

力 学

导 言

动力学是理论力学的一部分，在这一部分里我们将要研究物体的运动与作用其上的力之间的关系，从这个意义可知运动学和动力学之间的区别在于：在运动学里我们是仅以几何的观象来研究物体的运动而动力学中则是从作用于物体上的力与物体运动的关系上来研究物体的运动情况，为了便于说明在讨论中首先以研究质点在受力后的运动情况然后推广到由许多质点组成而这些质点间存在着约束均不可能互相脱离而作独立运动的质点系（又称机械系统）在受力后的运动情况，显然刚体的运动也是包括于我们这里所指的质点系范畴之中因为刚体是可视作由无限数目的质点群组成而在这种质点群中它们质点之间的距离是始终保持不变的。

在动力学中需要研究的基本问题是可以分为二类，即

- 1) 已知某一质点或质点系的运动，求作用于该质点或质点系上的力。
- 2) 已知作用于某一质点或质点系上的力，求该质点或质点系的运动。

而我们在解决这两类问题时，其方法是立足于和物质运动有密切联系的各种物理量（即为质量，力，冲量，动量，功，能等）之间所存在的数学上的普通关系而进行讨论之。

第十章

动力学的基本概念及定律

§ 10-1 动力学的基本定律

作为动力学基础的定律是以牛顿在1687年在其名著“自然哲学之数学原理”一书中已有明确地建立并作了有系统的叙述以后所有动力学的定理都是以这些定律为基础而进行了数学分析上的推演而得到的，所以我们有先将这些基本定律分述如下：

第一定律：如质点不受任何力的作用，则此质点或者处于静止或者作匀速直线运动，质点的这种保持速度不变的性质称为惯性，而直线匀速运动称为惯性运动。

第二定律：质点受力作用后将产生加速度，这加速度的方向与力的方向相同，而加速度的大小与质点质量的乘积，则等于力的大小，亦即

$$\vec{P} = m \vec{w} \quad (10-1)$$

式中 $\vec{P}$ 代表作用于质点上的力 m 为质点之质量， $\vec{w}$ 表示质点之加速度。

这个式子给出了力、质量、加速度之间的定量关系，它是动力学的基本方程式。在工程单位制中质量的单位为 {力}/{加速度}

$$= \frac{\text{公斤秒}^2}{\text{公尺}}$$

第三定律：两个质点相互作用力，总是大小相等沿联接该二点的直线而方向相反，且分别作用在二物体上，这就是静力学中提到的作用与反作用原理。

第四定律：如在质点上同时有几个力作用着，则此质点的加速度等于这些力分别单独作用于该质点所得诸加速度的几何和。

设在质量为 m 的质点上作用有 $\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n$ 诸力，以 $\vec{w}$ 表示该质点加速度，以 $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ 表示当这些力分别单独作用于质点时，此质点所能产生的加速度，则上述定律指出。

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_n \quad (10-2)$$

上面是质点动力学的几个基本定律，它们都是由人们从实践中总结出来的东西，根据运动总是相对的性质，就发生了究竟以什么样的参考座标为基础来研究物体的运动才正确，亦即上述的定律必须在那种座标系中才能成立？牛顿认为这些定理仅适用于质点对一个绝对静止与物体无关的所谓“绝对静止座标”，这是不合乎辩证唯物论与近代物理中的时间与空间概念，由大量的实践指出在一般的工程问题中可采地球作为基础座标系而不会引进很大的误差。

§10-2 质点系、质点系内力和外力

质点系是由很多质点所组成的质点群，在它们之间存在着某种连繫，使各个质点都不能脱离其它的质点而作单独的运动，这种质点之间的连繫，称为系的内部约束。

上面所讲的质点系，它在空间还是可以任意运动的，因此还必须把这个系和系外的物体连繫起来，这种连繫，称为系的外部约束。

具有内、外部约束的质点系，就成为一个机械系统。

质点系的约束，不论内部的或外部的，都可分为二种类型：动力约束和几何约束，如果系内的各质点，或者系和系外的物体都是通过彼此的吸引而连繫着的，那么这种连繫即为动力的约束。例如宇宙中的太阳系可以看成为一个质点系，系内的各星球即为该系的各质点，各星球之间的万有引力，即为该系的内部的动力约束，太阳系本身又和系外的星球通过相互作用的引力连繫着，这就是该系的外部动力约束，凡是系内各质点的连繫，或者系和系外的物体的连繫，都是服从于预先规定好的几何条件的，这种连繫即为几何约束，例如斜面上有一个物体A和B，它们通过一根没有质量的、也不变长度的绳子彼此连繫着，如图10-1，现将A、B二物体视为二个质点，它们遂成为一个质点系，於是绳子即为该系的内部几何约束；斜面即为它的外部几何约束。

前面曾经述及，刚体也是一个质点系，它的内部约束在该

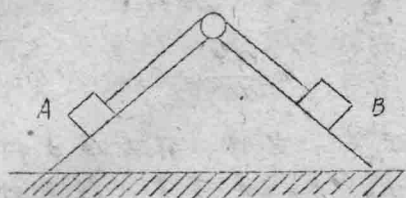


图 10-1

是属于几何约束类型的，因为这种几何约束和一般的不同，所以称刚体为不变系。由此看来在工程力学里所研究的问题，都是质点系的问题，不过这些系的约束，不论内部

或外部，都是几何约束。

系的内质点通过系的内部约束而受到的相互作用称为该系的内力。系的外部约束对系的反作用力称为该系的外力。但在这里须注意下面的一种情况：如果以一个已知质点系中分割出任何一部分来，并将该部分看成为一个单独的质点系，那么在分割的地方，就产生一对相互作用的力，对整个质点系来讲，这些力是该系的内力，但对分割出来的质点系来讲，它们就为外力了。

质点系的内力和外力的分别和静力学中讨论体系时所提到的完全是一样的。

§10-3 质点、质点系的运动微分方程式

一、质点的运动微分方程

设有质点 M (图 10-2) 其质量为 m ，在力 R 的作用下进行运动，加速度为 w 由第二定律知

$$\vec{R} = m \vec{w}$$

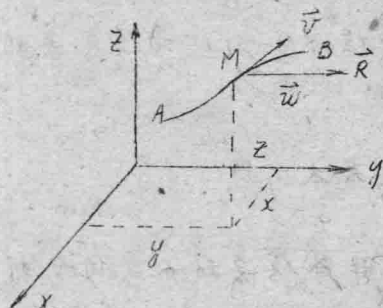


图 10-2

用 R_x, R_y, R_z 代表 $\vec{R}$ 力在各坐标轴上的投影， w_x, w_y, w_z 代表加速度 $\vec{w}$ 的投影。于是

$$R_x = m w_x$$

$$R_y = m w_y$$

$$R_z = m w_z$$

由运动学知

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$w_y = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$w_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\text{故 } m \frac{d^2x}{dt^2} = R_x \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = R_y \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = R_z \quad (10-3)$$

这一组方程，以数量形式表示第二定律，称为质点的运动微分方程。设 $\vec{r}$ 是变力，则 R_x, R_y, R_z 是变量，设同时有几个力作用于质点，则 $\vec{r}$ 应理解为这几个力的合力而 R_x, R_y, R_z 则为这合力的投影。

二、质点系的运动微分方程

设有由几个质点所组成的质点系。在系内任何一个质点上，可能有由系内其他各质点所作用的力，也可能有由这个系以外的质点所作用的力；前已论及前者称为内力，后者称为外力。今取系内的某一质点 M_i ，其质量与加速度各为 m_i 与 w_i ，作用于 M_i 的外力的合力为 $\vec{P}_i$ ，内力的合力为 $\vec{P}'_i$ ，则由牛顿第二定律可得：

$$m_i \vec{w}_i = \vec{P}_i + \vec{P}'_i \quad (10-4)$$

这样的向量方程对整个系只可写出 n 个。设散至直角坐标轴可得

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} &= P_{ix} + P'_{ix} \\ m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} &= P_{iy} + P'_{iy} \\ m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} &= P_{iz} + P'_{iz} \end{aligned} \right\} (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (10-5)$$

这样的方程式只可写出 $3n$ 个方程 (10-5) 是质点系的运动微分方程式的普遍形式。

§ 10-4 动力学的二大基本问题

应用上节所评的微分方程，则可解答质点动力学的下列两类基本问题：

第一类：质点的运动是已知的，求作用于质点的力。

第二类：作用于质点的力是已知的，求质点的运动。

第二类问题是第一类问题的逆问题

一、已知质点的运动求作用于质点的力。

因为质点的质量总是假定为已知的，故这类问题只须根据已知运动方程，运用微分演算求出加速度，从而由上述各力求得未知力，一般说来这一过程是极易解答。

设已知质点 M 的质量为 m ，而它用直角坐标表示的运动方程式为

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

则由方程式 10-3 可知

$$\left. \begin{aligned} R_x &= m \frac{d^2 x}{dt^2} = m f_1''(t) \\ R_y &= m \frac{d^2 y}{dt^2} = m f_2''(t) \\ R_z &= m \frac{d^2 z}{dt^2} = m f_3''(t) \end{aligned} \right\} \quad (10-6)$$

当求出了 R_x, R_y, R_z 之后则所求的力大小和方向即可决定。

若该质点 M 同时受到几个力作用而其中某些力已知某些力未知(如约束力)这时，上式中 R_x, R_y, R_z 即为各已知力及未知力投影的代数和，按此即可求得各未知力。

但在解决非自由质点的运动问题中，以采用自然坐标法较为方便，设以附标 τ, n, b 分别表示各量在轨迹的切线、在法线与付法线方向的投影，则

$$\left. \begin{aligned} R_\tau &= m w_\tau = m \frac{dv}{dt} \\ R_n &= m w_n = m \frac{v^2}{\rho} \\ R_b &= m w_b = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-7)$$

例1. 质点 M 在平面 Oxy 内运动(图 10-3)，质量为 m 运动方程式已知为

$$\begin{aligned} x &= a \cos kt \\ y &= b \sin kt \end{aligned}$$

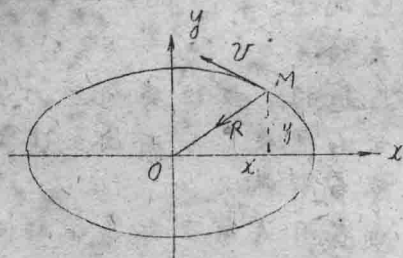


图 10-3

試求作用于质点的力 $\vec{R}$

解：由已知运动方程式得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -K^2x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -K^2y$$

$$\text{故 } R_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = -K^2mx$$

$$R_y = -K^2my$$

而

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = K^2m \sqrt{x^2 + y^2} = K^2mr$$

$$\cos(\vec{R}, \vec{i}) = \frac{R_x}{R} = -\frac{x}{r}$$

$$\cos(\vec{R}, \vec{j}) = \frac{R_y}{R} = -\frac{y}{r}$$

则力 $\vec{R}$ 与向量 $\vec{r}$ (即 $\vec{OM}$) 重叠而指向相反，力 $\vec{R}$ 始终指向中心 O。

例 2 质点 M (图 10-4) 重 P 系于表上的无重软绳下端，在运动开始的瞬时，质点 M 在位置 A。速度等于零，绳与铅直线成 φ_0 角。試求绳内张力 T。

解：将主动力 $\vec{P}$ 与约束反力 T 投影至切向与法向。得：

$$ml \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -P \sin \varphi$$

$$ml \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = T - P \cos \varphi$$

第一式左右两边各乘 $\frac{d\varphi}{dt}$

$$\frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = -\frac{g}{l} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

或可改写为：

$$\frac{1}{2} d \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\frac{g}{l} \sin \varphi d\varphi$$

积分从下限 φ_0 至上限 φ 可得

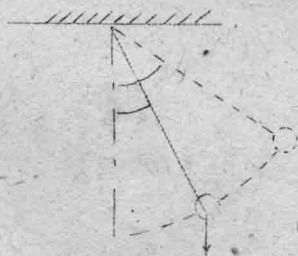


图 10-4

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) \text{ 代入第(2)式}$$

则

$$T = 2P (\cos \varphi - \cos \varphi_0) + P \cos \varphi$$

$$T = P (3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0)$$

可见当质点到达最低位置 ($\varphi=0$) 时, T 有最大值, 例如
 设 $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, 则此最大张力为 $T = 3P$

(二) 已知作用于质点的力求质点的运动

若已知作用于质点的力而要求解它的运动情况, 求它的运动方程式, 这时间题就成为求解微分方程式, 因而论数学性质是比第一类问题困难得多。有时不可能求出准确解, 而只能满足于近似解。

由于作用于质点的力常随运动因素而改变; 因而表示力的公式, 普通是时间, 坐标, 速度的函数以下将讨论质点在几种特殊情况下的运动:

1. 力是时间的函数
2. 力是坐标的函数
3. 力是速度的函数

设作用于质点的力方向保持不变, 而质点又无初速度或有初速度而与力的作用线相重合 (指向可以相同或相反) 则质点将进行直线运动。由运动学可知, 点的曲线运动可以投影成几个直线运动来讨论, 为简单起见, 本节内容主要是质点的直线运动, 取坐标轴 x 与轨迹相重合, 即得:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = R_x \quad (10-8)$$

因 $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}$ 故方程式 (10-8) 可写成

$$m \frac{dv_x}{dt} = R_x \quad (10-9)$$

考虑到 v_x 是 x 的函数又可写成 $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} =$

$$10-8$$

$$= v_x \frac{dv_x}{dx}.$$

于是方程式 (10-8) 又可写成

$$m v_x \frac{dv_x}{dt} = R_x \quad (10-10)$$

随着变力种类的不同可以适当选取式 (10-9) 或式 (10-10)

1) 作用于质点的力假定为时间的函数 $f(t)$ ，并设质点的初速为 v_0 。

按式 (10-9) 可写出

$$m = \frac{dv_x}{dt} = R_x = f(t)$$

或

$$dm v_x = R_x dt$$

上式积分可得

$$m v_x - m v_0 = \int_0^t R_x dt = \int_0^t f(t) dt,$$

以 $\phi(t)$ 代表上式右边的积分，则

$$m v_x - m v_0 = \phi(t)$$

或

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{\phi(t)}{m}$$

$$dx = v_0 dt + \frac{\phi(t)}{m} dt$$

设在初始时刻 $t=0$ 质点的坐标为 x_0 。则上式的积分为

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \phi(t) dt$$

或

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \phi(t) dt.$$

这就是质点在已知力 $f(t)$ 的作用下的运动方程

如质点作回线运动则可按投影方程式来求之

例3. 质量 m 的质点带有电荷 e 以速度 v_0 进入强度按 $E = A \cos Kt$ (其中 K 与 A 为已知常数) 而变的均匀电场中。初速度方向与电场强度垂直 (图 10-5) 电场强度不受电荷的影响。质点在电场中受 $F = -eE$ 的力作用，不计重力，求质点的运动

方程式及軌跡

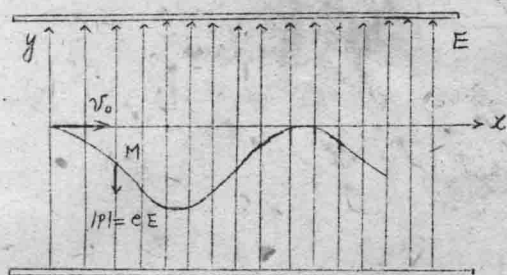


圖 10-5

解：今取平面坐标 y 轴的方向 x 轴沿电荷初速度方向写出质点运动微分方程式

$$m = \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (a)$$

$$m = \frac{d^2y}{dt^2} = -eA \cos Kt \quad (b)$$

積分 (a) 式并根据初始条件决定積分常数得

$$\frac{dx}{dt} = v_0$$

再積分一次

$$\int_0^x dx = v_0 \int_0^t dt$$

得

$$x = v_0 t \quad (B)$$

積分 (b) 式

$$\int_0^{\frac{dy}{dt}} d\left(\frac{dy}{dt}\right) = - \int_0^t \frac{eA}{m} \cos Kt dt$$

得

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{eA}{mK} \sin Kt$$

再積分一次

$$\int_0^y dy = - \frac{eA}{mK} \int_0^t \sin Kt dt \quad \text{得} \quad y = \frac{eA}{mK^2} (\cos Kt - 1) \quad (r)$$

由 (B) 和 (r) = 运动方程式消去 t 即得軌跡方程式：

$$y = \frac{eA}{mK^2} \left(\cos \frac{Kx}{v_0} - 1 \right)$$

2) 作用于质点的力假定为坐标的函数 $f(x)$ 並設质点的初速为 v_0 。

按式 (10-10) 可写出

$$m v_x \frac{dv_x}{dx} = R_x = f(x)$$

或

$$d\left(\frac{m v_x^2}{2}\right) = f(x) dx$$

积分上式得

$$\frac{m v_x^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \int_0^x f(x) dx$$

以 $\phi(x)$ 代表上式右边的积分后, 对 v_x 求解得

$$v_x^2 = v_0^2 + \frac{2}{m} \phi(x)$$

或

$$v_x = \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \phi(x)}$$

根号前的正负号决定于速度 v_x 沿着轴 x 的正向或负向

以 $\frac{dx}{dt}$ 代替 v_x 分离变量后积分得

$$\pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} \phi(x)}} = t$$

这就是质点在已知力 $f(x)$ 作用下的运动方程式 有时可以写成 $x = \varphi(t)$ 的形式

例4. 试讨论质点在地心引力作用下的铅直运动, 空气阻力的影响, 假定可以略去不计; 而地心引力则与质点到地心的距离的平方成反比,

解: 取坐标如图 (10-6) 所示则地心引力 $\vec{P}$ 在轴 x 的投影应为

$$P_x = -\frac{C}{x^2}$$

在地球表面 $P_x = -mg$, $x = R$
可见 $C = mgR^2$

故 $P_x = -mgR^2/x^2$

应用式 (10-10) 得

$$m v_x \left(\frac{dv_x}{dx} \right) = -mgR^2/x^2$$

或 $v_x dv_x = -(gR^2/x^2) dx$

设物瞬时 $t=0$, $v_x = v_0$, $x = x_0$ 积分上式可得

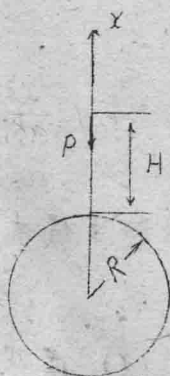


图 10-6

$$V_1^2 - V_0^2 = 2gR^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)$$

設質点自地石沿直上抛，則所能達到的最大高度 H 即等于以 $x_0 = R$ 与 $V_1 = 0$ 代入上式，所得的 x 值，減去 R 。

$$-V_0^2 = 2gR^2 \left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R} \right)$$

或
$$H = R V_0^2 / (2gR - V_0^2)$$

如果要使由地石發射的物體脫離地球应有 $H = \infty$ ，在此種情形下由上式可知，則

$$2gR - V_0^2 = 0 \quad \text{即 } V_0 = \sqrt{2gR}$$

代入數值 $g = 980 \text{ 公厘/秒}^2$ ， $R = 6370 \text{ 公里}$ ，則得 $V_0 = 11.2 \text{ 公里/秒}$ 。

這個速度稱為地球表面的脫離速度，或第一宇宙速度。蘇聯于 1959 年 1 月 2 日所發射的世界上第一顆人造行星的速度就超過了這一速度。順便指出，速度 $V_0 = \sqrt{gR} = 7.9 \text{ 公里/秒}$ 稱為地球表面的第一宇宙速度就是人造衛星繞地球（假定高度為零但空氣阻力不計）作圓周運動的速度。

3) 作用於質点的力假設是速度的函數 $f(V_x)$ 並設質点的初速為 V_0 。

按式 (10-9) 可寫出

$$m \frac{dV_x}{dt} = R x = f(V_x)$$

分離變量得

$$m \frac{dV_x}{f(V_x)} = dt$$

積分上式得

$$\int_{V_0}^x m \frac{dV_x}{f(V_x)} = t$$

對 V_x 求解可得

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \phi(t)$$

或

$$dx = \phi(t) dt$$

再积分一次分, 可得 $x = x_0 + \int_{x_0}^x \phi(x) dx$

例5. 质点在阻尼的介质中运动, 设质点在重力 $\vec{P}$ 的作用下沿铅直线降落. 空气的阻力可认为与速度平方成正比即 $R = \lambda v^2$, 其中 λ 为常数.

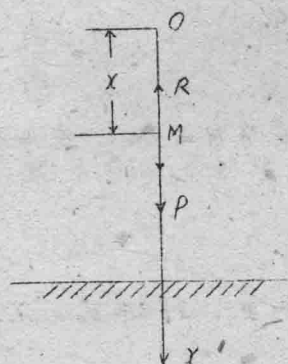


图 10-7

解: 写出质点的运动微分方程

$$m = \frac{dv}{dt} = P - \lambda v^2$$

$$\text{令 } \frac{\lambda}{P} = \frac{1}{C^2}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{C^2} (C^2 - v^2)$$

可见随着速度 v 小于, 大于或等于 C 小球将进行加速, 减速或等速运动. 又可以当 $v = \sqrt{\frac{P}{\lambda}}$ 时, 此时速度到达稳定值.

现将上式分离变量后得

$$\frac{dv}{C^2 - v^2} = \frac{g}{C^2} dt$$

取积分限从 0 到 v 与 0 到 t , 积分结果

$$\frac{1}{2} \ln \frac{C+v}{C-v} = \frac{g}{C} t$$

或
$$\frac{C+v}{C-v} = e^{\frac{2g}{C} t}$$

对 v 求解得

$$v = C \frac{e^{\frac{2g}{C} t} - 1}{e^{\frac{2g}{C} t} + 1} = C \frac{e^{\frac{gt}{C}} - e^{-\frac{gt}{C}}}{e^{\frac{gt}{C}} + e^{-\frac{gt}{C}}}$$

引用双曲函数, 则可写成

$$v = C \operatorname{th} \left(\frac{gt}{C} \right)$$

以 $v = \frac{dx}{dt}$ 代入后再积分一次, 积分限从 0 到 x 与从 0 到 t 可得

$$x = \frac{C^2}{g} \ln \operatorname{ch} \left(\frac{gt}{C} \right)$$

第十一章

动量定理

§11-1 引言

在第十章里已经指出了质点运动微分方程式的普遍形式可按式(10-5)来表示,但要积分一个质点的运动微分方程时是很困难的,有时只能满足于近似解。不难想象要积分了 n 个微分方程。特别是在质点数 n 相当大的情形下,工作将何等繁重。

如果必须分别求出每一个质点的运动,求出表示每一个质点各坐标的时间函数,则上述的积分过程是无法避免的,但在许多工程问题中,所需求出的,并不是每个质点的运动而只是整个质点系的运动的某些量的总和(动量、动量矩或动能)的改变与作用于质点系的各力的某些量的总和(主向量、主矩或功)之间的关系,这些关系的一般形式就表示为质点系动力学的普遍定理。一个质点是质点系的特例, $n=1$ 对应一个质点的这些定理称为质点动力学普遍定理。

动力学普遍定理包括有动量定理,动量矩定理,以及动能定理,都可由方程式(10-4)或(10-5)导出

本章专论动量定理及其变种即冲量定理与质心运动定理,

§11-2 动量定理

由方程 10-4 可得

$$m_i (d\vec{v}_i / dt) = \vec{P}_i + \vec{P}_i'$$

$$d(m_i \vec{v}_i) / dt = \vec{P}_i + \vec{P}_i'$$

对于全系的 n 个质点,共可写出 n 个这样的方程,各式相加得

$$\sum d(m_i \vec{v}_i) / dt = \sum \vec{P}_i + \sum \vec{P}_i'$$

因

$$\sum d(m_i \vec{v}_i) / dt = d(\sum m_i \vec{v}_i) / dt,$$

而由牛顿第三定律可知

$$\sum \vec{p}_i = 0;$$

以 $\vec{R}$ 表示全数外力的主向量，亦即令

$$\sum \vec{p}_i = \vec{R}$$

并为简单起见，将下标 i 省去不写，即得

$$d(\sum m \vec{v}) / dt = \vec{R} \quad (11-1)$$

上式即表示动量定理：质点系的动量对时间的向量导数，等于作用于系的外力的主向量。

式 (11-1) 不包含内力，可见内力不能改变质点系的动量。

设将动量与外力分别投影至各坐标轴，得

$$\left. \begin{aligned} d(\sum m v_x) / dt &= \sum p_x, \\ d(\sum m v_y) / dt &= \sum p_y, \\ d(\sum m v_z) / dt &= \sum p_z. \end{aligned} \right\} \quad (11-2)$$

式中 p_x, p_y, p_z 代表外力 $\vec{p}$ 在坐标轴上的投影。方程 (11-2) 当然亦可由式 (11-1) 直接导出。

动量定理的重要特例是外力的主向量等于零的情形以及外力在某轴有投影之和等于零的情形。由公式 (11-1) 与 (11-2) 可见，设 $\vec{R} = 0$ 则质点系的动量保持恒值，这就是动量守恒定理；同样，设外力在某轴的投影之和等于零，则质点系沿该轴向的动量保持恒值，这就是动量投影的守恒定理。

动量定理在流体力学中有极其广泛的应用，例如，设有流经变截面弯管（图 11-1）的液体，其速度在截面 AB 为 $\vec{v}_1$ ，在截面 CD 为 $\vec{v}_2$ ，假设这流动是稳定的，即液体的速度分布不随时间而改变，取液体在瞬时 t 位于截面 AB 与 CD 之间的部分作为质点系，在瞬时 $t + dt$ ，这部分液体将位于截面 ab 与 cd 之间，但在截面 ab 与 CD 之间的液体，动量并不改变，所以在时间 dt 内，所取的质点系的动量改变等于容积 $CDcd$ 内液体的动量与容积 $ABab$ 内液体的动量之差，即

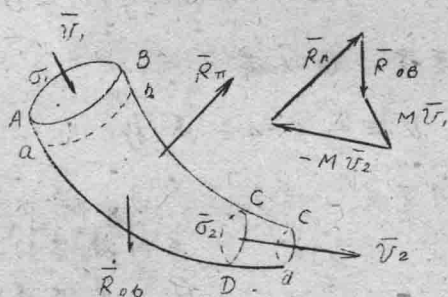


图 11-1

$$d \sum m \vec{v} = p v_2 \sigma_2 dt \vec{v}_2 - p v_1 \sigma_1 dt \vec{v}_1,$$

式中 σ_1 与 σ_2 表示截面 AB 与 CD 的面积, ρ 表示液体的密度, 用 Q 表示液体的每秒体积流量, 则 $Q = v_1 \sigma_1 = v_2 \sigma_2$, 因而上式可以写为

$$d(\sum m \vec{v})/dt = \rho Q (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

动量对于时间的向量导数应等于外力, 作用于质点系的外力设分为体积力 (例如重力) 与表面力 (例如管壁所作用于质点系的压力与摩擦力, 质点系以外的液体所作的压力), 并用 $\vec{R}_{00}$ 与 $\vec{R}_{\pi}$ 分别表示这两类力的合力, 则

$$\rho Q (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{R}_{00} + \vec{R}_{\pi},$$

$$\text{或} \quad M \vec{v}_1 - M \vec{v}_2 + \vec{R}_{00} + \vec{R}_{\pi} = 0 \quad (11-3)$$

式中 $M = \rho Q$ 代表液体在每单位时间内流过的质量, 式 (11-3) 称为欧拉方程。

[例] 1. 干针炮重 11 吨, 炮弹重 54 千克, 炮弹初速为 $v_0 = 900$ 米/秒, 方向成水平, 求在发射时炮身自由反坐的速度。

[解] 取炮身与炮弹作为质点系, 则沿水平方向无外力作用, 因而可用动量守恒定理。

$$(54/g) \times 900 + (11000/g) v_1 = 0$$

式中 v_1 代表反坐速度，由此得

$$v_1 = -4.42 \text{ 米/秒}$$

(例) 2. 管子的弯头一端铅直，另一端水平(图 11-2)，

管内液体的每秒体积流量为 Q ，单位体积的重量为 γ ，管子出口的截面积为 σ ，试求液体对于管壁的总压力的水平分力。

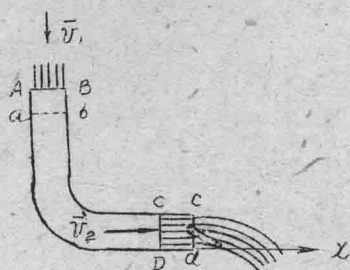


图 11-2

(解) 取 ABCD 以内的液体作为质点系，以 x 表示管壁对于这部分液体的总压力的水平投影。设略去截面 CD 处的压力不计，则因液体

的重量的水平投影为零，可得

$$d(\sum m v_x)/dt = X,$$

设在时间 dt 内，液截面 AB 移至 $a.b$ ，另一液截面 CD 移至 $c.d$ ，

在这段时间内，质点系动量的改变等于 CD $c.d$ 内液体的动量与 AB $a.b$ 内液体动量之差，其在水平方向的投影为：

$$d\sum m v_x = m_2 v_2 - 0,$$

式中 m_2 表示在截面 CD $c.d$ 内液体的质量， v_2 表示在截面 CD 的流速

因 $m_2 = \gamma Q dt / g$ ，故

$$d\sum m v_x = \gamma Q v_2 dt / g;$$

由此

$$d(\sum m v_x)/dt = \gamma Q v_2 / g$$

但

$$Q = \sigma v_2, \text{ 故}$$