旋转矩和地震矩

顾浩鼎　　　　陈运泰

（辽宁省地震局）（国家地震局地球物理研究所）

摘　要

本文给出了旋转与旋转矩的物理关系，强调了旋转矩与连续介质力学中通常意义下的力矩的差别。应用旋转矩的概念解释了极震区内经常有的烟囱和门垛一类物体的旋转位错的著名宏观破坏现象。我们也阐明了地震矩和旋转矩的关系。作为例子，通过旋转矩的定义计算了一个走滑断层的弹性静位错地震矩。结果表明，由旋转矩给出的与地震学中引入的地震矩定义是一致的。

引　言

我们已经在文献[1]中给出了用速度矢量和旋转矢量描述弹性介质运动状态的动力学关系，并且强调了旋转作为一种独立运动的物理意义。

我们知道，旋转不代表介质中某点邻域内介质的变形，而是象刚体一样的转动。然而，在经典弹性理论中却缺少与之对应的物理定律。因为作为经典弹性理论基础的胡克定律只与形变张量或应变张量有关，而与旋转无关。在参与弹性介质动力学过程中，旋转的行为已通过弹性介质的动力学关系给出。现在,我们希望能找到与旋转张量有关的物理定律。

旋转能和旋转矩

在文献[1]中，我们给出过弹性横波所满足的能量守恒定律：

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S}_t \quad .$$

式中E_t和S_t分别表示弹性介质中横波的能量密度和能流密度矢量。其中：

$$E_t = \frac{1}{2}\rho v_t^2 + \frac{1}{2}\mu\Omega^2$$

$$\mathbf{S}_t=\mu\Omega\times v_t\ ,$$

v_t和Ω分别为对应横位移的速度矢量和旋转矢量。能量密度表示式中第一项代表横波通过时质点的动能。我们把仅与旋转有关的第二项称为旋转能，用U表示。根据力学理论知道，力矩等于该能量对旋转角的导数。现在旋转代表的正是旋转角，所以单位体积弹性介质的力矩或矩密度m可表示为

$$m=\frac{\partial U}{\partial\Omega}=\mu\Omega\ .$$

由于矩矢量和它引起的旋转角矢量一致，故有

$$\mathbf{m}=\mu\Omega\ . \tag{1}$$

我们称$\mathbf{m}$为旋转矩。由于旋转矢量Ω是一个轴矢量，所以旋转矩是一个反对称矩张量。不难注意到，旋转与旋转矩之间的简明关系具有物理定律的形式。这样，形变梯度张量中，对称的形变张量部分对应的物理定律是胡克定律，它给出应力和应变的本构关系，而反对称的旋转张量与旋转矩之间亦有如（1）式给出的本构关系 这个关系在旧理论中是不存在的。

从（1）式可以看出，在弹性理论中表示切应力和切应变之比的拉梅常数（即剪切模量）μ，还具有新的物理意义：单位体积介质旋转单位角度的力矩。

不过，需要注意的是，（1）式所表示的旋转矩与通常所考虑的介质中某一点力F产生的单位体积的力矩$M=r\times F$或它的分量表示

$$M_{ik}=F_i x_k-F_k x_i=\frac{\partial\sigma_{il}}{\partial x_l}x_k-\frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial x_l}x_i \tag{2}$$

有所不同。其中σ_{il}，σ_{kl}为应力，x_i，x_k为力点坐标。（2）式所代表的是相对选定的某个坐标系原点的力矩。（1）式代表的则是相对该点坐标本身或该处体元质心的力偶矩。现在我们通过一个具体的例子来说明上述两种矩的区别。我们选择Ⅲ型裂纹问题来讨论 对于Ⅲ型撕开型裂纹，裂纹端点附近的应力和位移均为[2]

$$\begin{aligned}
\tau_{xz}&=\frac{-K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\\
\tau_{yz}&=\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\\
u_z&=\frac{K_{\mathrm{III}}}{\mu}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{3}$$

其中$K_{\mathrm{III}}=\tau\sqrt{\pi a}$为应力强度因子。我们先来计算相对坐标系原点（裂纹端点）的力矩 根据（2）式定义，由（3）式知$\sigma_x=\tau_{xy}=0$，而τ_{xz}与Z无关，故

$$F_x=\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0$$

同理，$F_y=0$。

所以只有矩的x和y分量：

$$M_{yz}=-F_z y=-\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}\right)y$$

$$M_{zx}=F_z x=\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}\right)x$$

通过简单的微商，不难求得

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}=\frac{K_{\mathrm{III}}}{2\sqrt{2\pi}}r^{-\frac{3}{2}}\sin\frac{3\theta}{2}$$

$$\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}=\frac{-K_{\mathrm{III}}}{2\sqrt{2\pi}}r^{-\frac{3}{2}}\sin\frac{3\theta}{2}$$

显然有

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}=0$$

因此，$M_x=-M_{yz}=0$，$M_y=-M_{zx}=0$。即介质中任一点相对坐标原点的矩等于零。但是，对于介质中任一点相对该点坐标本身的旋转矩，则明显存在。从（2）式容易得到裂纹端点附近的旋转场

$$\Omega_x=\frac{\partial u_z}{\partial y}=\frac{K_{\mathrm{III}}}{\mu\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\Omega_y=-\frac{\partial u_z}{\partial x}=\frac{K_{\mathrm{III}}}{\mu\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}$$

由此，根据（1）式得旋转矩

$$m_x=\mu\Omega_x=\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}=\tau_{yz},$$

$$m_y=\mu\Omega_y=\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}=-\tau_{xz},$$

注意，旋转矩分量m_x和m_y在数值上恰好等于切应力τ_{yz}和$-\tau_{xz}$，它们的量纲仍是单位体积的矩。由上述例子不难得知，只要弹性介质中存在旋转场，那末各处相应的旋转矩就会存在

利用旋转矩的概念，我们可以方便地解释出现在地震区的一些著名的宏观破坏现象。大地震发生时，在极震区的一些诸如烟囱和门垛一类孤立的建筑物常常会出现旋转错位，这些建筑物可以相对它们的柱轴转动少则几度多至二三十度。根据（1）式，我们可以计算造成它们旋转错位的旋转矩大小。例如，一个0.5 m ×0.5 m ×2.0 m的门垛，代表旋转运动的S 波射入后，设Ω的数量级为10^{-5},而剪切模量μ假设为$2\times10^{10}N\cdot m^{-2}$则得到旋转矩的数量级为$10^5$ $N\cdot m$。由已知宏观的旋转角度，我们甚至可以计算发生旋转位错运动时的角加速度。

引入旋转矩后的动力学关系

弹性介质的动力学关系[1]中关于旋转场旋度的方程为

$$\nabla\times\Omega=-\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\gamma^2}{K}\nabla P\,。$$

现在，根据（1）式，如果介质中某一点存在旋转矩，那末该处必有相应的旋转存在。因此，上述方程还应考虑旋转矩对旋转场的贡献，而修改为如下形式：

$$\nabla\times\Omega=-\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\gamma^2}{K}\nabla P+\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{m}\,。\qquad(4)$$

这样，作为旋转场的源，除了平均应力集中和加速度项之外，还增加了旋转矩。注意，∇P和$\nabla\times m$都具有力密度量纲。旋转矩的旋度在介质内部可以为零（$m\neq0$）如Ⅲ型裂纹。但是在介质表面（如裂纹表面）却可以不为零。

由于动力学关系作了修改，因此通过动量守恒定律给出的场与源的相互作用[1]

$$F=\frac{\mu r^2}{K}\nabla P\times\Omega+\frac{\mu}{K\beta^2}\frac{\partial P}{\partial t}\,v$$

也应随之增加与旋转矩有关的相互作用项$\mathbf{F}'$。不难证明，这一项可表示为

$$\mathbf{F}'=(\nabla\times\mathbf{m})\times\Omega。\qquad(5)$$

应当强调，(5)式中旋转矩的旋度既然具有力密度的量纲,由于Ω的存在从而m在裂纹端点具有无限大的奇异性，因而我们同样可以把$\nabla\times m$看作类似于应力集中的旋转矩集中。无论是应力集中还是旋转矩集中，都最终表现为相互作用的集中。

旋转矩与地震矩

为了进一步说明旋转矩的意义，作为应用，我们利用旋转矩概念（1）式来计算一个走向滑动断层在地震前的静位错地震矩。

假设Σ是一个垂直的走向滑动断层的矩形断层面。Σ位于$x=0$的平面，即其走向平行y轴。令L，W和t_h分别为该断层的长度、宽度和厚度。设断层滑动沿y轴方向,因此，

位错 Δu 没有 x 和 z 分量，即

$$u_x = u_z = 0$$

$$u_y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u, & x \geqslant t_h/2 \\ -\frac{1}{2}\Delta u, & x \leqslant -t_h/2 \end{cases} \tag{6}$$

其中 u 表示断层滑动前 Σ 两侧的静位移。Δu 则表示 Σ 两侧介质弹性形变的静力学位错。设位移及其梯度是连续的。根据（1）式，我们可以求出该断层的矩

$$\mathbf{M} = \iiint_V \mathbf{m}\, d\tau = \mu \iiint_V \Omega\, d\tau, \tag{7}$$

其中 V 代表震源体积。为简单起见，设 μ 为常数。由于位移如（6）式所示，故仅有 Ω_z 分量，从（7）式进一步得到

$$M_z = \mu W \iint_S \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx\, dy$$

$$= \mu W \oint_C u_y dy \tag{8}$$

其中 S 是该断层垂直 Z 轴的任意截面，而C是以 $x = \pm t_h/2$ 和 $y = \pm L/2$ 直线为界围绕 S 的积分路径。（8）式根据位移和它的梯度的连续性利用格林定理将面积分变换为曲线积分。考虑到（6）式，上面的积分容易求得：

$$M_z = \mu W \Delta u L = \mu \Delta u S_o,$$

其中 $S_o = LW$ 是断层面 Σ 的面积。显然，这正是通常在地震学中引入的地震矩。可见，从旋转矩张量可以得到地震矩，而由（1）式表示的旋转矩有明确的物理意义，这是它区别于地震矩的重要之处。

结束语

在经典的弹性理论中，旋转的意义长期以来被人们忽视，所以也根本不存在旋转与矩的物理关系。旋转与旋转矩之间十分简单的关系补充了缺失的物理定律。这样，形变梯度张量中所包括的对称形变张量和反对称旋转张量分别有了相应的物理定律与之联系。这是一种完美的结局，因为我们没有理由只偏爱形变张量而忽视旋转张量。它们原就和谐地统一在自然界中，以其各自的意义平等地联系在一起。

参考文献

[1] 顾浩鼎，陈运泰，裂纹端部旋转与应力集中的相互作用，东北地震研究，3.1，1—9，1987·
[2] 褚武扬编著，断裂力学基础，科学出版社，1979·

Rotation Moment and Seismic Moment

Gu Haoding

(The Seismological Bureau of Liaoning Provience)

Chen Yuntai

(Institute of Geophysics, State Seismological Bureau)

Abstract

This paper gives physical relationship between rotation and rotation moment. We emphasize that rotation moment is different from moment in usual meaning on mechanics of continuity medium By using concept of rotation moment, we can interpret some famous macroscopic destruction phenomena appearing often in earthquake region which show rotation dislocation of bodies like chimneis and gate posts. We also expound relationship between seismic moment and rotation moment. As an example, we calculate seismic moment of elastic static dislocation for a strike slip fault according to definition of rotation moment. The result from rotation momet is consistent with usual definition of seismic moment in seismology.