运动学

运 动 学

正如緒論中已經指出的，运动学是从几何学的观点來研究質点、剛体和机構的运动，而不致虑作用于其上的力。换句話說，运动学是研究物体运动的几何性質，卽在空間的位置与时間的关系，而不攷虑物体运动变化的原因。因此，运动学是从比較单純的角度来研究物体的运动，为动力学中更全面地研究物体的运动做好准备，这样运动学可以看作动力学的引論。但是应該注意，运动学研究所得的結果，有它独立的重要意义。在許多机构里，关于作用力的分析只是比較次要的問題；而机构中各构件周詳的、运动学的分析就足以保証机构的正确功能。这也說明了为什么运动学与动力学分开自成一个独立部分的原因。由于运动学完全建立在几何学的基础上，因此它的創立和发展，毋需另外建立新的物理的原理或公理。

緒論中已經提到，广义理解的运动是物質存在的形式。物質的运动是在一定的时間和空間中进行的，因为任何变化（卽运动）都是随着时間的变化在一定的空間中发生。所以时間、空間和物質同样是不可分割的。因此說，时間、空間与运动是物質存在的形式。“世界上除了运动的物質以外沒有别的任何东西，而运动着的物質除非在空間和时間之內就不能运动”（列宁唯物主义与經驗批判主义曹葆华譯 1956 年版第171頁）。

研究一物体的机械运动，必須首先确定它某一时間在空間的位置。而一物体在空間的位置只有相对于另一物体（称为**参考体**）才能确定。参攷体經抽象化而以坐标系的形式出現，称为**参考坐标系**。一物体对选定的坐标系来說，它的位置是随时間而变动的，則这物体对于这坐标系是在**运动中**；若該物体对于所选的坐标系來說，它的位置并不随时間而改变，則这物体对于这坐标系是处于**靜止**状态中。正因为觀察物体的运动或靜止状态所选擇的坐标系是任意的，所以**运动和靜止的概念在实質上是相对的概念**。对于不同的坐标系，同一物体在同一时候，可以說是靜止的，也可以說是运动的。例如，行駛的車廂內一物体，对于剛連于車廂的坐标系

來說是靜止的；但对于剛連于地球的坐标系來說則在运动中。**在运动学中所謂决定一物体的运动，就是指决定这物体在所选定的坐标系中每一瞬时的位置。**为了明确某瞬时运动情况，再研究速度和加速度。

人們从生产活动和生活实踐中，观察許多现象，例如，农作物的种收，日月的出沒，潮汐的漲落，人的生老病死等，从中得到时間的概念，用来表示事物发生的先后次序，創立了树竿量影，銅壶滴漏等各式各样的量度时間的工具。在經典力学(以牛頓定律为基础，以区别于以爱因斯坦的相对論为基础的相对論力学)中，假定在任何参攷坐标系中所有各点有相同的时間。在运动学中，时間被看成为一連續的自变量，以字母 t 表示。在力学中采用 1 秒 $=\frac{1}{24\times60\times60}$ 平均太阳日为时間单位。

在运动学中当計算时間时，会遇到两个述語："**瞬时** t"和"**时間間隔** $t=t_2-t_1$"。瞬时 t 应理解为从某一初瞬(計算时間的起始点)起經过 t 秒后的一刹那，变量 t 可以有負值，这表示初瞬以前的各瞬时。时間間隔 t 是指瞬时 t_1 到瞬时 t_2 之間的一段时間。

机构是由許多构件(假定每一构件均为剛体)按一定規律而构成的，每一构件的运动往往各不相同，例如內燃机的主要部分活塞、曲柄和連杆三者的运动就各不相同，因此要研究机构的运动，必須先研究剛体的运动。而一剛体上各点又有不同的运动，例如連杆的活塞銷作直綫运动，曲柄銷作圓周运动，連杆上其他点作更复杂的曲綫运动，在同一时間間隔內，各点所行經的路程不同，在同一瞬时各点的速度和加速度也不同。因此要研究剛体的运动，又必須先研究点的运动。另外，研究了点的运动以后，就可以解决那些可以作为質点看待的物体的运动問題。所以我們研究运动学从点的运动学开始。

第十一章 点的运动

本章首先討論决定一点在所选的坐标系中每一瞬时的位置的方法（点的运动决定法），为了进一步明确某一瞬时动点运动的情况，因而进一步討論点之运动的快慢和方向（速度）以及速度的改变（加速度）。在方法上，分为自然法、坐标法和矢量法三种。点的直綫运动作为曲綫运动的特例，所以我們总是論述較一般的曲綫运动，从而推論得直綫运动的情况。

§11.1 点的运动决定法

自然法 动点在空間所画过的曲綫称为点的軌跡。当点的运动軌跡已知时(图11.1)，我們可以用自然法来决定点的运动，例如决定在綫路上行駛的列車的运动。在軌跡上，任意选取定点O作为計算长度的起点。动点M在軌跡上的位置，决定于动点M与O点間沿軌跡的距离（即弧长OM）。为了唯一地决定点M在軌跡上的位置，規定在点O某一边的軌跡上，弧长作为正值，而在O点的另一边，作为負值。这样弧OM的长度，加上适当的正負号后，以s表示，称为动点的弧坐标，O点为原点。于是弧坐标s单一地完全确定了某瞬时动点在軌跡上的位置；反之，动点在軌跡上的每一位置必有相对应的、单一而完全确定的s值。所以当动点沿軌跡运动时，在每一已知瞬时t，动点M在軌跡上具有一定的位置，因而有相应的、单一而完全确定的s值；换句話說，s是t的单值連續函数，即

$$s=f(t) \tag{11.1}$$

当軌跡已知时，上式完全决定了点的运动，因而称为**点沿已知軌跡的运动規律**或**运动方程式**。

图 11.1

坐标法 任意选取固定直角坐标系$Oxyz$后，动点M在每一瞬时相对此坐标系的位置，可以用动点的坐标x, y, z确定（图11.2）。当动点运动时，这些坐标都是时間t的单值連續函数，即

$$x=f_1(t), \qquad y=f_2(t), \qquad z=f_3(t) \tag{11.2}$$

若已知函数f_1、f_2和f_3，則在每一瞬时，点在空間的位置都可完全确

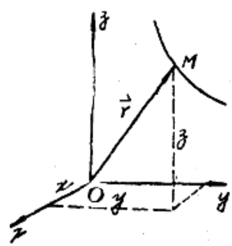

图 11.2

定。这一組方程式 (11.2) 称为**以直角坐标表示的点的运动規律或运动方程式**。从这些方程式中消去时間 t，可得动点的軌跡方程式。方程式組(11.2)也是以参数形式表示的动点的軌跡方程式。

当点在平面上运动时，以此平面作为坐标平面 Oxy，則点的运动規律为：

$$x=f_1(t), \qquad y=f_2(t) \qquad (11.2')$$

当点在直綫上运动时，以此直綫作为坐标軸 x，則点的运动規律为：

$$x=f(t) \qquad (11.2'')$$

矢量法 点M在空間的位置也可以用动点对于固定点O的矢徑$\vec{r}$来确定。取O点为直角坐标系原点，則矢徑的长度等于 $r=+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；矢徑与坐标軸夹角的余弦为：

$$\cos(\vec{r},\vec{i})=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \cos(\vec{r},\vec{j})=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos(\vec{r},\vec{k})=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}。$$

当动点在空間运动时，矢徑$\vec{r}$的大小和方向一般都随时間而改变，和前面一样，由于在某一瞬时，动点只佔据空間一个位置，因而，矢徑$\vec{r}$是时間 t 的单值連續的矢量函数，即

$$\vec{r}=\vec{r}(t) \qquad (11.3)$$

当$\vec{r}(t)$已知时，上式完全决定了点的运动，因而称为**矢量表示的点的运动規律或运动方程式**。

除了上述几种方法外，运动学中还可以用另外一些方法决定点的运动，例如点在平面內运动时，就可以有极坐标法。

例 11.1 定长直桿 AB 的两端分別在两固定而且互相垂直的直綫上滑动（图 11.3）。桿上点 M 分桿长成 a 和 b。已知桿的傾角 φ 依規律 $\varphi=\omega t$ 而变化，其中 ω 为一常量。求点 M 的运动規律和运动軌跡。

解：研究点 M 的运动，以两固定且互相垂直的直綫为坐标軸如图 11.3。从三角形 BMC 与 AMD 可得：

$$x=a\cos\varphi,\qquad y=b\sin\varphi$$

以 $\varphi=\omega t$ 代入，得：

$$x=a\cos\omega t,\qquad y=b\sin\omega t$$

这就是点 M 的运动规律。为了求出軌跡，可从上式中消去 t，得

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\cos^2\omega t+\sin^2\omega t=1$$

所以，点 M 的軌跡是一个椭圆，中心在原点，而半軸各为 a 与 b。椭圆仪(即画椭圆的仪器)就按这原理制成的。

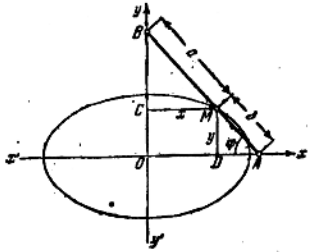

图 11.3

例 11.2　蒸汽机汽缸Z(图11.4)中的活塞 M，有活塞桿BM連至十字头B。十字头 B 又經連桿AB連至随同軸O轉动的曲柄OA的点A。这机构称为曲柄連桿机构。以 r 与 l 分别代表曲柄OA与連桿 AB 的长度，并假定軸 O 勻速旋轉，亦即：曲柄与汽缸軸綫之間的夹角 φ 与时間成比例改变，$\varphi=\omega t$，式中 ω 是一常数。試写出活塞的运动方程式。

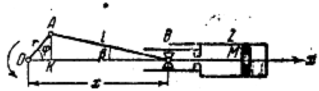

图 11.4

解：活塞 M 的运动显然与十字头 B 的运动并无区别。所以，現在的問題就是要写出十字头的运动方程式。取汽缸軸綫作为軸 x，取点 O 为坐标原点，以 x 代表点 B 的坐标，須将 x 用时間 t 的函数表示。从点 A 画出軸 x 的垂綫 AK，則：

$$x=OK+KB。$$

另一方面，設用 β 代表連桿 AB 与軸 x 之間的夹角，則

$$OK=r\cos\varphi,\qquad KB=l\cos\beta,$$

因而

$$x=r\cos\varphi+l\cos\beta。$$

現在来求出角 β 与角 φ 之間的关系。应用正弦定理于三角形 OAB，可得

$$\frac{\sin\beta}{r}=\frac{\sin\varphi}{l},\quad 或\quad \sin\beta=\frac{r}{l}\sin\varphi。$$

为簡便起見，以 λ 代表比值 $\frac{r}{l}$。于是

$$\sin\beta=\lambda\sin\varphi,\qquad \cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}。$$

将上面結果代入 x 的公式，得

$$x=r\cos\varphi+l\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}。$$

現在只須将 $\varphi=\omega t$ 代入，即得所求的运动方程式：

$$x=r\cos\omega t+l\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}。\qquad (a)$$

式中 λ（曲柄长度对連桿长度之比）的数值普通在 $\frac{1}{4}$ 与 $\frac{1}{6}$ 之間，因 λ^2 是比較小的数值，上面求出的活塞运动方程式可加以簡化。

应用牛頓的二項式公式将 $\cos\beta=\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}$ 展开，可得

$$\cos\beta=1-\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2}\lambda^4\sin^4\varphi+\cdots\cdots=$$

$$=1-\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi-\frac{1}{8}\lambda^4\sin^4\varphi+\cdots\cdots$$

式中 $\frac{1}{8}\lambda^4$ 已极微小(如 $\lambda=\frac{1}{4}$，則 $\frac{1}{8}\lambda^4=\frac{1}{2048}$)，級数中以后包括 λ^6，λ^8 等等各項，数值更小。将这些項全数略去，得近似式：

$$\cos\beta=1-\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi=1-\frac{1}{2}\lambda^2\frac{1-\cos2\varphi}{2}=1-\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^2}{4}\cos2\varphi$$

因此得

$$x=r\cos\varphi+l\left(1-\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^2}{4}\cos2\varphi\right)$$

以 $\lambda l=r$ 代入，得

$$x=r\left(\cos\varphi+\frac{\lambda}{4}\cos2\varphi\right)+l-\frac{\lambda r}{4}$$

以 $\varphi=\omega t$ 代入，即得十字头（或活塞）运动的近似方程式：

$$x=r\left(\cos\omega t+\frac{\lambda}{4}\cos2\omega t\right)+l-\frac{\lambda r}{4}。\qquad (b)$$

这方程式比准确式(a)較易应用，而在大多数实际問題中这近似式已足够准确。

§11.2 矢量导数

上节中我們見到，动点的矢徑 $\vec{r}$ 是隨时間而变化的矢量。这种模和方向隨时間而变化的矢量称为变矢量。以后将見到的速度、加速度、动量和动量矩等也都是变矢量。因此在进一步研究点的运动以前，有必要先討論矢量导数。

設有变矢量 $\vec{a}$ 按一定規律隨时間变化，即把 $\vec{a}$ 看成时間的連續矢量函数：

$$\vec{a}=\vec{a}(t)$$

設在瞬时 t、t_1、t_2、t_3、…，該矢量函数 $\vec{a}(t)$ 的値各为 $\vec{a}$、$\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$、$\vec{a_3}$、…（图11.5）。将各矢量自任意选擇的定点 O 画出，在自变数連續改变的情况下，

諸矢量的末端形成某一条曲綫，該曲綫称为矢量$\vec{a}$的**矢量端图**。举例来說，动点M的軌跡就是它的矢徑$\vec{r}$的矢量端图。

取任意两个邻近的瞬时 t 和 $t+\Delta t$。与这两瞬时对应的矢量函数的值各为$\vec{a}=\vec{a}(t)$ 和$\vec{a'}=\vec{a}(t+\Delta t)$，并以 $\Delta\vec{a}$ 代表$\vec{a}(t+\Delta t)$ 与 $\vec{a}(t)$之矢量差，即

$$\Delta\vec{a}=\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)。$$

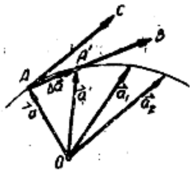

图 11.5

在图 11.5 上，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$和$\vec{a'}=\overrightarrow{OA'}$，$\Delta\vec{a}=\overrightarrow{AA'}$。对应于自变量 t 的增量 Δt，矢量 $\Delta\vec{a}$ 称为矢量函数$\vec{a}(t)$的增量。

作出新矢量$\dfrac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}=\overrightarrow{AB}$；这矢量的方向与矢量 $\Delta\vec{a}$ 相同，大小等于$\Delta\vec{a}$的大小乘以标量$\dfrac{1}{\Delta t}$。

現令 Δt 趋近于零而求其极限：当 $\Delta t\to 0$ 时，矢量 $\Delta\vec{a}\to 0$，比值$\dfrac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$的极限称为矢量$\vec{a}$对自变量 t 的导数，并以$\dfrac{d\vec{a}}{dt}$表示，即

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}。$$

由此知：**矢量的导数是一新矢量，它的大小等于 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{|\Delta\vec{a}|}{\Delta t}$，它的方向沿矢量端图相应点的切綫方向。**

从上述矢量导数的定义，推論得下面一些矢量微分的簡单规则：

(1) 常矢量(矢量的模和方向都不隨时間改变)的导数等于零，即

$$若\vec{a}=常量，則\quad\frac{d\vec{a}}{dt}=0。$$

(2) 矢量之和的导数等于各矢量的导数之和，即

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})=\frac{d\vec{a}}{dt}+\frac{d\vec{b}}{dt}-\frac{d\vec{c}}{dt}$$

(3) 矢量函数$\vec{a}(t)$与数性函数 $m(t)$ 的乘积的导数如下：

$$\frac{d}{dt}(m\vec{a})=\frac{dm}{dt}\vec{a}+m\frac{d\vec{a}}{dt}。$$

如若 $m=$常数，则 $\frac{dm}{dt}=0$。在这种情况下 $\frac{d}{dt}m\vec{a}=m\frac{d\vec{a}}{dt}$。

(4) 两个变矢量标积的导数为

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}。$$

(5) 两个变矢量矢积的导数为

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})=\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}。$$

以上各点的証明与数学分析中对应公式的証明完全一样，所以这里証明从略。

下面証明一个重要定理——矢量导数投影定理：**一矢量的导数在固定軸上的投影等于这矢量在該軸上投影的导数。**

将变矢量 $\vec{a}$ 沿固定直角坐标軸分解，則得

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

式中坐标軸之单位矢量 $\vec{i}$、$\vec{j}$ 和 $\vec{k}$ 是常矢量；a_x、a_y 和 a_z 是变矢量 $\vec{a}$ 在相应的坐标軸上的投影，因而：$a_x=f_1(t)$，$a_y=f_2(t)$，$a_z=f_3(t)$。将上列矢量等式对时間求导数，并应用上述矢量微分規則 (1)、(2) 和 (3)，得

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\frac{da_x}{dt}\vec{i}+\frac{da_y}{dt}\vec{j}+\frac{da_z}{dt}\vec{k}。$$

这是导数 $\frac{d\vec{a}}{dt}$ 沿坐标軸的分解式，因而 $\vec{i}$、$\vec{j}$ 和 $\vec{k}$ 的系数就是这矢量在相应軸上的投影，所以得

$$\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_x=\frac{da_x}{dt},\ \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_y=\frac{da_y}{dt},\ \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_z=\frac{da_z}{dt}。$$

于是定理得到証明。

§11.3 点的速度

点的运动方程式給出了点在所选的坐标系中每一瞬时的位置。但是

为了要知道点之运动的快慢和在每一瞬时的运动方向时，需要引入一个新的概念——速度的概念。

速度是点的矢径对时間的导数　設动点M按規律$s=f(t)$沿已知軌跡运动(图11.6)。在某一瞬时t，动点在軌跡上M点的位置，經过較短的时間間隔Δt之后，即在瞬时$t+\Delta t$，該点的位置是M'。其相应的矢徑为$\vec{r}(t)$和$\vec{r}(t+\Delta t)$。矢量$\overrightarrow{MM'}=\Delta\vec{r}$称为点在时間$\Delta t$内的**位移**。从$M$点起，沿$MM'$方向作出一矢量$\overrightarrow{MK}$，令它的模等于位移$\overrightarrow{MM'}$的大小与相应的时間間隔$\Delta t$的比值。矢量$\overrightarrow{MK}$称为在时間間隔$\Delta t$内点的**平均速度**，以$\vec{v}^*$表示，则

$$\vec{v}^*=\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\overrightarrow{MK}。$$

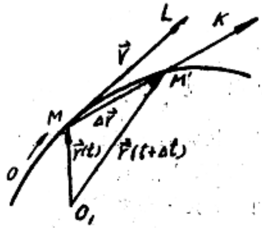

图 11.6

令Δt趋近于零，这时，M'点趋近于M点的位置。在极限情况下，矢量$\vec{v}^*$的方向和軌跡在M点的切綫方向相同，而它的模等于$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{MM'}}{\Delta t}$或$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$。图11.6上$\overrightarrow{ML}$是$\overrightarrow{MK}$所趋近的极限。

当$\Delta t\to 0$时，平均速度$\vec{v}^*$的极限称为动点在瞬时t的速度，以$\vec{v}$表示，则

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}^*=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{ML}。$$

按上节矢量导数的定义，$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$，因而

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{11.4}$$

即速度按大小和方向等于动点的矢徑对时間的导数。

自然法表示速度　以Δs表示动点的弧坐标在Δt时間内的增量，则$|\Delta s|$等于弧长$\overset{\frown}{MM'}$。因而速度的大小：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{MM'}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{MM'}}{|\Delta s|}\cdot\frac{|\Delta s|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{MM'}}{|\Delta s|}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta s|}{\Delta t}$$

上式中　$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\overline{MM'}}{|\Delta s|}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\overline{MM'}}{\overset{\frown}{MM'}}=1$

因此　$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta s|}{\Delta t}=\left|\frac{ds}{dt}\right|=|f'(t)| \tag{11.5}$$

即速度$\vec{v}$的方向是沿軌跡的切綫，而它的模等于弧坐标 s 对时間导数的絕对値。

如导数$\dfrac{ds}{dt}$是正値，則 s 値随时間的增加而增加，也就是点沿軌跡的正向运动；如$\dfrac{ds}{dt}$是負値，則点沿軌跡的負向运动。

根据速度在直角坐标軸上的投影求速度的大小和方向　將矢量等式(11.4)投影在直角坐标系各坐标軸上，根据矢量导数投影定理(§11.2)可知，速度在坐标軸上的投影等于矢徑$\vec{r}$在相同坐标軸上的投影对时間的导数。但矢徑$\vec{r}$在坐标軸上的投影就是动点的坐标 x、y 和 z；因而速度的投影可表示如下：

$$v_x=\frac{dx}{dt},\qquad v_y=\frac{dy}{dt},\qquad v_z=\frac{dz}{dt} \tag{11.6}$$

即速度在各坐标軸上的投影等于动点的各对應坐标对时間的一阶导数。

設已知以直角坐标表示的动点的运动方程式：$x=f_1(t)$，$y=f_2(t)$ 和 $z=f_3(t)$，速度的投影不难求得。則表示速度的大小和方向余弦的公式如下：

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \tag{11.7}$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\vec{v},\vec{i})&=\frac{v_x}{v}=\frac{\dfrac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}}\\
\cos(\vec{v},\vec{j})&=\frac{v_y}{v}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}}\\
\cos(\vec{v},\vec{k})&=\frac{v_z}{v}=\frac{\dfrac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}}
\end{aligned}\right\} \tag{11.8}$$

例 11·3　已知M点的运动方程式是

$$x=b\cos^2(kt),\qquad y=b\sin^2(kt)$$

需求点的軌跡以及該点沿軌跡的运动規律。

解：欲求点的軌跡，必須从运动方程式中消去时間 t。在本題中，只須把运动方程式相加就得出軌跡方程式，$x+y=b$，这是直綫的方程式，这直綫在两坐标轴上的截距都等于 b（图11.7）。在初瞬 $t=0$ 时，$x_0=b$，$y_0=0$；因此在这瞬时，M点是在轴上M_0处。經过时間間隔$t_1=\frac{\pi}{2k}$后，得

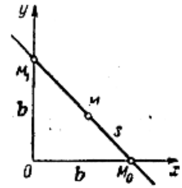

图 11.7

$$x_1=b\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\text{ 和 }y_1=b\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=b$$

因此，在瞬时 t_1，M点在 y 軸上的M_1,处；經过时間間隔 $T=2t_1=\frac{\pi}{k}$后，得：

$$x=b\cos^2(\pi)=b\text{ 和 }y=b\sin^2(\pi)=0$$

因此，該点又回到其起始位置M_0处；而往后則是这运动的重复。由此可知，点在M_0M_1綫段上振动，其振动的週期等于：$T=\frac{\pi}{k}$。

現求这动点的速度，将运动方程式对 t 微分，得：

$$v_x=\frac{dx}{dt}=-2bk\ \cos(kt)\sin(kt)=-bk\sin(2kt);$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=2bk\ \sin(kt)\cos(kt)=bk\sin(2kt)$$

由此可得：　$v=\sqrt{2b^2k^2\sin^2(2kt)}=\sqrt{2}\,bk\,|\sin(2kt)|$

因点的軌跡是一直綫，所以矢量$\vec{v}$的方向也是沿这直綫。在求得点的速度后，就不难求出点沿軌跡的运动規律；如以点到起始位置 M_0 的距离 s 表示該点在軌跡上的位置，即得：

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2}\,bk\sin(2kt)$$

由此　$ds=\sqrt{2}\,bk\ \sin(2kt)\ dt$

因而　$s=\sqrt{2}\,bk\int\sin(2kt)\ dt=-\frac{b\sqrt{2}}{2}\cos(2kt)+C$。

为了决定积分常数C，应注意到当 $t=0$ 时(在初瞬时)，$s_0=0$，代入上列方程式得：

$$0=-\frac{b\sqrt{2}}{2}+C$$

所以 $$C=\frac{b\sqrt{2}}{2}$$

将这 C 值代入，得 $$s=\frac{b\sqrt{2}}{2}[1-\cos(2kt)]=\sqrt{2}\,b\sin^2(kt)$$

这方程式就是所求的点沿巳知軌跡的运动規律。

§ 11.4 点的加速度

加速度是点的速度矢量对时間的导数 設在瞬时 t，动点在軌跡上 M 点的位置(图11.8a)，它的速度是 $\vec{v}$；經过极短的时間間隔 Δt 后，該点的位置是 M'，而速度是 $\vec{v}'$。将矢量 $\vec{v}'$ 移到 M 点，以

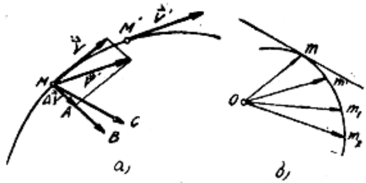

图 11.8

矢量 $\vec{v}'$ 为对角綫并以矢量 $\vec{v}$ 为一边作平行四边形，矢量 $\overrightarrow{MA}$ 就是在时間 Δt 內速度的增量，即 $\overrightarrow{MA}=\vec{v}'-\vec{v}=\Delta\vec{v}$。

沿矢量 $\overrightarrow{MA}$ 的方向作一矢量 $\overrightarrow{MB}=\frac{\overrightarrow{MA}}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ 称为**在时間 Δt 內点的平均加速度。当 $\Delta t\to 0$ 时，平均加速度所趋近的极限稱为动点在該瞬时的加速度**，以 $\vec{a}$ 表示。則

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$$

或
$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{11.9}$$

为了确定瞬时加速度的方向，作出动点的速度矢量端图(图11.8b)。根据 § 11.2所述，得：**在瞬时 t 时，M 点的加速度的方向和速度矢量端图在相应点 m 上切綫方向相同。**

根据加速度在直角坐标軸上的投影求加速度的大小和方向。将矢量等式(11.9)投影在直角坐标系各坐标軸上，并根据矢量导数投影定理(§ 11.2)可知，加速度在任一軸上的投影等于速度在同一軸上的投影对时間的导数，因而

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2},\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2},\quad a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2} \tag{11.10}$$

即加速度在各坐标轴上的投影等于动点各对应坐标对时間的二阶导数。

由此可得表示加速度的大小和方向余弦的公式如下：

$$a=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \tag{11.11}$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\vec{a},\vec{i})&=\frac{\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}\\
\cos(\vec{a},\vec{j})&=\frac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}\\
\cos(\vec{a},\vec{k})&=\frac{\dfrac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}
\end{aligned}\right\} \tag{11.12}$$

§11.5　加速度沿自然坐标轴分解

当点的运动軌跡已知时，用自然法来研究点的运动加速度是很重要的。因为通过这一方法，我們可以更清楚地明了加速度的意义，同时还可以判断点的运动性質。为此，我們先来介紹自然坐标軸。

自然坐标軸　設質点的运动軌跡为 AMB，当瞬时 t 时，此質点在軌跡上 M 点处，过 M 点作軌跡的切綫，并且以弧坐标增加的方向为切綫正方向，切綫的单位矢量是 $\vec{\tau}$。

在軌跡上正向一边与 M 点接近的点 M' 处，另作一切綫，其单位矢量是 $\vec{\tau'}$，过 M 点作直綫 Mt' 保持始終平行于 $\vec{\tau'}$。則此两相交直綫决定一平面 tMt' (图11.9)。这个平面在空間的方位随軌跡的形状而不同，现在令点 M' 无限趋近于点 M，在极限情形下，M' 点和 M 点重合；因为当 M' 点移动时，矢量 $\vec{\tau'}$ 的方向发生变化，直綫 Mt' 的方向也发生变化，因而 tMt' 平面的方位

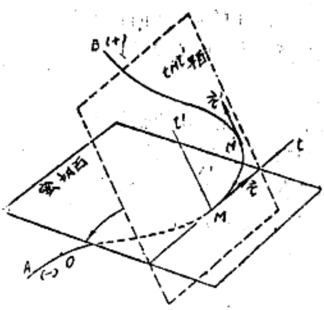

图 11.9

也随之发生变化；显然这平面将繞直綫 Mt 轉动，并逐漸趋近于一定的极限位置。当 $M' \to M$ 时，tMt' **平面的极限位置稱为該曲綫軌跡在M点的密切面**(图11.9)。若軌跡是平面曲綫，則曲綫所在的平面就是密切面。

过M点作平面垂直于切綫，此平面称为法面。显然，任何通过M点并在法面內的直綫都垂于切綫，因此都是曲綫在M点的法綫。密切面与法面的交綫称为曲綫的主法綫。換句話說，主法綫是在密切面內的法綫。垂直于主法綫的法綫称为曲綫的付法綫。

三个互相垂直的軸：(1)**切綫**，以指向弧坐标增加的方向为正，切綫单位矢量以$\vec{\tau}$表示；(2)**法綫**以指向軌跡內凹一面的方向为正，主法綫单位矢量以$\vec{n}$表示，和(3)**副法綫**，付法綫单位矢量以$\vec{b}$表示，而其正方向的決定于下式：

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}。$$

上述三軸构成通常所称的**自然坐标軸**(图11.10)。

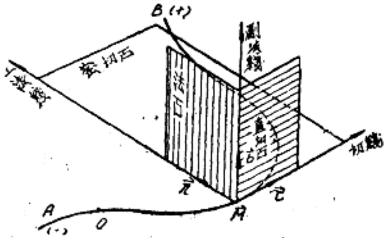

图 11.10

沿主法綫的正向取綫段MC等于軌跡在M点的曲率半徑ρ：以C为圓心，在密切面內作一半徑为ρ的圓，則这圓在M点与曲綫有共同的切綫和相等的曲率，这圓称为**密切圓或曲率圓**，圓心C称为該曲綫在M点的**曲率中心**。

加速度沿自然坐标軸的分解　設点沿某曲綫軌跡运动，在瞬时t，該点在軌跡上的M点，而在瞬时$t+\Delta t$，則在M'点(图11.13)。以$|\Delta s|$表示微分弧MM'的长度。以$\vec{v}$表示点在瞬时t的速度，則

$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau} \qquad (a)$$

其中v_τ是速度在切綫軸上的投影。显然v_τ的絕对值等于速度的模，至于v_τ的符号，如果在此瞬时，动点沿軌跡正向运动，則为正号，相反时为負号。

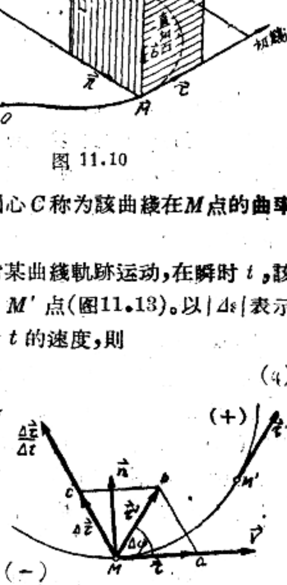

图 11.11

将上式对时間求导数，得：

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt} \qquad (b)$$

上式右边第二項含有切綫单位矢量对时間的导数$\frac{d\vec{\tau}}{dt}$，为了求这矢量的模和方向，我們可以引用极限的方法来研究。由于，

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}$$

而

$$\Delta\vec{\tau}=\vec{\tau}'-\vec{\tau}=\overrightarrow{MC}$$

同时$\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}$在 aMb 平面內，它的方向沿$\overrightarrow{MC}$。現說明当 $\Delta t\to 0$ 时，矢量$\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}$的极限。

因为当 $\Delta t\to 0$ 时 aMb 平面的极限位置是軌跡在M点的密切面，由此可知，矢量$\frac{d\vec{\tau}}{dt}$必在密切面內。

因为在三角形 aMb 中，$Ma=|\vec{\tau}|=1$，$Mb=|\vec{\tau}'|=1$，$\angle aMb=\Delta\varphi$ 是微小角，所以

$$|\Delta\vec{\tau}|=\overline{MC}=2\,Ma\cdot\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\doteq\Delta\varphi。$$

引用 $\Delta\vec{\tau}$的单位矢量$\vec{n}'$，滿足 $\Delta\vec{\tau}=\vec{\tau}'-\vec{\tau}=\Delta\varphi\cdot\vec{n}'$。則

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\vec{n}'=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}\cdot\vec{n}'$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\vec{n}'=\frac{1}{\rho}v_\tau\vec{n}$$

其中 ρ 是曲綫在 M 点的曲率半徑。所以矢量 $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$可以用下式表示：

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt}=\frac{v_\tau}{\rho}\vec{n}。\qquad(11.13)$$

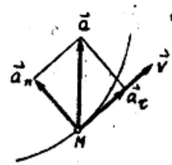

图 11.12

代入(b)式，因为 $v_\tau^2=v^2$，所以得：

$$\vec{a}=\frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\vec{n}\qquad(11.14)$$

等式 (11.14) 是加速度矢量沿自然坐标軸分解公式。第一項$\frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau}$

称为**切向加速度**，第二項$\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$称为**法向加速度**(图11.12)。上式表示加速度沿付法綫方向的分量等于另，可見**加速度在密切面內**。

在分解公式(11.14)中，单位矢量$\vec{\tau}$和$\vec{n}$的系数是加速度在切綫和主法綫軸上的投影，以a_τ和a_n表示，则

$$\left.\begin{aligned} a_\tau &= \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \\ a_n &= \frac{v^2}{\rho} \\ a_b &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11.15}$$

另外

如果$\frac{dv_\tau}{dt}$是正值，$\vec{a}_\tau$沿切綫的正向；反之，若$\frac{dv_\tau}{dt}$是負值，$\vec{a}_\tau$沿切綫軸的負向。如果点的速度和加速度在切綫軸上的投影同号，点作加速度运动；異号，作减速运动。至于法向加速度$\vec{a}_n$，則因为$\frac{v^2}{\rho}$之值永远为正，所以$\vec{a}_n$的方向总是指向軌跡該点的曲率中心（所以也称**向心加速度**）。

表示加速度的大小的公式如下：

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \tag{11.16}$$

現在来研究点运动的三个特殊情况：

1) **直綫运动** 因为直綫的曲率半徑$\rho=\infty$，所以$a_n=\frac{v^2}{\rho}=0$，在这种情况下，

$$\vec{a} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau}。$$

2) **匀速曲綫运动** 因为匀速运动时点的速度的大小保持不变，即$v_\tau=$常数，所以$a_\tau=\frac{dv_\tau}{dt}=0$，在这种情况下，$\vec{a}=\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$。

結合以上两种情况来看，直綫匀速运动时，点的加速度等于零。

在非匀速运动中，当速度的值到达最大值或最小值时，則$\frac{dv_\tau}{dt}=0$，因而在該瞬时切向加速度必等于零。

3) **匀變速曲度运动** 此时$a_\tau=\frac{dv_\tau}{dt}$常数。讀者可自行导出下列公