21世纪普通高等教育规划教材 · 公共基础课系列

21 SHI JI PU TONG GAO DENG JIAO YU GUI HUA JIAO CAI · GONGGONG JICHUKE XILIE

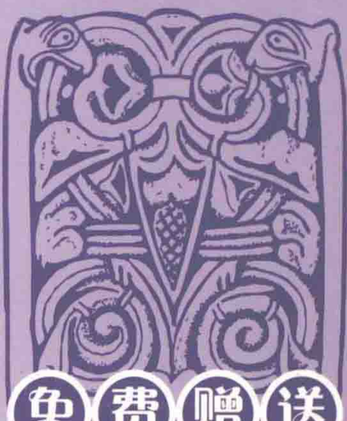
Exercises for Differential and Integral Calculus (3rd Edition)

微积分学习指导

（第三版）

张军好 主编

冉兆平 樊 艮 江小琴 副主编



免费赠送

上海财经大学出版社

育规划教材·公共基础课系列

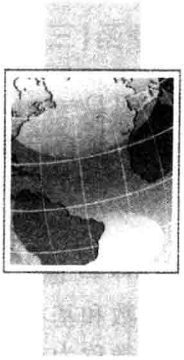
微积分学习指导

（第三版）

张军好 主 编
冉兆平 樊 艮 江小琴 副主编

上海财经大学出版社

目　录



第 1 章 函数 极限 连续

一 基本内容

(一)函数

1 函数的定义

设变量 x 在某个实数集 D 中取定一数值时，另一变量 y 按照一定规则总有一确定的数值与其对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$. 称 x 为自变量，y 为因变量，实数集 D 为定义域.

2 函数的几种特征

(1)单调性　设 $y=f(x)$在区间 I 上有定义. 若对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 上单调递增；反之，若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 上单调减少.

(2)有界性　设 $f(x)$在实数域 D 内有定义，数集 $X\subset D$，若存在正数 M，使得与任一 $x\in X$ 所对应的函数值都满足不等式 $|f(x)|<M$，则称 $f(x)$在 X 上有界，否则称 $f(x)$在 X 上无界.

(3)奇偶性　若 $f(x)$的定义域 D 对称于原点，对任意 $x\in D$ 恒成立

$f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；

$f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数.

(4)周期性　设 $f(x)$在 D 上有定义，若存在一个不为零的数 l，使得对任一 $x\in D$，有$(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$恒成立，则称 $f(x)$是以 l 为周期的周期函数，通常周期是指最小正周期.

3 反函数

在函数 $y=f(x)$中，若将 y 当作自变量，x 当作因变量，则由 $y=f(x)$确定的函数 $x=\varphi(y)$，称为 $y=f(x)$的反函数.

4 复合函数

若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，$u\in D_1$，而 u 又是 x 的函数，$u=\varphi(x)$，$x\in D_2$，且 $D=\{x|x\in D_2,\varphi(x)\in D_1\}\neq\varnothing$，则函数 $y=f[\varphi(x)]$，$x\in D$ 称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，称 u 为中间变量.

5 初等函数

幂函数、指数函数、三角函数以及它们的反函数都称为基本初等函数，由常数和基本初等函数经有限次四则运算和有限复合步骤所形成的，并且可用一个式子表示的函数称为初等函数.

（二）极限

1 极限的定义

(1)设数列 x_n 与常数 a 有如下关系：对任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称数列 x_n 收敛于 a，记作：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2)对任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，在 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-a|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时以 A 为极限，记作：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(3)对任意给定的正数 ε，总存在正数 X，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限为 A，记作：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

2 极限的四则运算

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有 $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；$\lim[f(x)g(x)]=AB$；$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq0)$.

3 极限存在准则

(1)单调有界数列必存在极限；

(2)设 x_n,y_n,z_n，为三个数列$(n=1,2,\cdots)$，若 $y_n<z_n<x_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，则数列 z_n 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，此定理称为夹逼定理，此定理同样适用于函数的极限.

4 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

5 当 $x\to0$ 时的等价无穷小量

$\sin x\sim x$；$\tan x\sim x$；$\operatorname{th}x\sim x$；$\operatorname{sh}x\sim x$；

$\arcsin x\sim x$；$\arctan x\sim x$；$e^x-1\sim x$；

$\ln(x+1)\sim x$；$(1+x)^2-1\sim 2x$；$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$

(三)函数的连续性

1 函数在一点的连续性

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续.

2 函数的间断点的两种类型

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点间断，但 $f(x^-)$ 与 $f(x^+)$ 都存在，则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，否则就称为第二类间断点.

3 函数的间断点的四种名称

(1)设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$，但 $f(x_0)$ 不存在或 $f(x_0)\neq A$，则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的可去型间断点；

(2)设 $f({x_0}^-)$ 与 $f({x_0}^+)$ 都存在，但 $f({x_0}^-)\neq f({x_0}^+)$，则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的跳跃型间断点；

(3)设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$，则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点；

(4)设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 因振荡而不存在，则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的振荡间断点.

4 初等函数的连续性

设 $f(x)$ 是定义在 I 上的初等函数，则 $f(x)$ 在 I 上连续.

5 闭区间上连续函数的性质

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则有

(1)最值定理　$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值和最小值；

(2)介值定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值分别为 m 与 M，c 是介于 m 与 M 之间的任一确定的数，则在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=c$.

二　习题与解答

1. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg(x^2)$，$g(x)=2\lg x$

解： 函数 $f(x)=\lg(x^2)$ 的定义域为 $x\neq 0$，而函数 $g(x)=2\lg x$ 的定义域为 $x>0$，由于定义域不同，所以它们不是同一个函数.

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

解： 无论自变量 x 取任何实数，函数 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 的表达式都可以化为 $g(x)=|x|$，由于它与函数 $f(x)=x$ 的表达式即对应法则不相同，于是它们不是同一个函数.

(3) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，$g(x)=1$

解： 无论自变量 x 取任何实数，都有关系式 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，所以函数 $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，$g(x)=1$ 的定义域相同，皆为全体实数，且表达式即对应法则也相同，于是它们是同一

个函数.

(4) $f(x)=x+1, g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

解:函数 $f(x)=x+1$ 的定义域为全体实数,而函数 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $x\neq 1$,由于定义域不同,于是它们不是同一个函数.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$

解:要使 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 有意义,当且仅当 $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0$,即 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$,所以定义域 $D(f)=[-1,0)\cup(0,1]$.

(2) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$

解:要使 $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$ 有意义,当且仅当 $x^2-3x+2\neq 0$,即 $x\neq 1$ 且 $x\neq 2$,所以定义域 $D(f)=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

(3) $y=\arcsin(x-3)$

解:要使 $y=\arcsin(x-3)$ 有意义,当且仅当 $|x-3|\leqslant 1$,即 $2\leqslant x\leqslant 4$,所以定义域 $D(f)=[2,4]$.

(4) $y=\dfrac{1}{\lg(x-5)}$

解:要使 $y=\dfrac{1}{\lg(x-5)}$ 有意义,当且仅当 $x-5>0$ 且 $\lg(x-5)\neq 0$,即 $x>5$ 且 $x\neq 6$,所以定义域 $D(f)=(5,6)\cup(6,+\infty)$.

(5) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$

解:要使 $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$ 有意义,当且仅当 $\dfrac{5x-x^2}{4}>0$ 且 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$,即 $1\leqslant x\leqslant 4$,所以定义域 $D(f)=[1,4]$.

(6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

解:要使 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 有意义,当且仅当 $4-x^2>0$,即 $-2<x<2$,所以定义域 $D(f)=(-2,2)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0 & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$,求 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right), f\left(\dfrac{\pi}{4}\right), f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right), f(-2)$.

解: $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}, f(-2)=0.$$

4. 将下列函数分解为基本初等函数的复合形式：

(1) $y=(e^x)^2$　　(2) $y=e^{x^2}$

(3) $y=(\ln x^2)^3$　　(4) $y=3^{\ln x^2}$

(5) $y=\ln\tan 2x$　　(6) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$

解：(1) $y=u^2, u=e^x$　　(2) $y=e^u, u=x^2$

(3) $y=u^3, u=\ln v, v=x^2$　　(4) $y=3^u, u=\ln v, v=x^2$

(5) $y=\ln u, u=\tan v, v=2x$　　(6) $y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=\sqrt{x}$

5. 已知 $y=\sqrt{1+u^2}, u=\sin v, v=\lg x$，将 y 表示为 x 的函数.

解：$y=\sqrt{1+\sin^2(\lg x)}$.

6. 观察并写出下列极限值.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$

解：(1)1　　(2)0　　(3)0　　(4) $-\infty$

7. 用左、右极限讨论下列极限：

(1) $f(x)=\begin{cases} x-1 & x\leqslant 0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} 2^x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ 1+x^2 & x<0 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x^2)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}2^x=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

8. 函数 $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ 在什么变化过程中是无穷大量？又在什么变化过程中是无穷小量？

解：函数 $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ 在 $x\to 1$ 的过程中是无穷大量，在 $x\to\infty$ 的过程中是无穷小量.

9. 当 $x\to 0$ 时，下列变量中哪些是无穷小量？

$100x^2$，$\sqrt[3]{x}$，$\frac{2}{x}$，$\frac{x}{0.01}$，$\frac{x}{x^2}$，$\frac{x^2}{x}$，$x^2+0.1x$，$\frac{1}{2}x-x^2$

解：当 $x\to 0$ 时，$100x^2$，$\sqrt[3]{x}$，$\frac{x}{0.01}$，$\frac{x^2}{x}$，$x^2+0.1x$，$\frac{1}{2}x-x^2$ 是无穷小量.

10. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to -2}(3x^2-5x+2)$

解：$\lim\limits_{x\to -2}(3x^2-5x+2)=3\times(-2)^2-5\times(-2)+2=24$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x-3}$

解：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^2+5}{2-3}=-9$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x+5}$

解：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x+5}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^2-4}{2+5}=0$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3}(\sqrt{1+3x}+1)=\dfrac{2}{3}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\dfrac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-3x^2}{1+2x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-3x^2}{1+2x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}-3}{\dfrac{1}{x^2}+2}=-\dfrac{3}{2}$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1)}-\sqrt{x^2-x+1})$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=1$$

(8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

解：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=2$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}{5}=\dfrac{1}{5}$

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{1}{x}\right)^{30}\left(3-\dfrac{2}{x}\right)^{20}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{20}$

(12) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$

解: $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{2}{3}$

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)=2$

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n-1)(1+n-1)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{2n}=\dfrac{1}{2}$

11. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$

解: $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$(无穷小量和有界函数之积仍是无穷小量)

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0$(无穷小量和有界函数之积仍是无穷小量)

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3+1}(3+\cos x)$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3+1}(3+\cos x)=0$(无穷小量和有界函数之积仍是无穷小量)

12. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$,试求 a,b.

解:因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x+(1-b)}{x+1}=0$,所以 $1-a=0$ 且 $a+b=0$,故 $a=1,b=-1$.

13. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

解: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$

解:令 $\arcsin x=t$,则 $x=\sin t$,当 $x\to0$ 时,$t\to0$,所以

$$\lim_{x\to0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\lim_{t\to0}\frac{2t}{3\sin t}=\frac{2}{3}$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2$

(4)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}=\dfrac{3}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{4x}{\sin x}=\dfrac{3}{4}$

14. 计算下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}$

解:$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^4=e^4$

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}-1}$

解:$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(-\dfrac{2}{x}\right)\right]^{-\frac{x}{2}}\right\}^{-1}\cdot\left[1+\left(-\dfrac{2}{x}\right)\right]^{-1}=e^{-1}$

(3)$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

解:$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=e^2$

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

解:$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}=e$

15. 利用等价无穷小的性质,求下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}$

解:当 $x\to 0$ 时,$\tan 3x\sim 3x$,所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$

解:当 $x\to 0$ 时,$\tan 2x\sim 2x$,$\sin 5x\sim 5x$,所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+\sin^2 x}{\sin 2x-x^3}$

解:当 $x\to 0$ 时,$3x+\sin^2 x\sim 3x$,$\sin 2x-x^3\sim 2x$,

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+\sin^2 x}{\sin 2x-x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$

(4)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

解:当 $x\to 0$ 时,$\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$,$\sin^3 x\sim x^3$,

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

(5)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$

解:当 $x\to0$ 时,$\ln(1+2x)\sim2x$,$\sin3x\sim3x$,

所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$

(6)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+x}$

解:当 $x\to0$ 时,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$x^2+x\sim x$,

所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}x=0$

16. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x<0\\ k & x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x}+1 & x>0\end{cases}$,问常数 k 取何值时,函数 $f(x)$在其定义域内连续?为什么?

解:因为$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+1\right)=1$,所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$,又 $f(0)=k$,要函数 $f(x)$在定义域内连续,必须函数 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,即有$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$,故 $k=1$.

17. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<0\\ a+x & x\geqslant0\end{cases}$,应当怎样选择数 a,使得 $f(x)$成为在$(-\infty,+\infty)$内的连续函数.

解:因为$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^x=1$,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+x)=a$,又 $f(0)=a$,要使函数 $f(x)$在定义域$(-\infty,+\infty)$内连续,必须函数 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,即有$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$,故 $a=1$.

18. 指出下列函数的间断点:

(1)$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

解:$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$的间断点为 $x=0$

(2)$f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

解:$f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$的间断点为 $x=-1$,$x=-2$

(3)$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x-1} & x\neq1\\ 0 & x=1\end{cases}$

解:$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x-1} & x\neq1\\ 0 & x=1\end{cases}$的间断点为 $x=1$

(4)$f(x)=\begin{cases}3x-1 & x\geqslant1\\ \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} & x<1\end{cases}$

解：$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x\geqslant 1 \\ \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} & x<1 \end{cases}$ 的间断点为 $x=1$

19. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{e^t+1}{t}$

解：$\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{e^t+1}{t}=\dfrac{\lim\limits_{t\to 2}e^t+1}{\lim\limits_{t\to 2}t}=\dfrac{e^2+1}{2}$

(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3$

解：$\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3=\left(\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}\sin 2\alpha\right)^3=1$

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{9}}\ln(2\cos 3x)$

解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{9}}\ln(2\cos 3x)=\ln\left(2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{9}}\cos 3x\right)=\ln 1=0$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 5x}\times\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 5x}\times\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{20}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+3\tan^2 x)^{\frac{1}{3\tan^2 x}}\right]^3=e^3$

20. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证明：令 $f(x)=x^5-3x-1$，则 $f(1)=-3<0, f(2)=25>0$，

所以 $f(1)\cdot f(2)<0$

故由零点定理知，$f(x)=x^5-3x-1=0$ 至少有一根介于 1 和 2 之间.

21. 证明方程 $x=a\sin x+b$（其中 $a>0, b>0$）至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

证明：令 $f(x)=x-a\sin x-b$，则

$f(0)=-b<0, f(a+b)=a+b-a\sin(a+b)-b>0$，

所以 $f(0)\cdot f(a+b)<0$

故由零点定理知，$f(x)=x-a\sin x-b=0$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.

22. 选择题

(1) 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,4]$，则 $f(x^2)$ 的定义域是（　　）.

A. $[0,4]$　　B. $[-2,2]$

C. $[0,16]$　　D. $[0,2]$

解：要使 $f(x^2)$ 有意义，则必须满足 $0\leqslant x^2\leqslant 4$，即 $x\in[-2,2]$，所以选 B.

(2) 设 $f(x)=4x^2+bx+5$，若 $f(x+1)-f(x)=8x+3$，则 b 应为（　　）.

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

解: 因为 $f(x+1)-f(x)=8x+b+4=8x+3$,从而 $b=-1$,所以选 B.

(3)设函数 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的任何不恒等于零的函数,则(　　)必是偶函数.

A. $F(x)=f(x)-f(-x)$　　B. $F(x)=f(x)+f(-x)$

C. $F(x)=f(-x)-f(x)$　　D. $F(x)=f(-x)+f(-x)$

解: 只有 B 满足 $F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$,所以选 B.

(4)函数 $y=\lg(x-1)$ 在区间(　　)内有界 .

A. $(1,+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

解: 有界等价于既有上界又有下界,所以选 D.

(5)函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义是其在点 x_0 处有极限的(　　).

A. 充分而非必要条件　　B. 必要而非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 无关条件

解: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处极限是否存在与它在点 x_0 处有无定义没有必然联系，所以选 D.

(6)已知极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x}+ax\right)=0$,则常数 $a=$(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

解: 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x}+ax\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a+1)x^2+2}{x}=0$,从而 $a=-1$,所以选 A.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$ 的值为(　　).

A. 1　　B. ∞　　C. 不存在　　D. 0

解: 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$,所以选 D.

(8)当 $x\to 0$ 时,x^2 是 $x-\sin x$ 的(　　).

A. 低阶无穷小　　B. 高阶无穷小

C. 等价无穷小　　D. 同阶但非等价的无穷小

解: 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{-\dfrac{1}{6}x^3}=\infty$,从而 x^2 是 $x-\sin x$ 的低阶无穷小，所以选 A.

(9)当 $x\to 0$ 时,变量(　　)是无穷小量.

A. $\ln|\sin x|$　　B. $\cos\dfrac{1}{x}$　　C. $\sin\dfrac{1}{x}$　　D. $e^{-\frac{1}{x^2}}$

解: 因为 $\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$,从而当 $x\to 0$ 时,$e^{-\frac{1}{x^2}}$ 是无穷小量,所以选 D.

(10)下列函数在有定义的区间内不是连续函数的是(　　).

A. $y=\sqrt{2-\cos x}$　　B. $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$

C. $y=e^{-\sqrt{1+\sin x}}$　　D. $y=\ln(1+x^2+e^x)$

解: 初等函数在有定义的区间里连续,B 是分段函数,有间断点，所以选 B.

23. 填空题

(1)数列$\{x_n\}$有界是数列$\{x_n\}$收敛的________条件，数列$\{x_n\}$收敛是数列$\{x_n\}$有界的________条件.

(2)$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有界是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的________条件，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在是$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域内有界的________条件.

(3)$f(x)$当$x\to x_0$时的右极限$f(x_0^+)$及左极限$f(x_0^-)$都存在且相等是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的________条件.

(4)函数$y=f(x)$与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图形关于________对称.

(5)设$f(x)=\begin{cases} e^x & x\leqslant 0 \\ ax+b & x>0 \end{cases}$，则$f(0^+)=$________，$f(0^-)=$________，当$b=$________时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

(6)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=$________.

(7)当$x\to x_0$时，$f(x)$为无穷小，则$\dfrac{1}{f(x)}$为________.

(8)若函数$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan ax}{x} & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$在$x=0$处连续，则$a$必等于________.

(9)函数$f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$的连续区间是________.

(10)函数$f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$的间断点是________.

解:(1)必要　充分　(2)必要　充分　(3)充分必要　(4)直线$y=x$　(5)b　1　1　(6)2　(7)无穷大　(8)2　(9)$(1,2)\cup(2,+\infty)$　(10)$x=0,\pm 1$

第 2 章 导数与微分

一　基本内容

(一)导数

1 导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义,若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在且为有限数,则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处有导数. $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数用以下四种符号表示为

$$f'(x_0),\ y'\Big|_{x=x_0},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0},\ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$$

若记自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$,函数的增量 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$,则

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x+x_0)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2 导数的几何意义

$f'(x_0)$ 是曲线 $y-f(x)=0$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线的斜率.

3 导数的物理意义

$s'(t_0)$ 是以 $s=s(t)$ 为路程做变速直线运动的物体在 t_0 时刻的速度;

$v'(t_0)$ 是以 $v=v(t)$ 为速度做变速直线运动的物体在 t_0 时刻的加速度.

4 左导数和右导数

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$