

金属在紅外波段的表面电阻和 电磁波的穿透系数^{* 1)}

郝 柏 林

提 要

本文中对任意费米面求出了金属在紅外波段的表面电阻, 所得表达式适用于各种性质的趋肤效应(正常、反常和中间情况)。发现在反常趋肤效应时, 电场的一个分量衰减很慢, 它所决定的电磁波穿透系数可能比通常已知者大几个数量级。建议利用此效应发展测定超纯金属纯度的无接触测量方法。此外, 还考虑了有垂直磁场存在时的表面电阻。

一、引 言

金属的基本光学性质可用两个参数描述。通常在金属光学中采用的参数是折射率和吸收系数, 或复数介电常数的实部与虚部^[2]。这些参数的导入基于欧姆定律

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (1)$$

等局域性(“微分”)关系式。1947 年 Pippard^[3] 指出, 在低温与高频时, 电磁波的趋肤深度 δ 远小于电子的平均自由程 l , 金属表面层内电场分布极不均匀, (1) 式必须代之以非局域性的积分关系

$$j_\alpha(\mathbf{r}) = \int K_{\alpha\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') E_\nu(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (2)$$

(本文各式中都按两次重复的希腊字母足标对 x, y, z 或 x, y 求和)。局域性的关系式导至正常趋肤效应理论, 而非局域性的(2)式导至所谓反常趋肤效应理论^[4]。1953 年 Dingle 以后者为基础, 发展了金属紅外光学性质的理论^[5], 但是他的计算局限于电子的平方色散律。最近几年关于金属费米面的大量理论和实验工作表明, 多数金属的费米面都相当复杂, 平方色散律反而是较少的。Каганов 和 Слезов^[6] 首先尝试考虑任意费米面的紅外金属光学, 但所用方法不能充分反映紅外波段的基本特点, 因此所得结果是不完整的, 尤其未能阐明电场的分布情况。

本文中建议一种简单的按小参数展开的方法。第三节中用此种方法将基本微分积分方程简化为微分方程, 对任意费米面和任意的 $\delta:l$ 比值求出表面电阻张量。第四节中从电场的分布出发, 讨论金属在低温下对紅外光的相对透明效应。第五节中推广此法到有磁场存在时的一个特例。

* 1961 年 5 月 22 日收到。

1) 本文部分结果曾向第七次全苏低温物理会议(1960)提出报告^[1]。

二、基本方程和一般討論

考虑半无限金属, z 軸指向金属内部. 入射电磁波的时间因子取 $e^{i\omega t}$. 我們用自洽方法求解: 先在給定的电场 $\mathbf{E}(z)$ 中以 Boltzmann 輸运方程决定电子的分布函数, 再从 Maxwell 方程求电场, 而电流密度又通过分布函数表达. 这样, 基本方程組是:

$$i\omega f + \frac{\partial f}{\partial z} v_z + \frac{\hat{W}}{\tau_0} f = e\mathbf{v}\mathbf{E}(z) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{dz^2} = \frac{4\pi\omega i}{c^2} \mathbf{j}(z), \quad (4)$$

$$j_z = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{j}(z) = -\frac{2e}{h^3} \int \mathbf{v} f(z, \mathbf{v}) d\tau, \quad d\tau = dp_x dp_y dp_z. \quad (6)$$

方程(3)是对电场綫性化了的 Boltzmann 方程, f 是平衡費米分布函数 $f_0 = \left[1 + \exp\left(\frac{\epsilon - \epsilon_F}{kT}\right)\right]^{-1}$ 的綫性修正項. 边界条件是: 来自金属内部的电子在表面上受到漫反射, 而逸向金属深处的电子遵从平衡費米分布, 即

$$\left. \begin{aligned} f(0, \mathbf{v}) &= 0, & v_z > 0, \\ f(\infty, \mathbf{v}) &= 0, & v_z < 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

以后将认为碰撞算符 $\hat{W} \equiv 1$, 也就是說, 导入弛豫時間 τ_0 . 在射頻和反常趋肤效应情况下导入 $\tau_0(\mathbf{p})$ 的可能性已由 Азбель 和 Канер^[7] 証明, 而在其它频段, 这仍是現有理論中的一个重要假定.

方程(4)中省略了 Maxwell 位移电流. 这是因为直到光頻范围 $\left(\frac{\delta\omega}{c}\right)^2 \ll 1$, 也就是說, 金属内电磁波的“波长” δ 远小于真空中的波长 $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$. 电场应滿足的边界条件是显而易見的:

$$\mathbf{E}(z)|_{z=0} = \mathbf{E}(0), \quad \mathbf{E}(\infty) = 0. \quad (8)$$

方程(3)–(8)是决定金属内电场分布 $\mathbf{E}(z)$ 和电子分布函数 $f_0 + f$ 的完全方程組. 它的性質取决于所研究的問題的物理情景, 我們先作一般討論.

方程(3)的解永远可写作如下的符号形式:

$$f = \hat{L}^{-1}(\mathbf{v}\mathbf{E}), \quad (9)$$

其中 $\hat{L}$ 是作用于 z 的算符. 代入方程(6)和(4)后得到决定 $\mathbf{E}(z)$ 的方程:

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{dz^2} = -\frac{8\pi e\omega i}{c^2 h^3} \int \mathbf{v} \hat{L}^{-1}(\mathbf{v}\mathbf{E}(z)) d\tau. \quad (10)$$

考虑三种不同情况:

(一) 平均自由程 l 是具有长度量綱的諸参数(如趋肤深度 δ , 薄膜厚度 d , 有磁場存在时的迴旋半径 r 等)中最小者, 因此在电子的自由程所及的区域内, 可以认为电场的空間分布是均匀的. 此时 $\hat{L}$ 中不含有 $\frac{\partial}{\partial z}$, 而 $\hat{L}^{-1}$ 是相乘算符, 可以导入普通的电导张

量。形象地说,这时有关各处电场分布的“信息”在电子的频繁碰撞中散失,“本地”电子对“外地”电场变化“情况不明”,因而类似(1)式的局域性关系式得以成立。基本方程(10)简化为二阶微分方程。这就是正常趋肤效应理论。

(二) 电场的空间分布极不均匀(反常趋肤效应 $\delta \ll l$, 低温下超薄或超纯金属膜 $d \ll l$ 等)。电子平均自由程所及区域内电场的变化都对电流密度有贡献,因此必须以积分关系(2)代替欧姆定律(1)。积分核 $K(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 描述电场变化“信息”借电子运动的传布,自然应在 $\sim l$ 的范围外衰减。这时 $\hat{L}$ 是 z 的微分算符,而 $\hat{L}^{-1}$ 是积分算符。基本方程(10)是积分微分方程^[3,4]。

(三) 虽然电场的空间分布仍不均匀,但 $\frac{\partial}{\partial z}$ 前出现了新的小参数,因而 $\hat{L}^{-1}$ 实际上是按此参数的展开式。方程(10)形式上成为无限阶微分方程,但小参数的存在使高阶导数失掉作用。在讨论金属的光学性质时常遇到类似情况。这时起主要作用的是电场的迅速变化,长度参量 δ 与 l 的关系退居次要地位。换言之,每一电场变化周期内电子移动的距离成为最小的长度参量:

$$\frac{v}{\omega} \ll \delta, l, r \dots$$

因此可能不考虑趋肤效应的性质,对任意的 $\delta:l$ 比值求解。

如果不考虑内光电效应,即取电磁场的频率上限为 $\sim \frac{\epsilon_0}{\hbar}$ (ϵ_0 ——费米能量),则对不少金属所涉及的频率处于红外波段。

本文的目的就是探讨最后一种情况。

三、表面电阻张量

由于金属的基本光学“常数”都可以通过表面电阻的实部和虚部表示^[2],我们只须求出红外波段表面电阻张量的表达式。

引入新的变量 $\zeta: z = \delta\zeta$, 其中参数 δ 具有长度的量纲,它的严格定义将在后面给出((23)式)。再导入新的分布函数 $\bar{\psi}(\zeta, \mathbf{v}): f(z, \mathbf{v}) = \frac{e}{(i\omega + \nu_0)} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \bar{\psi}(\zeta, \mathbf{v})$, 其中 $\nu_0 = \frac{1}{t_0}$ 表征电子的碰撞频率。基本方程组可改写为如下形式:

$$\left(1 + \gamma \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \psi = \mathbf{v} \mathbf{E}(\zeta), \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi(0, \mathbf{v}) &= 0, & v_z > 0, \\ \psi(\infty, \mathbf{v}) &= 0, & v_z < 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{d\zeta^2} = \frac{4\pi\omega\delta^2 i}{c^2} \mathbf{j}, \quad (13)$$

$$\mathbf{j} = \frac{2e^2}{(i\omega + \nu_0)\hbar^3} \oint_{\epsilon=\epsilon_0} \frac{\mathbf{v}}{\nu} \psi(\zeta, \mathbf{v}) dS. \quad (14)$$

方程(14)中已利用简并费米分布的性质 $\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \approx -\delta(\epsilon - \epsilon_0)$ 将积分变换成费米面上的

表面积分。

复数 $\gamma = \frac{v_z}{(i\omega + v_0)\delta}$ 或 $\gamma_0 = \frac{v_0}{(i\omega + v_0)\delta}$ (v_0 ——某个特征速度) 是我们的基本小参数。它包含两个实参数:

$$\frac{v_0}{\omega\delta^{(0)}} \ll 1, \quad \frac{v_0}{\omega} = \frac{1}{\omega t_0} \ll 1 \quad (15)$$

($\delta^{(0)}$ 的定义见 (23) 式), 它们的相互关系取决于趋肤效应的性质。在反常趋肤效应时 $\frac{v_0}{\omega\delta^{(0)}} \gg \frac{v_0}{\omega}$, 正常趋肤效应时反之。

将方程(11)的解写成展开形式:

$$\psi = \left(1 + \gamma \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^{-1} \mathbf{vE} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \gamma^n \mathbf{vE}^{(n)}(\zeta). \quad (16)$$

为了满足边界条件(12), 我们给(16)添加齐次方程的解 $Ae^{-\frac{\zeta}{\tau}}$, 并要求常数 A 的选择保证边界条件在每一级近似都被满足。如此获得的解是

$$\psi(\zeta, \mathbf{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \gamma^n \mathbf{v} [E^{(n)}(\zeta) - S(v_z) E^{(n)}(0) e^{-\frac{\zeta}{\tau}}], \quad \left. \begin{aligned} S(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

顺便指出, 直接把方程(11)的准确解写成积分形式, 再在积分符号下展开 $E(\zeta)$, 也能得到展开式(17)。代入(13)式后得

$$E''_{\mu}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} [K_{\mu\nu(2n)} E_{\nu}^{(2n)}(\zeta) - (-1)^n G_{\mu\nu n}(\zeta) E_{\nu}^{(n)}(0)], \quad (18)$$

$$K_{\mu\nu n} = \frac{8\pi e^2 \delta^2 \omega i}{(i\omega + v_0) c^2 h^3} \oint_{\varepsilon=\varepsilon_0} \frac{v_{\mu} v_{\nu}}{\nu} \gamma^n dS, \quad (19)$$

$$G_{\mu\nu n}(\zeta) = \frac{8\pi e^2 \delta^2 \omega i}{(i\omega + v_0) c^2 h^3} \oint_{\varepsilon=\varepsilon_0} S(v_z) \frac{v_{\mu} v_{\nu}}{\nu v_n} \gamma^n e^{-\frac{\zeta}{\tau}} dS. \quad (20)$$

张量 $K_{\mu\nu n}$ 和 $G_{\mu\nu n}(\zeta)$ 具有以下性质:

(一) $K_{\mu\nu(2n+1)} \equiv 0$, 因为费米面对称中心 $\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(-\mathbf{p})$;

(二) $G_{\mu\nu n}^{(K)}(\zeta) = (-1)^K G_{\mu\nu(n-K)}(\zeta)$, (21)

在解微分方程(18)时要利用这个微分关系;

(三) 具有求和足标 n 的 $K_{\mu\nu n}$ 和 $G_{\mu\nu n}(\zeta)$ 数量级为 γ_0^n 。

一般说来, 不能将全部张量 $K_{\mu\nu n}$ 和 $G_{\mu\nu n}(\zeta)$ 都同时对角化, 而只能在 $K_{\mu\nu 0} = K_{\mu 0} \delta_{\mu\nu}$ 的坐标系中运算。 $K_{\mu 0}$ 中还包含着未定义的参数 δ 。我们要求

$$K_{\mu 0} = 1, \quad (22)$$

由此得 δ 的定义关系式:

$$\delta \equiv \delta_{\mu} = \delta_{\mu}^{(0)} \left(1 - i \frac{v_0}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \delta_{\mu}^{(0)} = \frac{c}{Q_{\mu}}, \quad Q_{\mu}^2 = 4\pi e^2 \left(\frac{N}{m}\right)_{\mu}, \quad (23)$$

此处 $\left(\frac{N}{m}\right)_{\mu}$ 是张量 $\left(\frac{N}{m}\right)_{\mu\nu} = \frac{2}{h^3} \oint_{\varepsilon=\varepsilon_0} \frac{v_{\mu} v_{\nu}}{\nu} dS$ 的主值。

对球状、椭球状和某些其它形状的费米面, 可以选取使 $K_{\mu\nu n}$ 和 $G_{\mu\nu n}(\zeta)$ 的非对角元同时等于零的坐标轴: $K_{\mu\nu n} = K_{\mu n} \delta_{\mu\nu}$, $G_{\mu\nu n}(\zeta) = G_{\mu n}(\zeta) \delta_{\mu\nu}$. 现在先讨论这种简单情况. 以后将看到, 更一般的情况在我们所需要的近似下实际上还导致这个简单的特例. 省略足标 μ 后, 方程(18)变为

$$E''(\zeta) - \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n} E^{(2n)}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n G_n(\zeta), \quad A_n = (-1)^{n+1} E^{(n)}(0). \quad (24)$$

(24) 式是无限阶的非齐次线性微分方程, 其解由齐次方程的解 $e^{-\beta^2 \zeta}$ 和非齐次方程的解 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n G_n(\zeta)$ 组成. 常数 β 和 C_n 由下式决定:

$$\beta^2 - \sum_{m=0}^{\infty} K_{2m} \beta^{2m} = 0,$$

$$C_{n+2} - \sum_{m=0}^{\infty} K_{2m} C_{n+2m} = A_n.$$

将 β 和 C_n 按小参数 γ_0 展开后, 很容易求出它们的表达式. 考虑了 $\mathbf{E}(\zeta)$ 应满足的边界条件后, 得到电场的分布(近似到 γ_0^2)为

$$E(\zeta) = [E(0) - A_0 G_2(0)] e^{-(1+\frac{1}{2}K_2)\zeta} + A_0 G_2(\zeta) + A_1 G_3(\zeta), \quad (25)$$

(25) 式中保留了 $G_3(\zeta)$ 项, 因为它微分后给出数量级为 γ_0^2 的项. 表面电阻为

$$Z_\mu = R_\mu + iX_\mu = -\frac{4\pi\omega\delta_\mu}{c^2} \frac{E_\mu(0)}{E'_\mu(0)} = \frac{4\pi\omega\delta_\mu}{c^2} \left\{ 1 + G_1(0) - \frac{1}{2} K_2 + [G_1(0)]^2 \right\}, \quad (26)$$

引入符号 $\tilde{v}_\mu^n$ 和 $\tilde{v}_\mu^{2n}$:

$$\left. \begin{aligned} G_{\mu n}(0) &= \frac{3}{2(n+1)(n+3)} \frac{\tilde{v}_\mu^n}{(i\omega + \gamma_0)^n \delta_\mu^n}, \\ K_{\mu(2n)} &= \frac{3}{(2n+1)(2n+3)} \frac{\tilde{v}_\mu^{2n}}{(i\omega + \gamma_0)^{2n} \delta_\mu^{2n}}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(27) 式中系数的选择是为了在平方色散律时, $\tilde{v}_\mu$, $\tilde{v}_\mu^{2n}$ 等都成为普通的速度 v . 按小参数 (15) 展开 (26) 式, 得到表面电阻实部与虚部的最终表达式:

$$R_\mu = \frac{2\pi\omega\delta_\mu^{(0)}}{c^2} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2 \right] + \frac{3\pi}{4} \frac{\tilde{v}_\mu}{c^2} \left[1 - \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2 \right] - \frac{\pi v_0}{c^2 \omega^2 \delta_\mu^{(0)}} \left[\tilde{v}_\mu^2 - \frac{45}{128} (\tilde{v}_\mu)^2 \right], \quad (28)$$

$$X_\mu = \frac{4\pi\omega\delta_\mu^{(0)}}{c^2} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2 \right] + \frac{3\pi}{4} \frac{\tilde{v}_\mu}{c^2} \left(\frac{v_0}{\omega} \right) + \frac{\pi}{c^2 \omega \delta_\mu^{(0)}} \left[\frac{2}{5} \tilde{v}_\mu^2 - \frac{9}{64} (\tilde{v}_\mu)^2 \right]. \quad (29)$$

对于平方色散律 $\tilde{v}_\mu = \tilde{v}_\mu^{2n} = v$, 从 (28) 和 (29) 式得出文献 [5] 中的相应各项.

现在讨论更一般的情况: $K_{\mu\nu n}$ 和 $G_{\mu\nu n}(\zeta)$ 都是非对角张量. 直到四级近似, 基本方程组可写为

$$\left. \begin{aligned} (1 - K_{xx2}) E''_x - K_{xy2} E''_y &= E_x + \sum_{n,\nu} A_{\nu n} G_{x\nu n}(\zeta), \\ (1 - K_{yy2}) E''_y - K_{yx2} E''_x &= E_y + \sum_{n,\nu} A_{\nu n} G_{y\nu n}(\zeta), \\ A_{\nu n} &= (-1)^{n+1} E^{(n)}_\nu(0). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

不难看出, 对应于 (30) 的齐次方程组的解直至 γ_0^2 仍是对角化的. 以下列形式求非齐

次方程組的解:

$$\left. \begin{aligned} E_x(\zeta) &= \sum_{n,v} C_{vn} G_{xvn}(\zeta) + \sum_{n,v} D_{vn} G_{yvn}(\zeta), \\ E_y(\zeta) &= \sum_{n,v} M_{vn} G_{xvn}(\zeta) + \sum_{n,v} N_{vn} G_{yvn}(\zeta). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

直接計算表明,“交插項”的系数 D_{vn} 和 M_{vn} 在更高级的近似才出现,因此方程組(30)事实上分解为两个独立方程。但是由于 $G_{\mu\nu n}(\zeta)$ 不再是对角张量,表面电阻张量中也要出现非对角元。

在作进一步計算前,須注意到 $j_z = 0$ 对 $E_\mu(0)$ 所附加的一个条件,即

$$\sum_{v=x,y,z} (K_{zv0} - G_{zv0}(0)) E_v(0) = 0,$$

从而得出

$$E_x(0) = \sum_{v=x,y} \lambda_v E_v(0), \quad \lambda_v = - \frac{K_{xv0} - G_{xv0}(0)}{K_{xz0} - G_{xz0}(0)} \sim 1, \quad (32)$$

解方程組(30)并考虑(32),就得到

$$E'_\mu(0) = T_{\mu\nu} E_\nu(0), \quad (\mu, \nu = x, y) \quad (33)$$

$T_{\mu\nu}$ 的分量是:

$$\left. \begin{aligned} T_{\mu\mu} &= -1 + G_{\mu\mu 1}(0) + \lambda_\mu G_{\mu x 1}(0) - \frac{1}{2} K_{\mu\mu 2}, \\ T_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu 1}(0) + \lambda_\nu G_{\mu x 1}(0), \quad (\mu \neq \nu), \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

它和表面电导张量只差一系数,而与表面电阻张量的关系为

$$Z_{\mu\nu} = - \frac{4\pi\omega\delta_\mu}{c^2} T_{\mu\nu}^{-1}.$$

如果用下列定义代替(27)中第一式引入的符号:

$$\left. \begin{aligned} G_{\mu 1}(0) &= G_{\mu\mu 1}(0) + \lambda_\mu G_{\mu x 1}(0) = \frac{3}{16} \cdot \frac{\tilde{v}_\mu}{(i\omega + \nu_0)\delta_\mu}, \\ T_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu 1}(0) + \lambda_\nu G_{\mu x 1}(0) = \frac{\tilde{v}_{\mu\nu}}{(i\omega + \nu_0)\delta_\mu}, \quad (\mu \neq \nu), \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

则表面电阻张量的对角元形式上与(28)、(29)两式相同,但增加了一个补充项:

$$\frac{4\pi}{c^2} \frac{\tilde{v}_{xy}\tilde{v}_{yx}}{\omega\delta_\mu^{(0)}} \left(\frac{5}{2} \frac{\nu_0}{\omega} - i \right); \quad (36)$$

而新出现的非对角元为

$$\left. \begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{4\pi\tilde{v}_{\mu\nu}}{c^2} \left[1 - \left(\frac{\nu_0}{\omega} \right)^2 + \frac{15}{32} \frac{(\tilde{v}_x + \tilde{v}_y)}{\omega\delta_\mu^{(0)}} \frac{\nu_0}{\omega} \right], \\ X_{\mu\nu} &= \frac{4\pi\tilde{v}_{\mu\nu}}{c^2} \left\{ \frac{\nu_0}{\omega} - \frac{3}{16} \frac{(\tilde{v}_x + \tilde{v}_y)}{\omega\delta_\mu^{(0)}} \left[1 - \frac{35}{8} \left(\frac{\nu_0}{\omega} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

从(28)、(29)、(36)、(37)諸式容易看出,表面电阻张量虚部的最大项与电子的色散律和趋肤效应的性质都没有关系。其实部最大项在正常趋肤效应 ($\delta \gg l$) 时

$$R_{\mu\mu} = \frac{2\pi\nu_0\delta_\mu^{(0)}}{c^2}, \quad (38)$$

与色散律无关,而在反常趋肤效应 ($\delta \ll l$) 下与色散律有关:

$$R_{\mu\mu} = \frac{3\pi}{4} \frac{\tilde{\nu}_\mu}{c^2} \quad (39)$$

对于 $\delta \sim l$ 的中间情况, (38) 和 (39) 二式对 $R_{\mu\mu}$ 的贡献具有相加性, 这一点在文献 [6] 中也是不清楚的。

最后, 估计一下表面电阻张量各元素的相对数值。首先 $|X_{\mu\nu}| \ll R_{\mu\nu}$ ($\mu \neq \nu$), 正常趋肤效应时差 $\frac{\nu_0}{\omega}$ 倍, 反常趋肤效应时差 $\frac{\nu_0}{\omega\delta_\mu^{(0)}}$ 倍。其次, 如果认为各向异性的数量级为 1, 即 $\tilde{\nu}_{\mu\nu} \sim \tilde{\nu}_\mu \sim \nu_0$, 则正常趋肤效应时表面电阻张量各元素满足不等式:

$$|X_{\mu\nu}| \ll R_{\mu\nu} \ll R_{\mu\mu} \ll X_{\mu\mu}, \quad (\mu \neq \nu), \quad (40)$$

而反常趋肤效应时,

$$|X_{\mu\nu}| \ll R_{\mu\nu} \sim R_{\mu\mu} \ll X_{\mu\mu}, \quad (\mu \neq \nu). \quad (41)$$

显然, 各向异性的程度对各元素的相对数值影响甚大。

四、电磁波的穿透系数

从表面电阻张量可以求出金属的基本光学参数。金属光学中通常测量的是复数折射率 $n-ix$, 其中 n ——折射率, x ——吸收系数。复数折射率的概念是通过复数介电常数导入的, 而后者在反常趋肤效应时因 $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{E}$ 之间的非局域性关系而失掉意义。但是, 只要表面电阻张量仍是对角的, 就可以通过它的实部与虚部定义既适用于正常趋肤效应, 又适用于反常趋肤效应的有效折射率和吸收系数^[2,4](注意: 在红外波段 $R \ll X$):

$$n_{\text{eff}} = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{R_\mu}{R_\mu^2 + X_\mu^2} \approx \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{R_\mu}{X_\mu^2}; \quad x_{\text{eff}} = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{X_\mu}{R_\mu^2 + X_\mu^2} \approx \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{1}{X_\mu}. \quad (42)$$

原则上可以进行测量的光学参数还有相对吸收本领 $A(\omega)$ 、相对反射本领 $r(\omega)$ 和垂直入射波对金属膜的穿透系数 $T(\omega)$ (在我们所讨论的波段, 这些参量与入射角的关系可以忽略^[4,6])。对于金属薄膜,

$$A + r + T = 1. \quad (43)$$

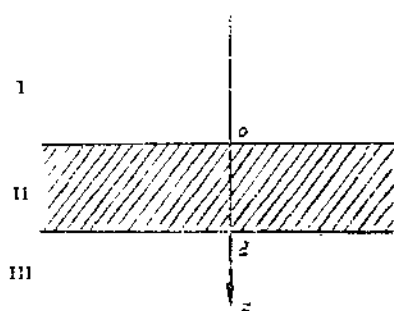
从上节的计算结果可以看出, 在反常趋肤效应时电磁波的穿透系数可能远大于正常趋肤效应时。其实第三节中已经求出电流密度和电场强度的衰减规律:

$$\left. \begin{aligned} E_\mu(z) &= E_\mu(0) \left[e^{-\frac{z}{\delta_\mu}} - G_{\mu 2} \left(\frac{z}{\delta_\mu} \right) \right], \\ j_\mu(z) &= \frac{2e^2 \delta_\mu}{h^3} E_\mu(0) \left[e^{-\frac{z}{\delta_\mu}} - G_{\mu 0} \left(\frac{z}{\delta_\mu} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

(44) 式中的第一项在厚度为 $\delta_\mu^{(0)}$ 的表面层内衰减。第二项来自边界条件, 它含有因子 $\exp \left\{ -\frac{1 + i\omega t_0}{n_x} \frac{z}{l} \right\}$, ($v_x = v n_x$), 因而在 $\sim l$ 的深度内以相当复杂的方式衰减。由此

可见, 反常趋肤效应时电磁波可以被自由程“拖过”薄膜。

为了求出穿透系数, 须在金属薄膜内外求解 Maxwell 方程, 并在界面上利用连续性条件缝合(见图)。借助与上节类似的方法, 得出三个区域内电场强度的表达式:



$$\text{I: } E(z) = E_0 e^{-i\frac{\omega}{c}z} + C e^{i\frac{\omega}{c}z};$$

$$\text{II: } E(z) = A e^{\beta \frac{z}{\delta}} + B e^{-\beta \frac{z}{\delta}} - E(0) G_2\left(\frac{z}{\delta}\right) - \\ - E(d) H_2\left(\frac{z}{\delta}\right) + E'(0) G_3\left(\frac{z}{\delta}\right) + \\ + E'(d) H_3\left(\frac{z}{\delta}\right),$$

$$H_n\left(\frac{z}{\delta}\right) = \frac{8\pi e^2 \omega i}{(i\omega + \nu_0) c^2 h^3} \oint_{\epsilon=\epsilon_0} \frac{\nu_\mu^2}{\nu} \gamma^n S(-\nu_\mu) e^{\frac{d-z}{\delta} \nu} dS;$$

$$\text{III: } E(z) = D e^{-i\frac{\omega}{c}z}.$$

穿透系数由下式决定:

$$T(\omega) = \left| \frac{D}{E_0} \right|^2 \quad (45)$$

经过十分简单但相当枯燥的代数运算,可以证明穿透系数由三项之和组成:

$$T = T_n + T_a + T_{na}. \quad (46)$$

T_n 是正常趋肤效应时的穿透系数。如果以 Ω_0 和 ϵ 分别记电子的等离子振荡频率和介电常数,则它的表达式为

$$T_n = 16 \left(\frac{\omega}{\Omega_0} \right)^2 e^{-\frac{2d}{\delta_\mu^{(0)}}} \approx \frac{16}{|\epsilon|} e^{-\frac{2d}{\delta_\mu^{(0)}}}, \quad (47)$$

T_a 是反常趋肤效应时的穿透系数。它的表达式比较复杂:

$$T_a = \frac{9}{4} \left(\frac{\nu}{c} \right)^2 \left| F\left(\frac{d}{l} + i \frac{\omega d}{\nu} \right) \right|^2, \quad (48)$$

其中 $F(z) = \int_1^z \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) e^{-zx} \frac{dx}{x^2}$ 。如果利用 $F(z)$ 在 $\frac{\omega d}{\nu} \gg 1$ ($|z| \gg 1$) 时的渐近展开式的第一项,则

$$T_a = 9 \left(\frac{\nu}{c} \right)^2 \left(\frac{\nu}{\omega d} \right)^4 e^{-\frac{2d}{l}}. \quad (48a)$$

交插项 T_{na} 的物理意义不重要。比较(47)和(48a),不难看出,反常趋肤效应时, T_a 的系数虽然很小,但指数因子衰减慢得多,因此可能超过 T_n 。试在液氮温度下作粗略估计,取 $l \sim 10^{-3}$, $d \sim 10^{-4}$, $\omega \sim 10^{13}$, $\Omega_0 \sim 10^{15}$, 得 $T_n \sim 10^{-12}$, $T_a \sim 10^{-8}$, 即可能差几个数量级。

如此微小的效应是相当难测量的。然而,本节讨论的物理图象的意义要广泛得多,而具体计算受到若干近似与简化的限制。重要的定性结论是:频率固定时, T_n 主要取决于比值 $\frac{N}{m}$, 而 T_a 依赖于自由程 l 或样品的纯度(我们只讨论低温情况,自由程完全由杂质散射决定)。现代物理实验室里能获得的超纯金属,自由程可能远大于薄膜厚度,电磁波的穿透效应会更为显著(本节后半部的计算当然已不适用)。通常测量剩余电阻(实际

上就是 1) 判断超純金属的純度时, 接触問題带来严重困难. 如果这种超純金属在低温下的相对透明能被实验証实, 就可用以发展一种无接触的鑑定純度的方法. 順便指出, 这种效应不仅在紅外存在. 只要趋肤效应是极端反常的, 在其它频段自由程也会起类似作用. 紅外波段仅仅提供了小参数, 使我們得以从复杂的电场分布規律中分出比較简单明瞭的衰減因子.

五、垂直磁場中的表面电阻张量

第三节中应用的展开方法可以推广到某些有其它小参数存在的情况. 我們討論一个特例: 平方色散律和有垂直磁場存在时的表面电阻. 仍然采用以前的記法, 基本方程組可以写成

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \alpha \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \psi(\tau, \zeta) &= \mathbf{vE}(\zeta), \\ \psi(\tau, 0) &= 0, \quad v_z > 0, \\ \psi(\tau + 2\pi, \zeta) &= \psi(\tau, \zeta), \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned} j_\mu &= \frac{2e^2}{(i\omega + \nu_0)\hbar^3} \iint_{\epsilon=\epsilon_0} v_\mu \psi(\tau, \zeta) m d\tau dp_z, \\ \frac{d^2 E_\mu}{d\zeta^2} &= \frac{4\pi\omega\delta_\mu^2 i}{c^2} j_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

其中 $\alpha = \frac{Q}{i\omega + \nu_0}$, $Q = \frac{eH}{mc}$ 是电子的迴旋共振频率, m 是电子的有效質量. 变量 τ 由以下方程定义^[9]:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = m[\mathbf{v}\mathbf{n}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{n}H. \quad (51)$$

$|\alpha| \ll 1$ 是新的的小参数, 它也包含两个实参数: $\frac{Q}{\omega}$ 和 $\frac{\nu_0}{\omega}$. $\frac{Q}{\omega} \ll 1$ 的物理意义是: 每一电磁場变化周期内电子移动的距离远小于它的迴旋半径.

引入算符 $\hat{L} = 1 + \gamma \frac{\partial}{\partial \zeta}$, 可将方程(49)的解写成类似(17)的形式:

$$\begin{aligned} \psi(\tau, \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha^n \left\{ \frac{\partial^n v_\nu}{\partial \tau^n} \hat{L}^{-(n+1)} E_\nu(\zeta) - S(v_\nu) e^{-\frac{\zeta}{\gamma}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^K \frac{\zeta^K}{K!} \frac{\partial^{(n+K)} v_\nu}{\partial \tau^{(n+K)}} [\hat{L}^{-(n+1)} E_\nu(\zeta)]_{\zeta=0} \right\}, \end{aligned} \quad (52)$$

这里已經注意到 γ 与 τ 无关, 因此算符 $\hat{L}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \tau}$ 是可对易的. 将(52)式代入(50), 并利用运动方程(51)和费米面的中心对称性化簡出現的各积分, 得准确到諸小参数平方項的

电场强度表达式为

$$\begin{aligned}
 E_x(\zeta) &= [1 + G_2(0)] \left[E_x(0) \cos \frac{\alpha}{2} \zeta - E_y(0) \sin \frac{\alpha}{2} \zeta \right] \exp \left(-1 - \frac{1}{2} K_2 + \frac{3}{8} \alpha^2 \right) \zeta \\
 &\quad - E_x(0) \left[G_2(\zeta) - \frac{\alpha^2}{2} \zeta^2 G_0(\zeta) \right] - \alpha E_y(0) \zeta G_1(\zeta); \\
 E_y(\zeta) &= [1 + G_2(0)] \left[E_x(0) \sin \frac{\alpha}{2} \zeta + E_y(0) \cos \frac{\alpha}{2} \zeta \right] \exp \left(-1 - \frac{1}{2} K_2 + \frac{3}{8} \alpha^2 \right) \zeta \\
 &\quad - E_y(0) \left[G_2(\zeta) - \frac{\alpha^2}{2} \zeta^2 G_0(\zeta) \right] + \alpha E_x(0) \zeta G_1(\zeta).
 \end{aligned}$$

由此求出表面电阻张量的实部和虚部分别为

$$\left. \begin{aligned}
 R_{\mu\mu}(\mathbf{H}) &= R_{\mu\mu}(0), \\
 R_{yx}(\mathbf{H}) &= -R_{xy}(\mathbf{H}) = \frac{2\pi Q \delta^{(0)}}{c^2}, \\
 X_{\mu\mu}(\mathbf{H}) &= X_{\mu\mu}(0) - \frac{\pi}{2} \frac{\omega \delta^{(0)}}{c^2} \left(\frac{Q}{\omega} \right)^2, \\
 X_{yx}(\mathbf{H}) &= -X_{xy}(\mathbf{H}) = \frac{\pi Q \delta^{(0)}}{c^2} \left[\frac{v_0}{\omega} + \frac{3}{4} \frac{v}{\omega \delta^{(0)}} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

所得的表达式自然应当满足 Onsager 对称关系,

$$Z_{\mu\nu}(\mathbf{H}) = Z_{\nu\mu}(-\mathbf{H}).$$

由于磁场的存在,平方色散律下的表面电阻也不复为对角张量。正是这些非对角元应成为实际测量的对象,对于它们可以证明存在着与第三节末所述相似的不等式。此外可以注意, R_{xy} 与频率及温度都没有关系。

六、讨 论

先讨论通过红外波段表面电阻测定金属微观参数的可能性。文献[6]中已建议了由此测定 $\frac{N}{m}$ 、 m 、 N 、 v_0 等参数的方法。可以补充的是:在垂直磁场中测定 $R_{yx} = \frac{2\pi Q \delta^{(0)}}{c^2}$, 再辅以某种其它定 $\frac{N}{m}$ 的测量,是决定有效质量 m 的便利方法,因为 $\frac{N}{m}$ 包含在 $\delta^{(0)}$ 中,而 m 进入 Q 的表达式。

至于靠非共振的光学测量数据恢复金属的费米面,则不如在微波区域方便。在后一情况下,主要从费米面上 $v_s \sim 0$ 一条窄带上各积分的数值出发,而诸光学参数通过整个费米面上的积分表达,这就限制了实际应用的可能性。

第三节中已经指出,正常趋肤效应下表面电阻的虚实部分皆与色散律无关,因此,可以期望借助更简捷的方法定性地推导出各基本公式。试为电子运动写出考虑了弛豫的牛顿方程:

$$\dot{\mathbf{v}} + v_0 \mathbf{v} = \frac{e}{m} \mathbf{E},$$

乘以 Ne 后得到

$$\mathbf{j} = \frac{Ne^2}{(i\omega + v_0)m} \mathbf{E} = \sigma^* \mathbf{E}, \quad (54)$$

将(54)式与

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \left(\sigma + \frac{i\omega\epsilon}{4\pi} \right) \mathbf{E} = \sigma^* \mathbf{E}$$

比较,在第一级近似得到介电常数为

$$\epsilon = -\frac{4\pi Ne^2}{(\omega^2 + v_0^2)m} \approx -\frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}, \quad (55)$$

而在下一级近似得到电导率为

$$\sigma = \frac{v_0^2}{\omega^2 + v_0^2} \sigma_0 \approx \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2 \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{Ne^2}{mv_0}. \quad (56)$$

(55)和(56)式中只有 $\frac{N}{m}$ 与色散律有关,因此很自然地应当在更一般的情况下将它换成

某一张量 $\left(\frac{N}{m} \right)_{\mu\nu}$ 的主值. 第三节的计算表明,张量

$$\left(\frac{N}{m} \right)_{\mu\nu} = \frac{2}{\hbar^3} \oint \frac{v_\mu v_\nu}{v} dS.$$

表面电阻张量也由通常的公式求得为

$$Z_\mu = \sqrt{\frac{4\pi\omega i}{c^2 \sigma_\mu^*}} = \frac{2\pi v_0 \delta_\mu^{(0)}}{c^2} + \frac{4\pi\omega \delta_\mu^{(0)}}{c^2} i. \quad (57)$$

为了得到反常趋肤效应时 Z_μ 的表达式,只须引用 Pippard^[3] 的思想,在(57)式中作代换 $l_{\text{eff}} = K\delta_\mu^{(0)}$; 结果为 $\frac{2\pi}{K} \frac{v}{c^2}$, 它和公式(39)只差一常数 $K = \frac{8}{3}$.

最后讨论本文结果的应用范围. 本文的全部结果都是利用线性化了的经典输运方程求得. 为了使量子效应不起显著作用,必须要求

$$\hbar\omega \ll KT.$$

这就给出了应用本文结果的频率范围:

$$\frac{KT}{\hbar} \gg \omega \gg \frac{v}{\delta}.$$

由此可见,对于好金属我们的结果适用于高温和近红外,而在低温下对载流子数目较少的金属,它们适用于远红外区域.

作者谨在此感谢 М. Я. Азбель 博士曾经给予的指导,并感谢李儒顺同志关于无接触测量方法的讨论.

参 考 文 献

- [1] М. Я. Азбель, Р. Н. Гуржип, Хао Бай-линь (郝柏林), VII Всесоюзное совещание по физике низких температур, Тезисы докладов, стр. 38, 23—28 июня 1960, Харьков.
- [2] В. Л. Гинзбург, Г. П. Мотулевич, УФН, 55 (1955), 469.
- [3] A. B. Pippard, Proc. Roy. Soc. A191 (1947), 385.
- [4] G. E. H. Reuter, E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc. A195 (1948), 336.

- [5] R. B. Dingle, *Physica*, **19** (1953), 311, 729.
- [6] М. И. Каганов, В. В. Слезов, *ЖЭТФ*, **32** (1957), 1498.
- [7] М. Я. Азбель, Э. А. Канер, *ЖЭТФ*, **32** (1957), 896.
- [8] Э. А. Канер, М. И. Каганов, *ЖЭТФ*, **31** (1956), 459.
- [9] И. М. Лившиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *ЖЭТФ*, **31** (1956), 64.

SURFACE IMPEDANCE AND TRANSPARENT COEFFICIENT OF METALS IN THE INFRARED

HAO BAI-LIN

ABSTRACT

Surface impedance of metals in infrared region is calculated for an arbitrary Fermi surface. Expressions applicable to all cases of skin-effect (normal, anomalous and intermediate) are obtained. For anomalous skin-effect a component of electric field decreases very slowly in the depth of metals, which leads to the transparency of metallic films. It is proposed to develop a contactless method for the purity control of well refined metals by means of this effect. Surface impedance in a perpendicular magnetic field is also considered.