YANJIUSHENGSHUXUESHITIJIEDA

研究生数学试题解答

上册

武汉工学院电子工程系

前　言

这本“研究生数学试题解答”包含有基本概念，基本理论和基本运算技巧方面的大量题目；还有各种综合题，证明题及应用题，其内容分为工科高等数学，理科线性代数及高等代数，复变函数，常微分方程及偏微分方程，数学分析等五个方面，对准备报考理工科研究生的同志有一定的参考价值；对理工科在校学生，电视大学学生及广大的自学同志，本书可起到一定的辅导作用；对广大工程技术人员也能从本书中得到提高数学水平的益处。

本书由武汉工学院胡大志、王益姝同志供稿，钱伟鑫同志绘制全部图形，并邀请吉林大学李成章等同志审阅了全部初稿。

武汉工学院电子工程系领导及有关部门对本书的编写发行工作给予了大力支持与帮助。

由于我们水平不高，时间仓促，错误之处，请读者指正。

最后向提供试题的院校和单

目　　录

一、高等数学

1、大连工学院（1982）

一、（56分）1．计算$\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy$，其中$D$是由曲线$y=x^2(x\geqslant 0)$，$x+y=2$及$y=0$围成的区域．

2．求函数$z=sinx\cdot siny\cdot sin(x+y)$（$x>0$，$y>0$，$x+y<\pi$）的最大值．

3．求曲线$y=xe^{-x}(x\geqslant 0)$，$y=0$和$x=a$所围成的图形绕ox轴旋转所得旋转体的体积V，并求$\lim\limits_{a\to+\infty}V$

4．计算$\iint\limits_{S}x^2dydz+x^2ydzdx+x^2zdxdy$，其中$S$为柱体$0\leqslant z\leqslant b$，$x^2+y^2\leqslant a^2$的边界外表面．

5．求质点沿xoy平面内的椭圆C运动一周（逆时针方向）场力作的功，若椭圆的中心在原点，长半轴和短半轴分别是4和3，焦点在ox轴上，力场$\vec{F}=(3x-4y+2z)\vec{i}+$
$+(4x+2y-3z^2)\vec{j}+(2xz-4y^2+z^2)\vec{k}$.

解　1．原式$=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}(x^2+y^2)dxdy=\frac{131}{105}$

2．$\frac{\partial z}{\partial x}=siny[cosxsin(x+y)+sinxcos(x+y)]$

$=sinysin(2x+y)$

$\frac{\partial z}{\partial y}=sinx[cosysin(x+y)+sinycos(x+y)]$

$$= \sin x \sin(x+2y)$$

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$， $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$，解得驻点为 $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

又 $$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)} = 2\sin y \cos(2x+y)\Big|_{\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)} = -\sqrt{3}$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{x=y=\frac{\pi}{3}} = \sin(2x+2y)\Big|_{x=y=\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{x=y=\frac{\pi}{3}} = 2\sin x \cos(x+2y)\Big|_{x=y=\frac{\pi}{3}} = -\sqrt{3}$$

由 $AC-B^2>0$ 且 $A<0$，知在 $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$处函数取极大值

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8}\sqrt{3}.$$

又函数z在边界的值为零，故在 $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ 处取最大

值 $\dfrac{3}{8}\sqrt{3}$.

3. $$V = \int_0^a \pi x^2 e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{\pi}{2} x^2 e^{-2x}\Big|_0^a + \frac{\pi}{2}\int_0^a zxe^{-2x} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - e^{-2a}\left(\frac{\pi}{2}a^2 + \frac{\pi}{2}a + \frac{\pi}{4}\right)$$

则 $$\lim_{a \to +\infty} V = \frac{\pi}{4}$$

4． 原式 $=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+x^2+x^2)\,dxdydz=5b\iint\limits_{D}x^2\,dxdy$

$$=5b\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a}r^2\cos^2\theta\cdot r\,dr=\frac{5ba^4\pi}{4}$$

5． $W=\oint\limits_{C}(3x-4y)\,dx+(4x+2y)\,dy$

$$=\iint\limits_{\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}\leqslant 1}(4+4)\,dxdy=8\pi\cdot3\cdot4=96\pi.$$

二、(12分)求微分方程 $xy'+ay=1+x^2$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的解 $y(x,a)$，其中 a 为参数，并证明 $\lim\limits_{a\to0}y(x,a)$ 是方程 $xy'=1+x^2$ 的解

解 此问题可归结为

$$y'+\frac{a}{x}y=\frac{1+x^2}{x}\qquad\qquad y(1)=1$$

由线性方程通解公式

$$y=e^{-\int\frac{a}{x}dx}\left[\int\frac{1+x^2}{x}e^{\int\frac{a}{x}dx}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}x^2+Cx^{-a}$$

由 $y(1)=1$，可确定 $C=1-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+2}$，由此得所求的解为

$$y(x,a)=x^{-a}+\frac{1}{a}(1-x^{-a})+\frac{1}{a+2}(x^2-x^{-a})$$

则 $$\lim_{a\to 0} y(x,a) = 1 + \lim_{a\to 0}\frac{1-x^{-a}}{a} + \frac{1}{2}(x^2-1)$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} + \ln x$$

将 $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln x$代入方程$xy' = 1 + x^2$的左端，有

$$xy' = x\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + 1$$

可见$\lim_{a\to 0} y(x,\ a)$是方程$xy' = 1 + x^2$的解。

三、(10分)假定$f(x,\ y)$具有二阶连续偏导数，又

$$u(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{2\pi} f(x_1 + x_3\cos\varphi, x_2 + x_3\sin\varphi)d\varphi$$

且

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_1 + x_3\cos\varphi,\ x_2 + x_3\sin\varphi)d\varphi,$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2{}_i} = \int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2{}_i}f(x_1 + x_3\cos\varphi,\ x_2 + x_3\sin\varphi)d\varphi$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3)$$

试证 $$x_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{e x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) - \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

证 $$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \int_0^{2\pi} f_1 d\varphi, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \int_0^{2\pi} f_{11} d\varphi$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \int_0^{2\pi} f_2 d\varphi \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \int_0^{2\pi} f_{22} d\varphi$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}=\int_0^{2\pi}(f_1\cos\varphi+f_2\sin\varphi)d\varphi$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=\int_0^{2\pi}(f_{11}\cos^2\varphi+2f_{12}\cos\varphi\sin\varphi$$

$$+f_{22}\sin^2\varphi)d\varphi$$

则 $$x_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)-\frac{\partial u}{\partial x_3}$$

$$=\int_0^{2\pi}(x_3f_{11}+x_3f_{22}-x_3f_{11}\cos^2\varphi-2x_3f_{12}\cos\varphi\sin\varphi$$

$$-x_3f_{22}\sin^2\varphi)d\varphi$$

$$-\int_0^{2\pi}(f_1\cos\varphi+f_2\sin\varphi)d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{d(f_2\cos\varphi-f_1\sin\varphi)}{d\varphi}d\varphi$$

$$=[f_2\cos\varphi-f_1\sin\varphi]_0^{2\pi}=0$$

四、(10分)设$a_{2n-1}=\dfrac{1}{n}$,

$$a_{2n}=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

判断级数$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots$

的敛散性，并证明$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n)$存在

解 若$n<x<n+1$，有

$$\int_n^{n-1}\frac{1}{n+1}dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{n}dx$$

即 $\dfrac{1}{n+1}<ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$，即$a_{2n-1}>a_{2n}>a_{2n+1}$

可见为单调递减的交错级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ 则级数收敛

由$S_{2n-1}=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\int_1^2\dfrac{1}{x}dx-\int_2^3\dfrac{1}{x}dx-\cdots-\int_{n-1}^n\dfrac{1}{x}dx$

$$=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-lnn$$

而$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1}$存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-lnn)$存在.

五、（12分）如图，如果孔口是一个圆（半径为a），圆心在水表面之下的深度为p，此时通过孔口的流量$Q=\iint\limits_D\sqrt{2gy}\,dxdy$，其中$D$是孔口边界围成的区域.

1．$p=a$时求Q，

2．证明$P>a$时，

$$Q=2a^2\sqrt{2gp}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1\quad sin^2Q)\sqrt{1+\frac{a}{p}sin\theta}\,d\theta$$

3．证明当$p=2a$时，

$$Q\approx\frac{127}{64}\pi a^2\sqrt{ga}.$$

解 1．当$p=a$时

$$Q=\iint\limits_D\sqrt{2gy}\,dxdy$$

D：$x^2+(y-a)^2\leqslant a^2$

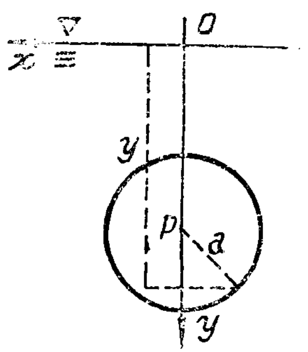

图 1

$$= 2\sqrt{2g}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\sin\varphi} \sqrt{\sin\varphi}\ \sqrt{r}\ rdr = \frac{64}{15}a^2\sqrt{ag}$$

2．$P>a$时，　　D：$x^2+(y-p)^2 \leqslant a^2$

$$Q=\iint_D \sqrt{2gy}dxdy=\int_{p-a}^{p+a} dy\int_{-\sqrt{a^2-(y-p)^2}}^{\sqrt{a^2-(y-p)^2}} \sqrt{2ay}\,dx$$

$$=\int_{P+a}^{p+a} \sqrt{2gy}\cdot 2\sqrt{a^2-(y-p)^2}\ dy$$

令，$y=p+a\sin\theta$，则可得

$$Q=2a^2\sqrt{2gp}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\sqrt{1+\frac{a}{p}\sin\theta}\ d\theta$$

3．当$p=2a$时，则

$$Q=2a^2\sqrt{4ga}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)(1+\frac{1}{2}\sin\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$$\approx 4a^2\sqrt{ga}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta(1+\frac{1}{4}\sin\theta-\frac{1}{32}\sin^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{127}{64}\pi a^2\sqrt{ga}$$

2、西北工业大学（1982）

一、计算（1）$\int x\ln x dx$，（2）$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

解 （1）原式$=\frac{1}{2}\left(x^2\ln x-\int xdx\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2\right)+C$$

（2）令$x=\frac{1}{t}$，则

原式$=\int\frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arccos t+C=\arccos\frac{1}{x}+C$

二、计算（1）$\int_0^1\int_y^1 e^{-x^2}dxdy$

（2）$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$　　其中D：$x^2+y^2\leqslant 1$

解 （1）原式$=\int_0^1\int_0^x e^{-x^2}dydx=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$

（2）原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-r^2}rdr=\pi(1-\frac{1}{e})$

三、设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，具有连续偏导数，

且 $\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$，试求 $\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$

解 由隐函数存在定理，存在唯一的反函数组

$x=x(u, v)$，$y=y(u, v)$，且有

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{J}\quad\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{J}\quad\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{J}\quad\frac{\partial v}{\partial x},\quad\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{J}\quad\frac{\partial u}{\partial x},$$

其中 $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}$,

所以 $\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{1}{J^2}\begin{vmatrix}\frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial y}\\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x}\end{vmatrix}=\frac{1}{J}$

四、设$f(x)$处处可导，且$0\leqslant f'(x)\leqslant\frac{k}{1+x^2}$，（$k$为正常数），试证由下列递推关系所确定之$x_n$，当$n\to\infty$时有极限：$x_0$任意，$x_n=f(x_{n-1})$ （$n=1, 2, \cdots$）且证此极限满足方程$x=f(x)$。

证：若$x_1=f(x_0)>x_0$，

$$x_2-x_1=f(x_1)-f(x_0)=f'(\xi)(x_1-x_0)\geqslant 0$$

可见$x_2\geqslant x_1$，类推，可证得$x_{n+1}\geqslant x_n\geqslant x_0$，

又 $0\leqslant f'(x)\leqslant\frac{k}{1+x^2}=(k\,arctgx)'$

则有 $f(x)-f(x_0)\leqslant k(arctgx-arctgx_0)$

从而 $f(x)\leqslant f(x_0)+k(arctgx-arctgx_0)=M$

可见$f(x)$有上界，即x_n有上界，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。

若$x_1=f(x_0)<x_0$可证得$x_0\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}$，对$x<x_0$有

$$f(x_0)-f(x)\leqslant k(arctgx_0-arctgx)$$

则 $$f(x)\geqslant f(x_0)-k(arctgx_0-arctgx)=m$$

可见$f(x)$有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

若$x_1=f(x_0)=x_0$，极限显然存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。由$x_n=f(x_{n-1})$两边取极限有$a=f(a)$，可见此极限值$a$满足方程$x=f(x)$。

五、试求函数$f(x)$，使满足$\int_x^{2x}f(x)dx=e^x-1$。

解 设$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则有

$$\int_x^{2x}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)x^{n+1} \qquad (1)$$

$$e^x-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (2)$$

由(1)与(2)相等，可得

$$a_n=\frac{1}{n!\ (2^{n+1}-1)}$$

又$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-\infty,\ +\infty)$收敛，则

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\ (2^{n+1}-1)}x^n$$

六、一质量为m之质点作直线运动，位移为x，它在运动过程中所受外力为x之连续函数$f(x)$。试证：$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

$-F(x)$与t无关.（其中t表示时间，$F(x)$为$f(x)$之任一原函数），并将此结果推广为平面运动的情形.

证 由 $f(x)=m\dfrac{d^2x}{dt^2}=F'(x)$，有

$$\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-F(x)\right]'=0$$

即$\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2-F(x)$与$t$无关.

平面运动的情况，其位移设为 $x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ 所受外力为$P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$，$\dfrac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)$

则$\dfrac{1}{2}m\left[\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2\right]-F(x,y)$与$t$无关.

3、东北重型机械学院（1982）

一、已知曲线在第一象限，且曲线上任意点处的切线与坐标轴和过切点垂直于x轴的直线所围成的梯形的面积等于常数k^2，又已知曲线过点$(k、k)$，试求该曲线(18分)

解 设$P(x,y)$为曲线上任一点，设过P点作曲线的切线与y轴交于T，则

$OT=y-xy'$

梯形$OxPT$的面积

$=\dfrac{x}{2}(y+y-xy')=k^2$

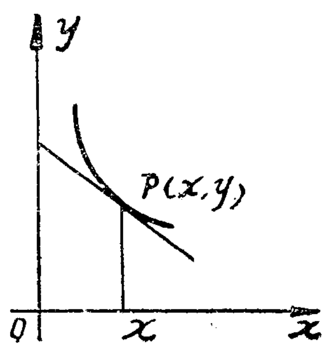

图 2

整理，$$y' = \frac{2}{x}y - \frac{2k^2}{x^2}$$

由一阶线性方程通解公式，有

$$y = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left[\int -\frac{2k^2}{x^2} e^{\int -\frac{2}{x}dx} dx + C\right]$$

$$= \frac{2k^2}{3x} + Cx^2$$

由曲线过点(k, k)，有$y(k) = k$，可得 $C = \frac{1}{3k}$. 故曲线方程为

$$y = \frac{2k^2}{3x} + \frac{x^2}{3k}$$

二、设$F(x, y, x-z, y^2-w) = 0$，其中F具有二阶连续偏导数，且$F'_4 \neq 0$，求$\frac{\partial w}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$　（18分）

解 对$F(x, y, x-z, y^2-w) = 0$两边求全微分.

$$F'_1 dx + F'_2 dy + F'_3 (dx - dz) + F'_4 (2ydy - dw) = 0$$

解得 $$dw = \frac{F'_1 + F'_3}{F'_4} dx + \frac{F'_2 + 2yF'_4}{F'_4} dy - F'_3 dz$$

由全微分定义，有

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{F'_2 + 2yF'_4}{F'_4} = \frac{F'_2}{F'_4} + 2y$$