化学工学

—解説と演習—

化 学 工 学

—解説と演習—

化学工学協会編

槇 書 店

協定により検印を省略する

化学工学
—解説と演習—

定価 3,600 円

1984 年 3 月 20 日 1 刷

編者 社団法人 化学工学協会 東海支部

発行者 吉田全夫

発行所 槇書店 東京都中央区八重洲2-6-15〒104 振替口座東京 6-29898 電話東京 (03) 281・3608, 8238

新日本印刷・岩崎製本 (Printed in JAPAN) (20)

ISBN4-8375-0530-9 C3058 ¥3600 E

編集委員

静岡大学工学部　内田重男（委員長）
名古屋大学工学部　小林　猛
名古屋工業大学　森　滋勝

執筆者（担当章）

（五十音順）

静岡大学工学部	秋山　鉄夫	（第2章）	日本油脂(株)	石田　英樹	（第1章）
新日本製鉄(株)	井上　展夫	（第3章）	静岡大学工学部	内田　重男	（第5章）
日本揮発油(株)	大里　克明	（第11章）	日本染色機械(株)	大島　正光	（第9章）
(株)大川原製作所	川合　純夫	（第6章）	名古屋大学工学部	小林　猛	（第1章）
沼津工業高等専門学校	小松　弘昌	（第4章）	日本碍子(株)	近藤　邦治	（第2章）
東レ(株)	庄司　雅昭	（第11章）	鈴鹿工業高等専門学校	高橋　正博	（第1章）
新東ダストコレクター(株)	田中　益穂	（第7章）	静岡大学工学部	中野　義夫	（第6章）
岐阜大学工学部	西村　誠	（第3章）	豊橋技術科学大学	西村　義行	（第10章）
(株)三進製作所	能津十三郎	（第8章）	名古屋大学工学部	架谷　昌信	（第3章）
名古屋大学工学部	服部　忠	（第11章）	名古屋工業大学	平岡　節郎	（第9章）
新日本製鉄(株)	藤吉　佐敏	（第3章）	東亜合成化学工業(株)	三輪　泰久	（第5章）
名古屋大学工学部	村瀬　敏朗	（第8章）	名古屋工業大学	森　滋勝	（第11章）
名古屋大学工学部	山崎　昌男	（第7章）	大協石油(株)	山本　武夫	（第4章）

序

最近では化学工学の解説とその演習を中心とした既刊書も少なくない．大学の化学工学専攻学生を対象としたものから，工専や高校生向きのものまで幅広いレベルのものがある．しかしながら，これまで出版されている大部分の解説・演習書は単位操作の基礎理論の学習には適していても，その応用に関する解説は必ずしも十分とはいえず，理論と応用の橋渡しとしての役目をはたすことのできる大学初級レベルの書の出版が待たれていた．

また，化学工学協会東海支部ではこれまで毎年企業で活躍している初級・中級の若いエンジニアの技術力向上のために，学界，業界の第一線で御活躍の方々に講師をお願いして「基礎化学工学演習講座」を開催して大変好評を得ている．講座の内容は，単位操作から反応工学，プロセス制御，先端技術にまでわたっており，やはり初級レベルで応用を重視した講義が行われているが，この講座専用のテキストはこれまでなかった．

そこでこの度，上記のような事情をふまえて入門書ではあっても化学工学の主要な分野を網羅し，基礎から応用までを解説した解説・演習書はできないものかといささか欲張った目標をたてて検討を重ねて出来上ったのが本書である．

本書の最大の特色は執筆陣に多数の業界の方々に加わっていただき，装置，応用例などの解説に類書以上のページ数を割いたことである．したがって，大学初級，高専などの教科書としてのみならず，会社，工場における再教育用テキストや，若い技術者のための参考書としても十分活用できるものになっていると考える．ただし，300 頁余りの本書一冊にあれこれ盛り込もうと欲張り，各執筆者には大変御無理をお願いしたので，結果として最初意図した内容をもった解説・演習書からほど遠いものになってしまったかもしれない．

本書をここまでまとめられた編集委員，執筆者各位の努力に深甚な敬意を表すると共に，今後読者諸賢の御叱正を得て一層の工夫改訂が加えられて，より良い化学工学の解説・演習書となることを願う次第である．

昭和59年1月

化学工学協会東海支部長

山　田　幾　穂

目　次

第1章　化学工学基礎

第2章　流　動

第3章　伝熱・蒸発

第4章　蒸留・抽出

第5章　ガス吸収

第6章 調湿・乾燥

第7章 粉粒体操作

第8章 固液分離

第9章 攪拌・混合

第10章 プロセス制御

第11章　反応工学

第1章 化学工学基礎

1.1 単位と次元

(1) **単位系**　長さ，質量，時間，力，温度などの種々の物理量の大きさを客観的に表現するには，すべての人が納得して使用できる特定の量を基準にとり，その何倍の大きさに相当するかを数値の形で表現する必要がある．この特定の基準量が単位である．単位には組み合わせの基礎となる基本単位とそれらの組み合わせによって表現される誘導単位（組立単位）の二種類があり，すべての物理量はこれらの単位を用いてその大きさを表現することができる．しかし，同じ物理量でも基本量にどのような量を選ぶかによって単位の表し方が異なる．従来，主として使われてきた単位系には，絶対単位系，重力単位系，工学単位系の三つがあり，さらにこれらの単位系はメートル制単位とイギリス制単位に分類される．現在では，学問分野や国によって使用されている単位系が異なる不便さを克服するために制定された国際単位系（Le Systéme International d'Unités, 略称 SI）が国際的に広く採用されつつある．

化学工学の分野では，質量に関係する物理量（質量，密度，粘度など）を扱う場合には絶対単位系（MLT 系）を，力に関係する物理量（力，圧力，表面張力，仕事，動力など）を扱う場合には重力単位系（FLT 系）を用いる慣習が強く残っており，質量 [M]，力 [F]，長さ [L]，時間 [T] の次元を持つ四つの基本量を基に構成される工学単位系（FMLT 系）がよく用いられてきた*．このように工学単位系では，質量と力の単位が混在して使用されるため，次元の点で不都合が生じ次元を同じくするための単位換算が必要となる．次元を統一するには $[MLF^{-1}T^{-2}]$ の次元を持つ重力換算係数 g_c の導入が必要である．この値は国際標準の重力加速度の値（北緯 45° の海面上の値）と等しく，

* 力の単位には G(グラムフォース)，Kg(キログラムフォース)，Lb(ポンドフォース) が用いられる．これらの記号は頭文字を大文字で書くことにより，質量の単位 g, kg, lb と区別される．温度差や熱量が関係する物理量を取り扱う場合には，温度差 θ を基本量に加える必要がある．また熱量 H は誘導量であるが，実用上基本量とみなして取り扱われる．

$$\left.\begin{array}{ll} g_c=9.80665\,\mathrm{kg\cdot m/(Kg\cdot s^2)} & \text{(メートル制単位)} \\ g_c=32.1740\,\mathrm{lb\cdot ft/(Lb\cdot s^2)} & \text{(イギリス制単位)} \end{array}\right\} \qquad (1\cdot1)$$

で与えられる.

一般に, 質量と力に関係する物理量を重力単位系と絶対単位系の間で相互に換算するには, 重力換算係数 g_c をつぎのように用いればよい.

$$\text{重力単位系} \underset{g_c\text{で割る}}{\overset{g_c\text{を掛ける}}{\rightleftarrows}} \text{絶対単位系} \qquad (1\cdot2)$$

現在採用されている国際単位系は 1981 年に改訂されたもので, 従来の MKS 系 (m, kg, s) の絶対単位系を合理的に整理して体系化したものである. その特徴は一つの物理量に対してただ一つの単位が対応することと基本単位を用いてすべての実用的な単位が機械的に組み立てられる一貫性のある単位系であるという二点にある.

表 1·1 SI基本単位とSI補助単位

物理量	単位の名称		単位の記号
長さ	メートル	metre	m
質量	キログラム	kilogram	kg
時間	秒	second	s
熱力学温度	ケルビン	kelvin	K
物質量	モル	mole	mol
電流	アンペア	ampere	A
光度	カンデラ	candela	cd
平面角	ラジアン	radian	rad
立体角	ステラジアン	steradian	sr

表 1·2 接頭語

大きさ	名称		記号	大きさ	名称		記号
10^{-1}	デシ	deci	d	10	デカ	deca	da
10^{-2}	センチ	centi	c	10^2	ヘクト	hecto	h
10^{-3}	ミリ	milli	m	10^3	キロ	kilo	k
10^{-6}	マイクロ	micro	μ	10^6	メガ	mega	M
10^{-9}	ナノ	nano	n	10^9	ギガ	giga	G
10^{-12}	ピコ	pico	p	10^{12}	テラ	tera	T
10^{-15}	フェムト	femto	f	10^{15}	ペタ	peta	P
10^{-18}	アト	atto	a	10^{18}	エクサ	exa	E

表 1·3 固有の名称をもつSI誘導単位

物理量	単位の名称		記号	SI基本単位による定義
力	ニュートン	newton	N	$kg\cdot m\cdot s^{-2}$
圧力	パスカル	pascal	Pa	$kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-2}$
エネルギー	ジュール	joule	J	$kg\cdot m^2\cdot s^{-2}$
仕事量	ワット	watt	W	$kg\cdot m^2\cdot s^{-3}$
周波数	ヘルツ	hertz	Hz	s^{-1}
電荷	クーロン	coulomb	C	$A\cdot s$
電位差	ボルト	volt	V	$kg\cdot m^2\cdot s^{-3}\cdot A^{-1}$
電気抵抗	オーム	ohm	Ω	$kg\cdot m^2\cdot s^{-3}\cdot A^{-2}$
電気容量	ファラド	farad	F	$s^4\cdot A^2\cdot kg^{-1}\cdot m^{-2}$
電導度	ジーメンス	siemens	S	$s^3\cdot A^2\cdot kg^{-1}\cdot m^{-2}$
インダクタンス	ヘンリー	henry	H	$kg\cdot m^2\cdot s^{-2}\cdot A^{-2}$
磁束	ウェーバ	weber	Wb	$kg\cdot m^2\cdot s^{-2}\cdot A^{-1}$
磁束密度	テスラ	tesla	T	$kg\cdot s^{-2}\cdot A^{-1}$
光束	ルーメン	lumen	lm	$cd\cdot sr$
照度	ルクス	lux	lx	$cd\cdot sr\cdot m^{-2}$
放射能	ベクレル	becquerel	Bq	s^{-1}
吸収線量	グレイ	grey	Gy	$m^2\cdot s^{-2}$
セルシウス温度	セルシウス度	degree celsius	℃	$t[℃]=(t+273.15)[K]$
線量当量	シーベルト	sievelt	Sv	$m^2\cdot s^{-2}$

SI 単位は7個の基本単位と2個の補助単位，およびこれらから誘導される単位で固有の名称を持つ 19 個の誘導単位から構成される．SI ではさらに数値を使いやすい大きさにするために 16 個の接頭語が定められている．これらを表 1·1～1·3 に示す．

SI による単位記号，接頭語を使用するに当って以下の点に注意する必要がある．

1) 単位記号はローマン体を用い，すべて単数形で表し，単位の終わりにはピリオドを付けない．また単位の名称が固有名詞に由来する SI 単位記号は，第1番目の文字だけを大文字とし，その他はすべて小文字とする．

2) 誘導単位が二つ以上の単位の積の形で表されるときには N·m（中黒）あるいは N m（半字あけ）のいずれかの方法で記す．特に接頭語と同一の単位記号を用いるときには，混同を避けるための注意が必要である．例えばニュート

ン・メートルはミリニュートン mN との混同を避けるため，N m または N·m と書くべきである．

3)　誘導単位が一つの単位を他の単位で除して表されるときには m/s あるいは $m \cdot s^{-1}$ のいずれかの方法で記す．但し，どのような場合でも括弧をつけずに斜線を同一の行に二つ以上重ねてはならない．例えば J/(mol K)，J/(mol·K)，J mol^{-1} K^{-1} は良いが，J/mol/K は使用できない．特に J/mol·K の表現は (J/mol)K と誤解されるので必ず J/(mol·K) とする．

4)　上記の 3) の表示方法は数値にも適用されるので (123/456)/789 はよいが，123/456/789 は不可となる．

5)　接頭語の記号は，すぐあとにつけて示す単位記号と一体になっているものとして扱うので，それらの間には空白を置かない．それらは正または負の指数をつけて新しい単位の記号としたり，さらに他の単位記号と連結して誘導単位の記号を構成することができる．例えば $1\,km^2$ は $1\,km^2=1(km)^2=1(10^3\,m)^2=10^6\,m^2$ のことであり，$1\,ms^{-1}$ は $1\,ms^{-1}=(10^{-3}s)^{-1}=10^3s^{-1}$ のことである．特にメートル毎秒のときには $m \cdot s^{-1}$ (中黒) または $m\ s^{-1}$ (半字あけ) とする．後者は ms^{-1} と紛らわしいので，前者のように表示する方がよい．

6)　二つ以上の単位記号を含む誘導単位の場合，接頭語は一つだけ最初の単位記号につける．したがって，モル濃度の単位として $kmol/m^3$ はよいが，mol/dm^3 はよくない．

7)　2個以上の合成した接頭語を用いてはならない．例えば mμm でなく，nm を用いる．

8)　質量の基本単位の名称“キログラム”は，SI の接頭語キロを含んでいるので，質量の単位の 10 の整数乗倍の名称は“グラム”という語に接頭語をつけて表示する．例えば 10^3 kg は 1 kkg ではなく，1 Mg とする．

9)　大文字と小文字の表記に注意する．例として K(ケルビン) と k(キロ)，S(ジーメンス) と s(秒)，C(クーロン) と c(センチ)，N(ニュートン) と n(ナノ) があげられる．

10)　数値と単位記号の間には半字分程度の余白を置く．また桁数が多いときは，小数点から3桁目ごとに空白を置く．但し金額の場合を除きカンマは入れな

い．さらに .123 4×10^4 は不可であり，0.123 4×10^4 とする．この場合 1.234×10^3 の方が表示方法としてはよい．

11) 10 の整数乗倍で表示される数値は，原則として数が 0.1 と 1000 の間に入るように選ぶ．例えば 1.5×10^4 N は 15 kN，1500 Pa は 1.500 kPa のように表示する．

12) 表の見出しやグラフの座標軸は純粋な数（次元のない数）で表す．例えば，縦軸を圧力 p[MPa] で，横軸を温度 T[K] で表すグラフの表記法は，縦軸に対しては p/MPa，横軸に対しては T/K とする．しかし，この表記法はまだ一般的ではないので，本書では従来通りの表記法とした．

なお，SI 以外の単位で今後も併用が認められる単位，暫定的に許容される単位についても注意する必要がある．これらを表 1·4 に示す．

表 1·4 SIとの併用が認められている単位

物理量	名称	記号
長さ	△ オングストローム	Å
	△ 海里	n.mile
面積	△ バーン	b
	△ アール	a
体積	○ リットル	lまたはL
質量	○ トン	t
時間	○ 分	min
	○ 時	h（hrは不可）
	○ 日	d
速度	△ ノット	kn
加速度	△ ガル	Gal
圧力	△ バール	bar
	△ 気圧	atm
エネルギー	○ キロワット時	kWh
	○ 電子ボルト	eV
放射能	△ キュリー	Ci
放射線の強さ	△ レントゲン	R
吸収線量	△ ラド	rd
角度（平面角）	○ 度	°
	○ 分	′
	○ 秒	″

表中の○印はSIと併用される単位，△印は暫定的に許容される単位である．

(2)　単位の換算　　現在，国際的に SI 単位への移項が推進されつつあるとはいっても，すでに発行されている文献，便覧類の多くは従来の慣用単位系を用いて書かれたものであり，それらに報告されている貴重な研究データや数式を利用するには当然，単位換算が必要になる．

単位の換算には単位系は同じで単位の種類，大きさが変わる場合と単位系そのものが変わる場合の二通りがある．単位系が同じ場合には基本単位間の換算率をもとに単位換算すればよく，特に SI の範囲内では換算率が常に1になるので複雑な単位換算はなくなる．単位系が異なる場合の単位換算は**重力換算係数** g_c を(1·2)式のように用いて行えばよい．

数式の単位換算では，左右両辺の各項の次元が等しい式，すなわち次元的に健全な式であるかどうかが問題になる．物理法則に基づいて理論的に導かれる理論式の場合には，次元的に健全な式になるので統一した単位系を用いるかぎり単位系の変換には何ら係数の変換を必要としない．しかし，実験式の中には両辺の次元が一致しない次元的に不健全な式があり，このような式では各項の次元が異なっており，式中に含まれる物理量の単位の種類，大きさ，単位系を変えれば式中の係数の値が変化するので単位換算が必要である．換算の方法としてはいろいろある．

次元的に不健全な式では，次元を統一するために係数自身に仮空の次元を与えて，次元的に健全な式と同等に扱い，この仮空の次元を持った係数の単位換算を数値の単位換算と同様の方法で行うのがもっとも簡便である．

例題 1·1　　30℃ におけるメタノールの粘度は 0.51 cP，表面張力は 2.217×10^{-3} Kg/m である．これらを SI 単位に換算せよ．

（解）　1 cP＝0.01 P＝0.01 g/(cm·s) であるから，

粘度：$0.51\,\mathrm{cP}=(0.51)\times(0.01)\times(10^{-3}\,\mathrm{kg})/[(10^{-2}\,\mathrm{m})\times(\mathrm{s})]=5.1\times10^{-4}\,\mathrm{kg/(m\cdot s)}=5.1\times10^{-4}\,\mathrm{Pa\cdot s}=0.51\,\mathrm{mPa\cdot s}$

表面張力：$2.217\times10^{-3}\,\mathrm{Kg}/m=(2.217\times10^{-3}\,\mathrm{Kg\cdot m^{-1}})\times(9.80665\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}\cdot Kg^{-1}})=2.174\times10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot s}=2.174\times10^{-2}\,\mathrm{N/m}=2.174\,\mathrm{cN/m}$

例題 1·2　　管内を流れる空気に対する伝熱係数の実験式として下記の式が提出されている．

$$h=0.0741\,c_pG^{0.8}/d^{0.2} \tag{1·3}$$

ここで h は伝熱係数 [$\mathrm{Btu\cdot ft^{-2}\cdot s^{-1}\cdot {}^\circ F^{-1}}$]，$c_p$ は比熱 [$\mathrm{Btu\cdot lb^{-1}\cdot {}^\circ F^{-1}}$]，$d$ は管の外径 [ft]，

G はガス流量 $[\mathrm{lb \cdot ft^{-2} \cdot s^{-1}}]$ である．この実験式を SI 単位の式に変換せよ．

（解 1） (1·3) 式の定数を k で表すと $h=kc_pG^{0.8}/d^{0.2}$ となる．この式を次元的に健全な式と見なした場合の定数 k の次元は質量，長さ，時間，温度差，熱量を M, L, T, θ, H で表すと

$$(\mathrm{HL^{-2}T^{-1}\theta^{-1}})=k(\mathrm{HM^{-1}\theta^{-1}})(\mathrm{ML^{-2}T^{-1}})^{0.8}/(\mathrm{L})^{0.2}$$

から求められる．すなわち，$k=(\mathrm{ML^{-1}T^{-1}})^{0.2}$ である．

したがって，k の単位は $\mathrm{lb^{0.2} \cdot ft^{-0.2} \cdot s^{-0.2}}$ である．そこで，k の値を SI 単位に換算するには，1 lb＝0.4536 kg，1 ft＝0.3048 m の関係を用いればよい．

$$k=0.0741\,\mathrm{lb^{0.2} \cdot ft^{-0.2} \cdot s^{-0.2}}=(0.0741)\times(0.4536\,\mathrm{kg})^{0.2}\times(0.3048\,\mathrm{m})^{-0.2}\times(\mathrm{s})^{-0.2}$$
$$=8.023\times10^{-2}\,\mathrm{kg^{0.2} \cdot m^{-0.2} \cdot s^{-0.2}}$$

したがって (1·3) 式は SI 単位を用いると次式のように表される．

$$h=8.023\times10^{-2}\,c_pG^{0.8}/d^{0.2} \qquad (1\cdot4)$$

（解 2） 単位換算表によれば 1 J＝9.478×10^{-4} Btu，1 m＝3.281 ft，1 K（温度差）＝1.8°F（温度差），1 kg＝2.205 lb

$$h[\mathrm{Btu \cdot ft^{-2} \cdot s^{-1} \cdot {}^\circ F^{-1}}]=h'[\mathrm{J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1} \cdot K^{-1}}]=h'[(9.478\times10^{-4}\,\mathrm{Btu})\times(3.281\,\mathrm{ft})^{-2}$$
$$\times(\mathrm{s})^{-1}\times(1.8\,{}^\circ\mathrm{F})^{-1}]=4.891\times10^{-5}\,h'[\mathrm{Btu \cdot ft^{-2} \cdot s^{-1} \cdot {}^\circ F^{-1}}]$$

よって
$$h=4.891\times10^{-5}\,h' \qquad (1\cdot5)$$

$$c_p[\mathrm{Btu \cdot lb^{-1} \cdot {}^\circ F^{-1}}]=c_p'[\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}]=c_p'[(9.478\times10^{-4}\,\mathrm{Btu})\times(2.205\,\mathrm{lb})^{-1}$$
$$\times(1.8\,{}^\circ\mathrm{F})^{-1}]=2.388\times10^{-4}\,c_p'[\mathrm{Btu \cdot lb^{-1} \cdot {}^\circ F^{-1}}]$$

よって
$$c_p=2.388\times10^{-4}\,c_p' \qquad (1\cdot6)$$

$$G[\mathrm{lb \cdot ft^{-2} \cdot s^{-1}}]=G'[\mathrm{kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}]=G'[(2.205\,\mathrm{lb})\times(3.281\,\mathrm{ft})^{-2}\times(\mathrm{s})^{-1}]$$
$$=0.2048\,G'[\mathrm{lb \cdot ft^{-2} \cdot s^{-1}}]$$

よって
$$G=0.2048\,G' \qquad (1\cdot7)$$

$$d[\mathrm{ft}]=d'[\mathrm{m}]=d'[3.281\,\mathrm{ft}]=3.281\,d'[\mathrm{ft}]$$

よって
$$d=3.281\,d' \qquad (1\cdot8)$$

(1·5)～(1·8) 式を (1·3) 式に代入すると

$$4.891\times10^{-5}\,h'=0.0741\times(2.388\times10^{-4}\,c_p')\times(0.2048\,G')^{0.8}/(3.281\,d')^{0.2}$$

まとめると
$$h'=8.023\times10^{-2}\,c_p'(G')^{0.8}/(d')^{0.2} \qquad (1\cdot9)$$

なお，この例題とは関係ないが，式が和や差の形で表され，式中に温度や温度差の項が同時に含まれる場合には解 2 の方が間違いが少なく簡単である．

例題 1·3 内径 2.5 cm の水平な平滑円管内を 20°C の水が流れる場合の圧力損失 Δp [kg/cm²] は水の平均流速 $\bar{u}$ [cm/s]，管の長さ z [cm] との間に次式の関係が成立する．

$$\Delta p/z=1.612\times10^{-6}\,\bar{u}^{1.75} \qquad (1\cdot10)$$

この実験式を kPa, m, s の単位を用いて表される式に変換せよ．

（解） (1·10) 式の定数を k で表すと $k=(\Delta p/z)\bar{u}^{1.75}$ となる．この式を次元的に健全な式とみなした場合の定数 k の次元は力，長さ，時間を F, L, T で表すと

$$k=\mathrm{FL}^{-4.75}\mathrm{T}^{1.75}\quad \text{である}$$

したがって k の単位は $\mathrm{Kg\cdot cm^{-4.75}\cdot s^{1.75}}$ である.

$$\begin{aligned}k&=1.612\times10^{-8}\,\mathrm{Kg\cdot cm^{-4.75}\cdot s^{1.75}}=(1.612\times10^{-8})\times(\mathrm{Kg})\times(10^{-2}\,\mathrm{m})^{-4.75}\times(\mathrm{s})^{1.75}\\&=50.98\,\mathrm{Kg\cdot m^{-4.75}\cdot s^{1.75}}=(50.98\,\mathrm{Kg\cdot m^{-4.75}\cdot s^{1.75}})\times(9.80665\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}\cdot Kg^{-1}})\\&=5.00\times10^{2}\,\mathrm{kg\cdot m^{-3.75}\cdot s^{-0.25}}=5.00\times10^{2}\,\mathrm{Pa\cdot m^{-2.75}\cdot s^{1.75}}\\&=(5.00\times10^{2})\times(10^{-3}\,\mathrm{kPa})\times(\mathrm{m})^{-2.75}\times(\mathrm{s})^{1.75}=0.500\,\mathrm{kPa\cdot m^{-2.75}\cdot s^{1.75}}\end{aligned}$$

したがって (1·10) 式は kPa, m, s を用いると次式のように表される.

$$\Delta p/z=0.500\,\bar{u}^{1.75}\tag{1·11}$$

(3) 次元解析と無次元数　工学の分野では現象が複雑で理論的解析の困難なものが少なくない. このような場合でもこの現象に関与する因子が明らかであれば影響因子となる物理量の相互関係をある程度予測することができる. この方法を次元解析という.

いま問題となっている現象に関与する物理量と次元定数の合計が n 個あり, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ とすると, これらの間には

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)=0\tag{1·12}$$

の関係が成立する. (1·12) 式が次元的に健全な式であれば, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ の組み合わせで得られる p 個の無次元項 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_p$ を用いて次式の形に変形できる.

$$F(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_p)=0\tag{1·13}$$

ここで採用した単位系における基本量の数を m とすると, 無次元項の数 p は $(n-m)$ に等しい. これを π 定理という.

ある現象に関係する物理量の相互関係を次元解析の手法を使って無次元項の形でまとめ, 実験データを基に適用性の広い実験式を作成することができれば, 工学上好都合である. 表 1·5 に化学工学でよく用いる無次元数を示す.

例題 1·4　内径 d の平滑円管内を密度 ρ, 粘度 μ の流体が平均流速 $\bar{u}$ で流れている. 管長 1m 当りの圧力損失 $\Delta p/L$ (L は管長) を次元解析によって求めよ. なお, 単位系は SI を用いるものとする.

(解)　この問題では変数 ($\Delta p/L, d, \bar{u}, \rho, \mu$) の数が $n=5$, 基本量の数が $m=3$ となるので, π 定理によれば物理量相互間の関係は $p=5-3=2$ 個の無次元項で表される.

そこで, $\Delta p/L$ が次式のように表されると仮定する.

$$\Delta p/L=kd^{a_1}\bar{u}^{a_2}\rho^{a_3}\mu^{a_4}\tag{1·14}$$

但し k は無次元定数である.

表 1·5　化学工学でよく用いる無次元数

名　　称	記号	定　　義
ビオー数	Bi	hL_m/k
オイラー数	Eu	$p/(\rho u^2)$
摩擦係数	f	$\Delta pd/(2\rho u^2 L)$
フーリエ数	Fo	$k\theta/(\rho c_p L^2)$
フルード数	Fr	$u^2/(gL)$
ガリレイ数	Ga	$L^3 g\rho^2/\mu^2$
グラスホフ数	Gr	$L^3\rho^2\beta g\Delta T/\mu^2$
グレーツ数	Gz	$wc_p/(kL)$
ヌッセルト数	Nu	hd/k
ペクレ数	Pe	$u\rho c_p L/k$ または uL/D
プラントル数	Pr	$c_p\mu/k$
レイノルズ数	Re	$du\rho/\mu$
シュミット数	Sc	$\mu/(\rho D)$
シャーウッド数	Sh	$k_m L/D$
スタントン数	St	$h/(c_p u\rho)$
ウェバー数	We	$\rho u^2 L/\sigma$

(1·14) 式を次元式の形で表すと

$$[\mathrm{ML^{-2}T^{-2}}]=[\mathrm{L}]^{a_1}[\mathrm{LT^{-1}}]^{a_2}[\mathrm{ML^{-3}}]^{a_3}[\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}]^{a_4} \tag{1·15}$$

(1·14) 式が次元的に健全な式であれば両辺の次元は一致するので (1·15) 式から次式の関係が得られる.

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}:&\quad 1=a_3+a_4\\ \mathrm{L}:&\ -2=a_1+a_2-3a_3-a_4\\ \mathrm{T}:&\ -2=-a_2-a_4 \end{aligned}\right\} \tag{1·16}$$

未知数の数が 4 個に対して方程式は 3 個しかないので, a_1, a_2, a_3 を a_4 で表すことにする. (1·16) 式より $a_1=-1-a_4$, $a_2=2-a_4$, $a_3=1-a_4$ を得る. この結果を (1·14) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \Delta p/L &= kd^{-1-a_4}\bar{u}^{2-a_4}\rho^{1-a_4}\mu^{a_4}\\ &= k(\bar{u}^2\rho/d)(d\bar{u}\rho/\mu)^{-a_4} \end{aligned} \tag{1·17}$$

即ち

$$[\Delta pd/(L\bar{u}^2\rho)]=k(d\bar{u}\rho/\mu)^{-a_4} \tag{1·18}$$

となる. この式中の $[\Delta pd/(L\bar{u}^2\rho)]$ と $(d\bar{u}\rho/\mu)$ は無次元数であって, その数は π 定理で予測した数と一致する. ここで k および a_4 は実験により決定すべき定数である.

なお (1·18) 式の右辺を $2f$ とおくと次式のように変形できる.

$$\Delta p=4f(L/d)(\rho\bar{u}^2/2) \tag{1·19}$$

f は摩擦係数に対応し, 実際には $f=f(d\bar{u}\rho/\mu, \varepsilon/d)$ となり, 管の面粗さ ε[m] にも依存する. (1·19) 式を Fanning の式という.