经济数学（二）

线性代数

$(I-A)x=y$

湖北财经学院数学教

经济数学（二）

线性代数

湖北财经学院数学教研室

一九八四年元月

目　　录

第一章　行列式

第二章　矩阵

第三章　线性方程组

第四章 向量空间

第五章 二次型

习题答案

第一章　行列式

用消元法解二元一次或三元一次线性方程组时，其结果（即线性方程组的解）在引进二阶或三阶行列式并给出相应的计算方法之后，在一定的条件下，可表示为二个行列式的比。例如，对于二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

当系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，上述方程组有唯一解，即

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

对于三元一次线性方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{aligned}$$

当系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，有唯一解

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}},\ x_3=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}$$

如此，求解二元或三元一次线性方程组就转化为去计算二阶或三阶行列式的值了。

对于n元一次线性方程组，它的解是否也有这样的规律，可以表示为二个行列式之比呢？为此，首先要给出n阶行列式的定义并讨论它的性质。这些就是本章的主要内容。

为了把二阶或三阶行列式的概念推广到更一般的有n行n列的n阶行列式，我们对二阶及三阶行列式的展开式进行结构分析，找出它们的共同规律。

我们知道，二阶行列式的值为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

三阶行列式的值为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{array}{l}a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\end{array}$$

上述等式的右边称为行列式的展开式。

仔细分析，不难发现：

（1）展开式都是一些乘积项的代数和；

（2）二阶行列式的展开式中的每一个乘积项都是二个元素之乘积，三阶行列式的展开式中的每一个乘积项都是三个元素之乘积。乘积项中的每一个因子都分别处于行列式中不同的

行不同的列；

（3）乘积项有的取正号，有的取负号。以三阶行列式的展开式为例，如果我们把每一个乘积项中的因子的第一个下标（又称行标）按自然数顺序排好，那末第二个下标（又称列标）恰好组成1,2,3的所有可能的六种排列。乘积项的符号与这些排列的顺序有关。若将这些排列与自然数顺序进行比较，有偶数对数字与自然顺序不同时，乘积项取正号；有奇数对数字与自然顺序不同时，乘积项取负号。如下表：

列标组成的排列	与自然顺序1 2 3比较，顺序不同的数对	逆序的个数	该乘积项的符号
1 2 3		0	+
1 3 2	3←→2	1	−
2 1 3	2←→1	1	−
2 3 1	2←→1　3←→1	2	+
3 1 2	3←→1　3←→2	2	+
3 2 1	3←→2　3←→1　2←→1	3	−

如果先把乘积项因子的第二个下标（列标）按自然数顺序排好，而对第一个下标（行标）的所有可能的排列进行类似的分析，也会有同样的结论。

掌握了这些共同点，我们大概可以设想n阶行列式的展开式应该是这样一些乘积项的代数和，乘积项的每一个因子来自行列式中不同的行不同的列，当按自然数顺序排列乘积项中因子的行标（列标）时，其符号由列标（行标）组成的排列的逆序数来决定。

第一节　n阶行列式的概念

定义1　由数码1，2，…，n任意排成的一排数，称为一个n级排列。

例如，3142是一个四级排列，3 5 2 1 4是一个5级排列。而5413既不是4级排列也不是5级排列。

数码1，2，…，n 的一个n 级排列，记为$S_1S_2\cdots S_n$（$1\leqslant S_i\leqslant n$，且$i\neq j$时，$S_i\neq S_j$）。

显然，所有的n 级排列总共有 $n!$ 个。

n 级排列 $1\ 2\cdots n$ 称为标准排列。

定义2　在n 级排列$S_1S_2\cdots S_i\cdots S_j\cdots S_n$中，如果两个数码$S_i$，$S_j$的先后顺序与在标准排列中的顺序不同，则称$S_i$，$S_j$构成一个逆序。一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数，记为$[S_1S_2\cdots S_n]$。

例如，在4级排列3142中，31，32，42是逆序，于是$[3\ 1\ 4\ 2]=3$。一般地有

$$
\begin{aligned}
[S_1S_2\cdots S_n]=&(S_1\text{后面比}S_1\text{小的数的个数})\\
&+(S_2\text{后面比}S_2\text{小的数的个数})\\
&+\cdots\cdots\\
&+(S_{n-1}\text{后面比}S_{n-1}\text{小的数的个数})
\end{aligned}
$$

例1　求排列$1\ 2\cdots n$与$n(n-1)\cdots 2\ 1$的逆序数

解　$[1\ 2\cdots n]=0$

$$[n(n-1)\cdots 2\ 1]=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

下面给出n阶行列式的定义：

定义3　把n^2个数a_{ij}（i，$j=1$，2，…，n）排成一个正方形，且称横排为行、纵排为列，规定a_{ij}放在第i行第j列的位

置，再用两条直线段括起来，这样得到的一个记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为n阶行列式，记为D，它的值定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(s_1\cdots s_n)}(-1)^{[s_1\cdots s_n]}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}$$

其中$s_1\cdots s_n$是数码1，2，…，n的一个n级排列，$\sum\limits_{(s_1\cdots s_n)}$表示对所有的$n$级排列求和。

应该注意，在行列式的定义中，乘积项的因子其行标按标准顺序排列，由于列标$s_1s_2\cdots s_n$是一个n级排列，各因子分别处于不同的行不同的列。

当$n=1$时，规定一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$。

在n阶行列式中，a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}所在的直线段称为主对角线；a_{1n}，a_{2n-1}，…，a_{n1}所在的直线段称为辅对角线。

例2 展开$\sum\limits_{(s_1s_2)}(-1)^{[s_1s_2]}a_{1s_1}a_{2s_2}$

解 由于

s_1	s_2	$[s_1\ s_2]$
1	2	0
2	1	1

$$\therefore \sum_{(s_1 s_2)} (-1)^{[s_1 s_2]} a_{1s_1} a_{2s_2} = (-1)^{[1\ \ 2]} a_{11} a_{22} + (-1)^{[2\ \ 1]} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

不难看出，它就是二阶行列式的展开式。

例3 试判断下列各乘积项是否为5阶行列式的展开式中的一项。如是，说明该项应取的符号：

(1)$a_{11}a_{32}a_{23}a_{41}a_{54}$；　　(2)$a_{11}a_{32}a_{23}a_{45}a_{54}$。

解 （1）乘积项$a_{11}a_{32}a_{23}a_{41}a_{54}$不是5阶行列式的展开式中的一项，因为因子$a_{11}$与$a_{41}$同处于第一列。

（2）乘积项$a_{11}a_{32}a_{23}a_{45}a_{54}$是5阶行列式的展开式中的一项。由于

$$a_{11}a_{32}a_{23}a_{45}a_{54} = a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}a_{54}$$

而〔13254〕=2，所以该乘积项应取“+”号。

例4 用行列式的定义计算下列上三角形行列式的值

$$(1)\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2\,n-1} & \\ \vdots & \vdots & \begin{matrix} & \\ \end{matrix} & & \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix}$$

其中对角线下方的元素全为零。

解 (1)根据行列式的定义，由于第n行除a_{nn}外其余元素为零，从第n行开始考虑，取a_{nn}。划去a_{nn}所在的第n行第n列，在余下的第$n-1$行的元素里，只有$a_{n-1\,n-1}$不为零，取$a_{n-1\,n-1}$。如此一直选取。最后，划去a_{22}所在的第二行第二列后，第一行的元素只剩下了a_{11}，取a_{11}。因此，在展开式中只有$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$这一个乘积项不为零，其它乘积项都是零。

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{[12\cdots n]} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

因此，上三角形行列式型(1)的值为主对角线上各元素的连乘积。

（2）用类似于(1)的选取方法，可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{[n(n-1)\cdots 1]} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

因此，上三角形行列式型(2)的值为$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$与辅对角线上各元素的连乘积。

在例4中，我们用行列式的定义计算了特殊的行列式的值。对于一般的n阶行列式，用定义求它的值是一件十分麻烦且会使你头昏眼花的工作。因此，研究如何简化行列式的计算就显得很有必要。通常采用的办法是根据定义先导出它的一些基本性质。为此，必须对排列作必要的进一步讨论。

定义4 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列。

例如，排列3241是偶排列。排列4231是奇排列。

定义5 在一个n级排列$S_1\cdots S_i\cdots S_j\cdots S_n$中，交换两个数码$S_i$与$S_j$的位置，从而得到一个新的$n$级排列$S_1\cdots S_j\cdots S_i\cdots S_n$，这种对排列的变换叫做一个对换，记为（$S_i$，$S_j$）。

例如，排列4231是对排列3241作对换（3，4）得来的。容易看出，一次对换，排列的奇偶性发生了变化。一般地，我们有

定理1 对换改变排列的奇偶性

证 首先考虑相邻元素的对换。在排列$S_1\cdots S_iS_{i+1}\cdots S_n$中进行对换（$S_i$，$S_{i+1}$），得到排列$S_1\cdots S_{i+1}S_i\cdots S_n$。

当$S_i>S_{i+1}$时，

$$[S_1\cdots S_iS_{i+1}\cdots S_n]=[S_1\cdots S_{i+1}S_i\cdots S_n]+1$$

当$S_i<S_{i+1}$时，

$$[S_1\cdots S_iS_{i+1}\cdots S_n]=[S_1\cdots S_{i+1}S_i\cdots S_n]-1$$

显见，对换（S_i，S_{i+1}）改变了排列$S_1\cdots S_iS_{i+1}\cdots S_n$的奇偶性。

其次考虑不相邻元素的对换。在排列$S_1\cdots S_i\cdots S_j\cdots S_n$中进行对换（$S_i$，$S_j$），得到排列$S_1\cdots S_j\cdots S_i\cdots S_n$。后一排列可通过一系列的相邻元素的对换而得到。在排列$S_1\cdots S_i\cdots S_j\cdots S_n$中，先将$S_i$依次往后进行相邻元素的对换，共换$j-i$次，得到$S_1\cdots S_{i-1}S_{i+1}\cdots S_jS_i\cdots S_n$，紧接着，再将$S_j$依次往前进行相邻元素的对换，共换$(j-2)-(i-1)=j-i-1$次，便得到$S_1\cdots S_j\cdots S_i\cdots S_n$。前后总共换了$2(j-i)-1$次。由于$2(j-i)-1$是奇数，显然，奇数次这样的相邻元素的对换的最终结果还是改变了排列的奇偶性。**证毕。**

例5 确定i及j，使6级排列$42i1j6$成偶排列。

解 在所给排列中，i及j只能取3或5。

当$i=3$，$j=5$时，由于

$$[423156]=5$$

排列423156是奇排列。作对换（i，j）=（3，5），则排列425136就是偶排列。因此$i=5$，$j=3$。

在行列式的乘积项$a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}$中，由于数的乘法是可交换的，如果对它的因子进行若干次的交换，使因子的列标按标准顺序排列，得到

$$a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

这时，排列$s_1 s_2 \cdots s_n$变成$1\ 2 \cdots n$；排列$1\ 2 \cdots n$变成$p_1 p_2 \cdots p_n$显然，对换的个数是相等的。若把$s_1 s_2 \cdots s_n$变为$1\ 2 \cdots n$的对换按相反的步骤进行，则排列$1\ 2 \cdots n$又可变为$s_1 s_2 \cdots s_n$。这样，经过同样多次的对换，排列$1\ 2 \cdots n$既可变为$s_1 s_2 \cdots s_n$又可变为$p_1 p_2 \cdots p_n$，根据定理1，它们的奇偶性应该是一样的。于是

$$(-1)^{[s_1 \cdots s_n]} = (-1)^{[p_1 \cdots p_n]}$$

因此，行列式的定义又可叙述为

定义6 n阶行列式的值定义为

$$D = \sum_{(p_1 \cdots p_n)} (-1)^{[p_1 \cdots p_n]} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

习题一

1.求下述排列的逆序数

(1) 351624;

(2) 21786354;

(3) $214365 \cdots\cdots (2n)(2n-1)$;

(4) $(2n) \cdots\cdots (n+1) 1\ 2 \cdots\cdots n$。

2. 展开$\sum\limits_{(s_1 s_2 s_3)} (-1)^{[s_1 s_2 s_3]} a_{1s_1} a_{2s_2} a_{3s_3}$。

3.写出4阶行列式的展开式中所有带负号且包含(1)$a_{13} a_{32}$；(2)a_{33}的乘积项。

4.用行列式的定义计算如下行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & d & 0 & 0 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_3 & 0 \\ a_2 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_3 \\ 0 & b_2 & 0 & b_4 \end{vmatrix}$

$$(3)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \qquad (4)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

5.用行列式的定义计算下三角形行列式的值

$$(1)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)\quad \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中对角线上方的元素全为零。

6.选择i及k，使

(1)$13427i9k8$成奇排列；

(2)$i247k356$成偶排列。

第二节　行列式的性质

上节我们给出了行列式的定义，根据行列式的定义，可以计算行列式的值。n 阶行列式一共有$n!$ 项，计算它就需要做$n!(n-2)$次乘法和$n!$ 次加法。当 n 较大时，计算的工作量是相当大的。在这一节我们来讨论行列式的性质，利用这些性质可以简化行列式的计算。

将行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行依次都排成列（即行列互换），得到一个新的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{21} \cdots a_{n1} \\ a_{12} a_{22} \cdots a_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} a_{2n} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个行列式称为D的转置行列式，记为D'。

对于D与D'，我们有

性质1 行列式与它的转置行列式相等。

证 根据行列式的定义3，有

$$D' = \sum_{(p_1 \cdots p_n)} (-1)^{[p_1 \cdots p_n]} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

再根据行列式的定义6，等式的右边正好是D的展开式，因此

$$D = D'$$

性质1表明，在行列式中行与列所处的地位是相同的。因此，对行列式的如下性质，若能证明关于行成立，自然关于列也就成立。

性质2 如果以一数λ去乘行列式中的某一行(或某一列)等于数λ去乘行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 根据行列式的定义3，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(s_1 \cdots s_n)} (-1)^{[s_1 \cdots s_n]} a_{1s_1} \cdots (\lambda a_{is_i}) \cdots a_{ns_n}$$

$$=\lambda \sum_{(s_1\cdots s_n)}(-1)^{[s_1\cdots s_n]}a_{1s_1}\cdots a_{is_i}\cdots a_{ns_n}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

性质2告诉我们，在行列式中如果某一行（或某一列）有公因子，那末这个公因子可以提到行列式外面来。

特别当$\lambda=0$时，行列式中有一行（或一列）的元素全为零，那末这个行列式的值为零。

性质3 如果行列式中的第i行的各元素都是二项之和：$a_{ij}=b_j+c_j$（$j=1, 2, \cdots, n$），那末这个行列式等于两个行列式之和，这两个行列式除第i行分别为$b_1\cdots b_n$和$c_1\cdots c_n$以外，其余各行均与原来行列式的对应行一样。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

根据行列式的定义3，不难证明此性质。请读者自己完成。

性质4 交换行列式的任意两行（或两列），行列式的值

反号。

证 不妨假定交换行列式D中的第i行与第j行，记为$[i,j]$，得到一个新的行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s_i} & \cdots & a_{1s_j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{js_i} & \cdots & a_{js_j} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{is_i} & \cdots & a_{is_j} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns_i} & \cdots & a_{ns_j} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (\text{第}i\text{行}) \\ \\ (\text{第}j\text{行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

根据行列式的定义3，并注意到第i行的元素中取a_{js_j}，在第j行的元素中取a_{is_i}，有

$$D_1=\sum_{(s_1\cdots s_n)}(-1)^{[s_1\cdots s_j\cdots s_i\cdots s_n]}a_{1s_1}\cdots a_{js_j}\cdots a_{is_i}\cdots a_{ns_n}$$

$$=\sum_{(s_1\cdots s_n)}-(-1)^{[s_1\cdots s_i\cdots s_j\cdots s_n]}a_{1s_1}\cdots a_{is_i}\cdots a_{js_j}\cdots a_{ns_n}$$

$=-D$。**证毕**

由性质4，可以得到以下两个推论：

推论1 如果行列式中有两行（或两列）相同，那末这个行列式的值为零。

推论2 如果行列式中有两行（或两列）对应元素成比例，那末这个行列式的值为零。

根据性质3及性质4的推论2又可以得到在行列式的计算中有着重要作用的

性质5 把行列式中的第i行（或第i列）的各元素乘以一数λ后，加到第j行（或第j列）的对应元素上去，记为$\lambda\times[i]+[j]$（或$\lambda\times\langle i\rangle+\langle j\rangle$），行列式的值不变。即