板的相同。除此之外,必须把图 2b 给出的波形展开成富里叶正弦级数。对此,在图 2b 中的波形可以表示为:

$$Z_n(z) = \begin{cases} \sin \frac{n\pi z}{b} & \frac{p-1}{2}b < z < \frac{p+1}{2}b \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (39)$$

这里 $P=3,5,\dots$ 。如果我们使其周期为 2π ,也就是 $b = \frac{\pi}{p}$, 则(39)式给出

$$Z_n(z) = \begin{cases} \sin np\xi, & \frac{p-1}{2p}\pi < \xi < \frac{p+1}{2p}\pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (40)$$

这里 $\xi = \pi z / pb$ 。因此式(40)变成

$$Z_n(z) = \sum_N F_{nN} \sin \frac{N\pi z}{pb} = \sum_N F_{nN} \sin N\xi \quad (41)$$

这里

$$F_{nN} = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{p-1}{2p}\pi}^{\frac{p+1}{2p}\pi} \sin np\xi \cdot \sin N\xi d\xi \quad (42)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{P} & N = pn \\ \frac{2pn}{\pi \{ (pn)^2 - N^2 \}} \cdot \left\{ (-1)^n \sin \left(\frac{p-1}{2p} N\pi \right) - \sin \left(\frac{p+1}{2p} N\pi \right) \right\} & N \neq pn, \quad p=3,7,\dots \\ \frac{2pn}{\pi \{ (pn)^2 - N^2 \}} \left\{ \sin \left(\frac{p-1}{2p} N\pi \right) - (-1)^n \sin \left(\frac{p+1}{2p} N\pi \right) \right\} & N \neq pn, \quad p=5,9,\dots \end{cases}$$

由于借助数学用表^[6]知道了 $E_n, F_{nN}, A(q_N)$ 和 $B(q_N)$ 的值,现在我们就易于计算质量增值系数。表 2 给出 $p=3$ 和 $p=5$ 时的结果。计算纵横比大于 10 的 β 值如连续板一样 是为了观察其收敛性。

全部计算都由计算机系统 FACOM 230—28S 来完成。

表 2. 横向有限而纵向半有限板的 $\beta_{mn}/[(\rho_w/\rho_p)(a/h)]$ 值

(m,n)		(1, 1)		(1, 2)		(2, 1)		(2, 2)	
b/a	p	3	5	3	5	3	5	3	5
1.0		0.60705	0.61115	0.38238	0.38468	0.33123	0.33156	0.28098	0.28193
2.0		0.72669	0.72826	0.55227	0.55470	0.34946	0.34967	0.32659	0.32730
3.0		0.77547	0.77654	0.64527	0.64776	0.35438	0.35452	0.34184	0.34234
4.0		0.80048	0.80137	0.70126	0.70349	0.35635	0.35645	0.34856	0.34892
6.0		0.82438	0.82497	0.76203	0.76384	0.35789	0.35794	0.35410	0.35430
8.0		0.83516	0.83559	0.79246	0.79395	0.35846	0.35849	0.35624	0.35637
10.0		0.84099	0.84137	0.80986	0.81103	0.35873	0.35876	0.35728	0.35737
15.0			0.84782				0.35902		
20.0		0.85034				0.35911			
30.0					0.84736				0.35902
50.0				0.85151				0.35915	

注: $m=1$ 或 $m=2$ 对应于纵向零节线或纵向1条节线; $n=1$ 或 $n=2$ 对应于横向零节线或横向1条节线

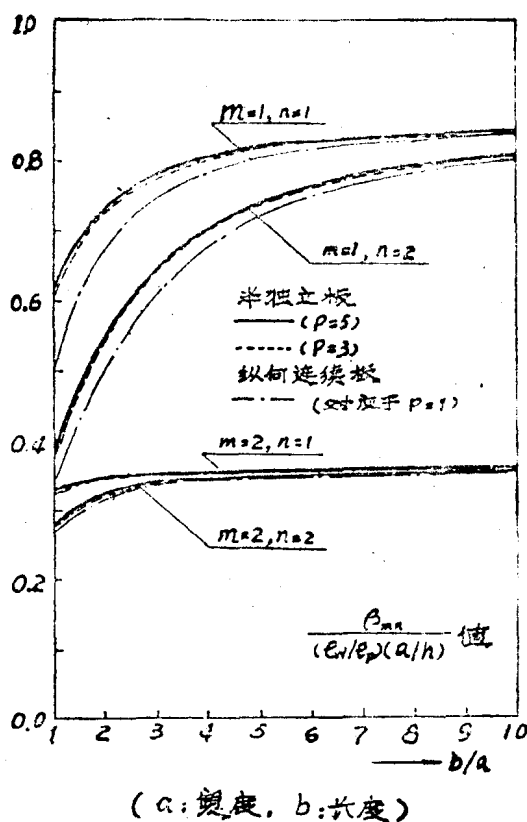


图 3 以 m, n 和 p 为参数的 $\beta_{mn}/[(\rho_w/\rho_p)(a/h)]$ 对 b/a 曲线图(根据表 1 和表 2 数据绘制)

五、结 束 语

表 1 和表 2 中给出的数据在图 3 中以 $\beta mn / [(\rho_w / \rho_p)(a/h)]$ 对 b/a 的曲线形式表示出来, 其参数为 m, n 和 p 。

从图 3 可以清楚地看到纵横比和振形对质量增值系数有重大影响。然而, 随着纵横比的增加, 其影响完全可不予考虑。

至于半独立板概念, 那么显而易见, 对于 p 大于 5 不必进行计算, 因为 $p=3$ 和 $p=5$ 之间的差别极小。也就是说, $p=\infty$ 的质量增值系数和 $p=5$ 的值非常接近。

附 录

$\sin \eta \cdot \cos\left(\frac{mn}{2} \cos \eta\right)$ 和 $\sin \eta \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2} \cos \eta\right)$ 直接展开成正弦椭圆函数的级数如下。

(符号的定义见[5])

按照英斯^[7]给出的公式 (2.1) 和 (2.2) 以及 $k = m\pi/2$ 和 $\theta = k^2/4$, 它们存在着以下的关系。

$$\begin{aligned} \cos(k \cos \eta \cdot \cos t) &= 2 \sum_n \frac{1}{ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right)} \cdot A_0^{(2n)}(\theta) \\ &\quad \cdot ce_{2n}(\eta, \theta) \cdot ce_{2n}(t, \theta) \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \sin(k \cos \eta \cos t) &= -k \sum_n \frac{1}{ce'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right)} \cdot A_1^{(2n+1)}(\theta) \\ &\quad \cdot ce_{2n+1}(\eta, \theta) \cdot ce_{2n+1}(t, \theta) \end{aligned} \quad (b)$$

以 0 代替 (a) 式中的 t , 就有

$$\cos(k \cos \eta) = 2 \sum_n \frac{A_0^{(2n)}(\theta) \cdot ce_{2n}(0, \theta)}{ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right)} \cdot ce_{2n}(\eta, \theta) \quad (c)$$

由此得

$$\begin{aligned} \sin \eta \cos(k \cos \eta) &= 2 \sum_n \frac{1}{ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right)} \cdot A_0^{(2n)}(\theta) \\ &\quad \cdot ce_{2n}(0, \theta) \cdot \sin \eta \cdot ce_{2n}(\eta, \theta) \end{aligned} \quad (d)$$

此处利用文献[7]中给出的公式 (3.7) 就有

$$\begin{aligned} \sin \eta \cdot ce_{2n}(\eta, \theta) &= \frac{1}{2} \sum_r \sum_s B_{2r+1}^{(2r+1)}(\theta) \left\{ A_{2r}^{(2n)}(\theta) \right. \\ &\quad \left. - A_{2r+2}^{(2n)}(\theta) \right\} \cdot se_{2r+1}(\eta, \theta) \end{aligned} \quad (e)$$

在 (e) 式中我们觉察到 $se_{2r+1}(\eta, \theta)$ 可以展开成 $se_{2r+1}(\eta, -q_n)$ 级数, 也就是利用了关系式

$$se_{2r+1}(\eta, \theta) = \sum_u B_{2u+1}^{(2r+1)}(\theta) \sin(2u+1)\eta$$

$$\sin(2u+1)\eta = (-1)^u \sum_r (-1)^r A_{2u+1}^{(2r+1)}(q_n) \cdot se_{2r+1}(\eta, -q_n)$$

可得到

$$se_{2r+1}(\eta, \theta) = \sum_r \sum_u B_{2u+1}^{(2r+1)}(\theta) (-1)^u (-1)^r \cdot A_{2u+1}^{(2r+1)}(q_n) \cdot se_{2r+1}(\eta, -q_n) \quad (f)$$

最后, 将(e)和(f)一起代入(d)中可得关系式

$$\begin{aligned} \sin \eta \cdot \cos(k \cos \eta) &= \sum_r \sum_l \sum_n \frac{1}{ce_{2n}(\frac{\pi}{2}, \theta)} \cdot A_0^{(2n)}(\theta) \cdot ce_{2n}(0, \theta) \\ &\cdot \left[\sum_c B_{2c+1}^{(2l+1)}(\theta) \left\{ A_{2c}^{(2n)}(\theta) - A_{2c+2}^{(2n)}(\theta) \right\} \right] \\ &\cdot \left[\sum_u B_{2u+1}^{(2l+1)}(\theta) \cdot (-1)^u (-1)^r A_{2u+1}^{(2r+1)}(q_n) \right] \\ &\cdot se_{2r+1}(\eta, -q_n) \end{aligned} \quad (g)$$

将(g)式代入本文中的(22-1)式可精确地确定C值。

从(b)式开始, 经过如上述类似的数学运算以后, 我们可将 $\sin \eta \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2} \cos \eta\right)$ 展开成 $se_{2r+2}(\eta, -q_n)$ 级数。这样, 我们也就能确定(22-2)式中的C值了。

然而, 我们感到表达式(g)用于数值计算太严格了, 而且此方法更有可能造成误差, 因此, 作者选用了数值调和与分析来代替(g)式。

参 考 文 献

- [1] Lamb, H.: "On the Vibrations of an Elastic Plate in Contact with Water", Proc. of Roy. Soc. (London) Ser. A, 1921.
- [2] Maclachlan, N. W.: "The Accession to Inertia of Flexible Discs Vibrating in a Fluid", Proc. of Phys. Soc. 1932.
- [3] Kito, F.: "On the added Mass of Flat plates Vibrating in Water," (in Japanese), Zatsan No. 266, Zosen Kyokai of Japan, May, 1944.
- [4] Lindholm, U. S., Kana, D. D., Chu, W. H., and Abramson, H. N.: "Elastic Vibration Characteristics of Cantilever Plates in Water", Journal of Ship Research, Vol. 9, No. 1, SNAME, June, 1965.
- [5] Maclachlan, N. W.: "Theory and Application of Mathieu Functions", Dover Publication, Inc., 1964.
- [6] "Tables Relating to Mathieu Functions", Prepared by the Computation Lab., NAML, National Bureau of Standard, U. S. A., and Published by Columbia University Press in 1951.
- [7] Ince, E. L.: "Relations between the Elliptic Cylinder Functions", Proc. Roy. Soc. (Edinburgh) Vol. 59, 1939, [王月琴译 潘介人校]