数学分析

习题解答

（下册）

广东教育学院数学系分析教研组编

目　录

第十一章　数项级数

§1　级数的收敛性及其性质

1、验证下列级数的收敛性，并求其和数：

（1）$\frac{1}{1\cdot6}+\frac{1}{6\cdot11}+\frac{1}{11\cdot16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$，

解：设$Sn=\frac{1}{1\cdot6}+\frac{1}{6\cdot11}+\frac{1}{11\cdot16}+\cdots$

$+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$，则$Sn=\frac{1}{5}(1-\frac{1}{6})+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)$

$+\frac{1}{5}(\frac{1}{11}-\frac{1}{16})+\cdots+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$

$=\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5n+1})=\frac{n}{5n+1}$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}Sn=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{5n+1}=\frac{1}{5}$，∴级数收敛，其和为$\frac{1}{5}$。

（2）$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$

解：$Sn=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} Sn = \frac{3}{2}$，原级数收敛，其和为$\frac{3}{2}$

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

解：$\because \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right]$

$\therefore Sn = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$- \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} Sn = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$，故级数收敛，其和为$\frac{1}{4}$。

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$

解：$Sn = \sum\limits_{k=1}^{n} (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$

$= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = 1 - \sqrt{2}$

$+ 1/(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} Sn = 1 - \sqrt{2} + \lim\limits_{n\to\infty}\left[1/(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})\right]$

$=1-\sqrt{2}$故级数收敛，其和为$1-\sqrt{2}$。

2、已知级数的部分和 $S_n=\frac{n+1}{n}$，写出个这级数。

解：设所求级数为：$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$，则

$$a_1=S_1=\frac{1+1}{1}=2,\quad a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+1}{n}-\frac{n}{n-1}$$

$$=-\frac{1}{n(n-1)}\quad(n=2,3\cdots)$$

∴ 所求级数为$a_1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n=2-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$

3、证明：若数列$\{a_n\}$收敛于a，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$。

证：设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1}$ ∵ $\lim_{n\to\infty}a_n=a$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})=a_1-a.$$

4、证明：若数列$\{b_n\}$有$\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$，则（1）级数$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$发散；（2）当$b_n\neq0$时，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}.$$

证：（1）$S_n=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1$．

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_1) = \infty$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1} - b_n)$发散。

（2）当$b_n \neq 0$时，因$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} 1/b_n = 0$

又 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}}\right) = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}}$.所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \frac{1}{b_1}$$

5、应用第3、4题的结果求下列级数的和：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n-1)(\alpha+n)}$，（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$，

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

解：（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n-1)(\alpha+n)}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha+n-1} - \frac{1}{\alpha+n}\right)$$

设 $a_n = \frac{1}{\alpha+n-1}$，有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha+n-1} = 0$，

又 $a_1 = \frac{1}{\alpha+0} = \frac{1}{\alpha}$，由第三题知：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$

$= a_1 - a = a_1$，

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n-1)(\alpha+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha+n-1}-\frac{1}{\alpha+n}\right)=\frac{1}{\alpha}$$

(2) $\because (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$

$$=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}$$

设 $a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=0$，

又 $a_1=(-1)^{1+1}\frac{1}{1}=1$，由第3题知：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}\right]=a_1-0=1.$$

(3) 因 $\frac{1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}$

设 $a_n=\frac{1}{n^2+1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$，由第3题知：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2+1}\right.$

$$\left.-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right]=a_1-0=\frac{1}{2}$$

6、应用柯西准则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^n}{2^n}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$；(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

解：(1) 由于 $\left| u_{m+1}+u_{m+2}+\quad\cdots+u_{m+p}\right|$

$$=\left|\frac{\operatorname{Sin}2^{m+1}}{2^{m+1}}+\frac{\operatorname{Sin}2^{m+2}}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{\operatorname{Sin}2^{m+p}}{2^{m+p}}\right|$$

$$\leqslant\frac{|\operatorname{Sin}2^{m+1}|}{2^{m+1}}+\frac{|\operatorname{Sin}2^{m+2}|}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{|\operatorname{Sin}2^{m+p}|}{2^{m+p}}\leqslant\frac{1}{2^{m+1}}$$

$$+\frac{1}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+p}}=\frac{1}{2^m}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^m}$$

对于任给 $0<\varepsilon<1$. 取$N=\left[\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}\right]$，则当$m>N$时

对任何自然数p都有$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\frac{1}{2^m}<\varepsilon$,

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}2^n}{2^n}$收敛。

(2) 设 $a_n=\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$，存在$\varepsilon_0=\frac{1}{3}$，对任何正整数

N，存在$m_0=N+1>N$及$p_0=1$，使得 $|a_{m_0}|$

$$=\frac{m_0^2}{2m_0^2+1}\geqslant\frac{m_0^2}{2m_0^2+m_0^2}=\frac{1}{3}$$，所以，级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$发散。

(3) 因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，任给$\varepsilon>0$，存在$N>0$ ，当

$n>N$时，有$\frac{1}{n}<\varepsilon$，故当$n>N$时，对任意自然数p有

$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}+(-1)^{n+2}\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^{n+p}\right.$

$$\left.\frac{1}{n+p}\right| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}$$

$$< \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$.所以，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛。

（4）存在$\varepsilon_0=\frac{1}{3}$，对任意正整数N，存在$n_0=N+1>N$

及$p_0=n_0$，$$\left|\frac{1}{\sqrt{(n_0+1)+(n_0+1)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(n_0+2)+(n_0+2)^2}}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(n_0+p_0)+(n_0+p_0)^2}}\right| \geqslant \frac{1}{n_0+1+1/2}$$

$$+\frac{1}{n_0+2+1/2}+\cdots+\frac{1}{n_0+p_0+1/2} \geqslant \frac{n_0}{2n_0+1/2}$$

$$> \frac{n_0}{2n_0+n_0/2} = \frac{2}{5} > \frac{1}{3} = \varepsilon_0$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$发散。

7、证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充要条件是：任给$\varepsilon>0$，存在某自然数N，对一切$n>N$总有$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon$

证$\Longrightarrow$因$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，由柯西准则，任给$\varepsilon>0$，存在自然数N_0，当$m>N_0$，对任意自然数p有$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon$．取$N=N_0+1$，对一切$n>N$有$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon$．

$\Longleftarrow$任给$\varepsilon>0$，存在$N>0$，对一切$n>N$，总有$|u_N+u_{N+1}+\cdots n_n|<\varepsilon$

$\therefore$ 当 $n\to\infty$ 时，$\left|\sum\limits_{k=N}^{\infty} u_k\right| \leqslant \varepsilon$ $\therefore \sum\limits_{=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

8、举例说明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u$ 对每一个自然数p满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{n+p})=0$，则这级数不一定收敛。

解：例：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，但却有

$$0<u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots$$

$$+\frac{1}{n+p}<\frac{p+1}{n}$$

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p+1}{n}=0$，故对一切p有 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+u_{n+1}$ $+\cdots+u_{n+p})=0$.

§2 正 项 级 数

1、应用比较原则判别下列级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{Sin}\frac{\pi}{3^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$;　　(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\operatorname{Cos}\frac{1}{n}\right)$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$,　(8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

解：(1)因$\frac{1}{n^2+a^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛，由比较原则知原级数收敛。

(2) 因$2^n \sin\frac{\pi}{3^n} \leqslant 2^n \cdot \frac{\pi}{3^n} = (\frac{2}{3})^n \pi$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n \pi$收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$收敛。

(3)因$\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} > \frac{1}{n}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$发散

(4)因$\frac{1}{(\ln n)^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$ $(n \geqslant 9)$，而$\sum\limits_{n=9}^{\infty} \frac{1}{2^n}$收敛，故$\sum\limits_{n=9}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$收敛，显然级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$收敛。

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\cos\frac{1}{n}) / \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\frac{1}{2n} / 2(\frac{1}{2n})^2 = \frac{1}{2} > 0$，由比较原则推论知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{1}{n})$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$同敛散，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛，从而原级数收敛。

(6)因$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \Big/ \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 > 0$，由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$发数。

(7) 因 $(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)=a^{-\frac{1}{n}}(a^{\frac{2}{n}}-2a^{\frac{1}{n}}+1)$

$=(a^{\frac{1}{n}}-1)^2/a^{\frac{1}{n}}$ 又因 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)/\frac{1}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty} n^2(a^{\frac{1}{n}}-1)^2/a^{\frac{1}{n}}=(\ln a)^2>0$ 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 同敛散，已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，从而级数原收敛。

(8) 因 $(\ln n)^{\ln n}=n^{\ln(\ln n)}$，当 $n\to\infty$ 时，$\ln(\ln n)\to\infty$，所以存在 $N_0>0$，当 $n\geqslant N_0$ 时，$\ln(\ln n)>2$，则 $n^{\ln(\ln n)}>n^2$. 故 $\frac{1}{n^{\ln(\ln n)}}<\frac{1}{n^2}\ (n\geqslant N_0)$

因 $\sum\limits_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛。

2、用比式判别法或根式判别法鉴定下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{10^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$； (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ $\left[\begin{array}{l}\text{其中 } a_n\to a\ (n\to\infty),\\ a_n,\ a,\ b>0\end{array}\right]$

解：（1）设$u_n=\frac{1\cdot 3\cdot\cdots(2n-1)}{n!}$则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1\cdot 3\cdot\cdots(2n-1)(2n+1)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{1\cdot 3\cdots\cdot(2n-1)}$$

$=\frac{2n+1}{n+1}$所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2>1$，

由达朗贝尔（比式）判别法推论1知：原级数发散。

（2）设$u_n=\frac{(n+1)!}{10^n}$，则$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+2)!}{10^{n+1}}$

$\cdot\frac{10^n}{(n+1)!}=\frac{n+2}{10}$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{10}=\infty$，同上题知级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{10^n}$发散。

（3）设 $u_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$，则$\sqrt[n]{{}_n u}=\frac{n}{2n+1}$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$

由柯西（根式）判别法推论1知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ 收敛。

（4）设 $u_n=\frac{n!}{n^n}$ 则 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}$

$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$，所以

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$收敛。

(5) 设$u_n = \frac{n^2}{2^n}$，则$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2}$

$= \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^2$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^2 = \frac{1}{2}$，由比式判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$收敛。

(6) 设$u_n = \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$，则$\sqrt[n]{u_n} = \frac{b}{a_n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{a_n} = \frac{b}{a}$

(i) 当$a>b$时，$0<\frac{b}{a}<1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$收敛

(ii) 当$a<b$时，$\frac{b}{a}>1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$发散

(iii) 当$a=b$时，$\frac{b}{a}=1$，则级数敛散不定，例

$\Sigma\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}\right)^n = \Sigma \frac{1}{n}$发散，而级数$\Sigma\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}\right)^n$

$= \Sigma \frac{1}{n^2}$收敛。

3、证明定理 3 的推论2：设正项级数$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$和$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$，存在某自然数$N_0$，对一切$n>N_0$，有$u_n\neq 0$，$v_n\neq 0$ 且$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$，若级数

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛， 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$也发散。

证：因去掉、增加或改变级数的有限项，不改变级数的敛散性。不妨设不等式对一切自然数n都成立，即：

$$\frac{u_2}{u_1} \leqslant \frac{v_2}{v_1}, \quad \frac{u_3}{u_2} \leqslant \frac{v_3}{v_2}, \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}}$$

把这些不等式两边分别相乘得：$\frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \cdots \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{v_3}{v_2} \cdot \cdots \cdot \frac{v_n}{v_{n-1}}$，即 $u_n \leqslant \frac{u_1}{v_1} v_n$ 。设 $\frac{u_1}{v_1} = C$，则$u_n \leqslant Cv_n$ ，若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，从而数$\sum_{n=1}^{\infty} Cv_n$ 也收敛，由比较原则知：级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。

设 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散 ，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则由前段的证明知：级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛，这与已知矛盾， 故$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

4、设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛；试问反之是否成立。

证：由$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，且$a_n \geqslant 0$，总存

在N，当$n>N$时，有$0\leqslant a_n<1$，从而$0\leqslant a_n^2\leqslant a_n$，因

$\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$收敛，级数$\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n^2$也收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛。

反之不真，如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$却发散。

5、设$a_n\geqslant 0$，且数列$\{na_n\}$有界，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛。

证：已知$a_n\geqslant 0$，$\{na_n\}$有界，∴存在$M>0$，对一切自然数n，都有$na_n\leqslant M$，∴$n^2a_n^2\leqslant M^2$，$a_n^2\leqslant M^2/n^2$

因级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} M^2/n^2$收敛，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$也收敛。

6、设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，证明级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$也收敛。

证：∵$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，∴$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$也收敛，

∵$u_n+u_{n+1}\geqslant 2\sqrt[n]{u_nu_{n+1}}$由比较判别法知2

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{u_nu_{n+1}}$收敛。从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$收敛，

7、证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0$

证 (1) 设 $u_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$，∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{n!n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{n})^n$

$=0$ 由比式判别法推论 1 知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$

收敛。由级数收敛的必要条件知：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$

(2) 设 $u_n=\frac{(2n)!}{a^{n!}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[2(n+1)]!}{a^{(n+1)!}}\cdot\frac{a^{n!}}{(2n)!}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+1)(2n+1)}{a^{n\cdot n!}}=0<1$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}$ 收敛，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0$

8、设 $\{a_n\}$ 为递减正项数列，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}2^m a_{2^m}$ 同时收敛或同时发散。

证：设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$t_m=a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^m a_{2^m}$ 当 $n<2^k$ 时，$S_n<S_{2^k}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{2^k}<a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)+\cdots+(a_{2^k}+a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}-1})<a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^k a_{2^k}=t_k$

所以 $S_n<t_k$，另一方面，当 $n>2^k$ 时，有：