石油地球物理勘探培训教材

地震资料波动方程偏移

郑仙种 编

石油地球物理勘探局

内容简介

文中着重介绍几种常用的地震波波动方程解决反射层偏移归位的方法，并对地震波传播方程的推导作了较系统阐述。推导方程所用到的数学知识亦都在各章开始时略作介绍，以便自学。

说　明

随着数学、电子学、计算机科学和信息论的发展，石油地球物理勘探技术，尤其是地震勘探技术得到了迅速的发展。在勘探方法上，从常规的二维勘探发展到弯线勘探，多线勘探和三维面积勘探；在采集仪器方面，由模拟地震仪发展到数字地震仪和1000道以上的超多道数字地震仪；在处理方法上，则广泛地应用动、静校正、反褶积、偏移和旨在研究地层，岩性的各种专门处理；在勘探目的上，从单纯的研究构造油藏发展到研究地层、岩性油藏；予计不久的将来地层、岩性油藏的勘探将成为一种常规的技术。因此，摆在石油地球物理勘探工作者面前的一个重要任务是学习新的勘探技术，为了给这种学习创造条件，我们组织科技人员编写了几种适于自学的培训教材。

编写这种教材对我们来说只是一种尝试，因此，仅供内部使用。

一九八三年七月

目　　录

第一章　应变与应力

一物体在外力作用下发生变形，当外力消除后能够完全恢复原状，这种性质称为弹性，具有这种性质的物体称为弹性体。在地震勘探工作中，在离震源很近的地方（破裂地带和塑性地带），爆炸造成的形变很大，从而岩层是不能看成弹性体的。但在离震源足够远的地方，由于岩石受的力很小，而且受力时间也相当地短，从而那里的岩层一般可以看成是弹性体。一般说来，当作用力足够小而作用时间也足够短时，许多种固体可以看成完全弹性体。

本章所讨论的问题是，弹性体在外力作用下的几何变形和应力分布以及它们之间的关系。为使问题简化，我们假定弹性体是均匀的，各向同性的完全弹性体，并假定它处于平衡状态。所谓均匀的弹性体是指其物理量如密度、拉每系数、弹性模量等等均为常数。而各向同性是指弹性体在各个方向上都有相同的弹性性质。

§1.1 数学提要

1. 向量的坐标表示

在三维直角坐标系中，一个向量$\vec{A}$可以用它的三个分量来表示（如图1.1），即

$\vec{A} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

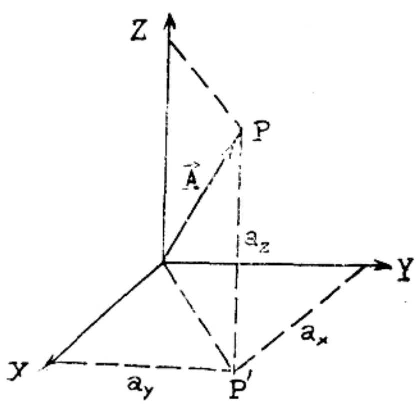

图 1.1

式中$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$是沿坐标轴 X、Y、Z 的单位向量。向量$\vec{A}$可以简记为

$$\vec{A} = (a_x,\ a_y,\ a_z) \text{ 或 } \vec{A}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

2. 向量的模与方向余弦

向量$\vec{A}$的模（或大小）记为$|\vec{A}|$，其坐标表示为

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (1.2)$$

向量$\vec{A}$的方向可由三个坐标轴的三维余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 来规定，称它为向量$\vec{A}$的方向余弦。其中 α、β、γ 是向量$\vec{A}$分别与正 X、Y、Z 轴的夹角（称为方向角）。用坐标表示为

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{A}|},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{A}|},\quad \cos\gamma = \frac{d_z}{|\vec{A}|} \qquad (1.3)$$

并且它满足关系式

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (1.4)$$

3. 向量的加法、倍数和减法

根据求两力之合力的平行四边形法则，我们可以用它来定义两个向量的向量和（如图 1.2），也可以用另一种方法（三角形法则）来定义（如图1.3）

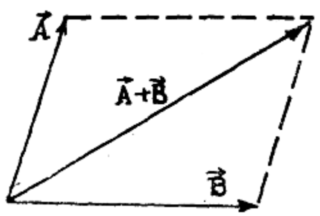

图 1.2 平行四边形法则

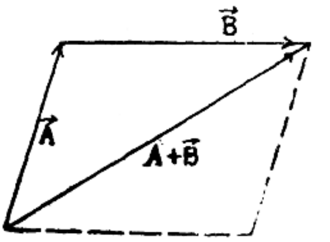

图 1.3 三角形法则

(1) 交换律 $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

(2) 结合律 $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

用坐标表示时，若 $\vec{A} = (a_x, a_y, a_z)$，$\vec{B} = (b_x, b_y, b_z)$ 则有

$$\vec{A} + \vec{B} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z)$$

如果 k 是一个正实数，则 $k\vec{A}$ 表示和$\vec{A}$方向相同而其模为 $k|\vec{A}|$的一个向量；如果 k 是一个负实数，则 $k\vec{A}$表示和$\vec{A}$方向相反而其模为$|k||\vec{A}|$的一个向量。向量的倍数满足下面的规律

(1) 结合律 $k_1(k_2\vec{A}) = (k_1k_2)\vec{A}$

(2) 分配律 $k(\vec{A}+\vec{B})=k\vec{A}+k\vec{B}$

有了倍数的定义，可以定义向量的减法，即

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-1)\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

4. 两向量的标积

两个向量$\vec{A}$和$\vec{B}$的标积记为$\vec{A}\cdot\vec{B}$，其定义如下

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta \tag{1.5}$$

式中θ是两向量正向间的夹角。标积满足下面规律

(1) 交换律 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

(2) 分配律 $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

由定义可知，直角坐标系的三个单位向量满足下列关系

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

因此，标积的坐标表示为

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B}&=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\end{aligned} \tag{1.6}$$

5. 两向量的向量积

两向量$\vec{A}$和$\vec{B}$的向量积记为$\vec{A}\times\vec{B}$，其定义如下

(1) $|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\theta$

(2) $\vec{A}\times\vec{B}$的方向按右手螺旋法则确定。即按照从$\vec{A}$经过两者夹角转向$\vec{B}$的方向旋转一个右手螺旋，螺旋轴线前进的方向就定义为$\vec{A}\times\vec{B}$的方向。式中的θ为两向量正向间的夹角。

由定义易知，右手直角坐标系的三个单位向量满足下列关系

$$\vec{i}\times\vec{j}=-(\vec{j}\times\vec{i})=\vec{k}$$

$$\vec{j}\times\vec{k}=-(\vec{k}\times\vec{j})=\vec{i}$$

$$\vec{k}\times\vec{i}=-(\vec{i}\times\vec{k})=\vec{j}$$

此外，对于任意的$\vec{A}$、$\vec{B}$有$\vec{A}\times\vec{A}=\vec{B}\times\vec{B}=0$ 以及

(1) 反交换律 $\vec{A}\times\vec{B}=-\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)$

(2) 分配律 $\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

由上面的关系式可以得到向量积的坐标表示式

$$\vec{A}\times\vec{B}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 \quad + a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} \\
&\quad - a_y b_x \vec{k} + 0 \quad + a_y b_z \vec{i} \\
&\quad + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} \quad + 0 \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} \\
&\overset{\text{记}}{=} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

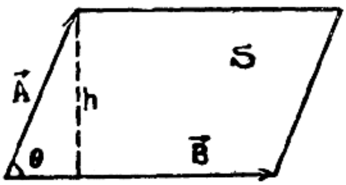

图 1.4

由向量积的定义，有（如图 1.4）

$$
\begin{aligned}
|\vec{A}\times\vec{B}| &= |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta \\
&= |\vec{A}|\sin\theta|\vec{B}| \\
&= h|\vec{B}| \\
&= S
\end{aligned}
$$

即向量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的向量积之模等于以向量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 为边的平行四边行的面积。

6．三向量的混合积

三个向量 $\vec{A}=(a_x, a_y, a_z)$，$\vec{B}=(b_x, b_y, b_z)$，$\vec{C}=(c_x, c_y, c_z)$ 的三重标量积为一标量：

$$
\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}
$$

用坐标表示，可写为

$$
\begin{aligned}
\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) &= (a_x, a_y, a_z)\cdot\left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\right) \\
&= a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

利用行列式行交换的性质可得

$$
\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})
$$

若以 $\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$ 为棱边作一平行六面体（如图 1.5），并设 $\vec{n}$ 是以 $\vec{B}$，$\vec{C}$ 为边的平行四边形的单位法向量，$\vec{h}$ 是 $\vec{A}$ 的终点到平行四边形（面积为 S）的高。$\vec{A}$ 和 $\vec{n}$ 的夹角为 θ 则有

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) &= |\vec{A}||\vec{B}\times\vec{C}|\cos\theta \\ &= |\vec{A}|\cos\theta\,|\vec{B}\times\vec{C}| \\ &= (\vec{A}\cdot\vec{n})\,|\vec{B}\times\vec{C}| \\ &= h\,|\vec{B}\times\vec{C}| \\ &= h\,S\end{aligned}$$

即标积 $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$ 等于以 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 和 $\vec{C}$（成右手系）为棱边的平行六面体的体积。

7．三个向量的三重向量积

三个向量 $\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$ 的三重向量积为一个向量：

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = -\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{C}\times(\vec{B}\times\vec{A})$$

这个向量是在由 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 组成的平面内（如图 1.6）并且有下面的关系式

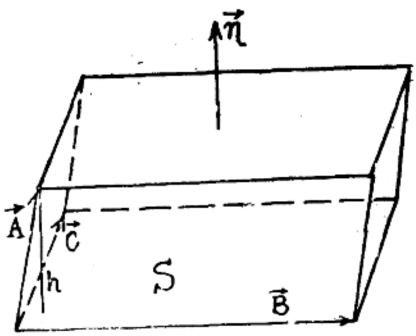

图 1.5

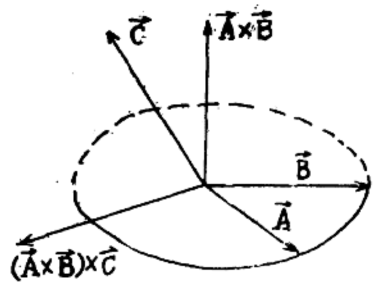

图 1.6

$$\begin{aligned}(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} &= (\vec{C}\cdot\vec{A})\,\vec{B}-(\vec{C}\cdot\vec{B})\,\vec{A} \\ \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) &= (\vec{C}\cdot\vec{B})\,\vec{A}-(\vec{C}\cdot\vec{A})\,\vec{B}\end{aligned} \tag{1.9}$$

8．向量函数的微分

假设向量函数 $\vec{A}(t)=[a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t)]$，则其导函数（仍然是一个向量）可通过它的三个分量的导数表示出来。即

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\left(\frac{da_x}{dt},\ \frac{da_y}{dt},\ \frac{da_z}{dt}\right) \tag{1.10}$$

如果导函数的导数存在，记为 $\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}$，并称它为 $\vec{A}(t)$ 的二阶导函数。

类似标量函数的微分，向量函数的微分可定义为

$$d\vec{A}(t)=\frac{d\vec{A}(t)}{dt}dt=[da_x(t),da_y(t),da_z(t)] \tag{1.11}$$

即向量函数的微分也可通过它的三个分量的微分表示出来。

如果向量 $\vec{A}(t)$，$\vec{B}(t)$和标量函数 $\varphi(t)$ 都可导，则有如下的微分运算法则：

$$\begin{aligned}
&[\vec{A}(t)+\vec{B}(t)]'=\vec{A}'(t)+\vec{B}'(t)\\
&[\varphi(t)\vec{A}(t)]'=\varphi'(t)\vec{A}(t)+\varphi(t)\vec{A}'(t)\\
&[\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t)]'=\vec{A}'(t)\cdot\vec{B}(t)+\vec{A}(t)\cdot\vec{B}'(t)\\
&[\vec{A}(t)\times\vec{B}(t)]'=\vec{A}'(t)\times\vec{B}(t)+\vec{A}(t)\times\vec{B}'(t)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

如果 $\vec{A}=\vec{A}(u)$，而 $u=\varphi(t)$，则 $\vec{A}$ 通过中间变量 u 而成为 t 的复合函数。复合函数的微分法则为

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{d\vec{A}}{du}\ \frac{du}{dt} \tag{1.13}$$

对于含两个或更多个自变量的向量函数的偏导数概念，也可以从标量函数的偏导数推广而得。例如，设向量函数

$$\begin{aligned}
\vec{u}&=\vec{u}(x,y,z)\\
&=u(x,y,z)\vec{i}+v(x,y,z)\vec{j}+w(x,y,z)\vec{k}
\end{aligned}$$

其中三个分量 u, v, w 关于空间点坐标 x, y, z 的偏导数存在，则 $\vec{u}$ 的微分可通过它的三个分量的微分表示出来，即

$$d\vec{u}=du\vec{i}+dv\vec{j}+dw\vec{k} \tag{1.14}$$

或

$$d\vec{u}=(du,dv,dw)$$

9. 向量函数的积分

假设向量函数 $\vec{A}(t)$ 的三个分量 $a_x(t)$，$a_y(t)$，$a_z(t)$ 为 t 的连续函数，则向量 $\vec{A}(t)$ 的积分（仍然是一个向量）可通过它的三个分量的积分表示出来。即

$$\int\vec{A}(t)dt=\vec{i}\int a_x(t)dt+\vec{j}\int a_y(t)dt+\vec{k}\int a_z(t)dt \tag{1.15}$$

并且有如下的运算法则：

$$\begin{aligned}
&\int\lambda\vec{A}(t)dt=\lambda\int\vec{A}(t)dt\\
&\int[\vec{A}(t)+\vec{B}(t)]dt=\int\vec{A}(t)dt+\int\vec{B}(t)dt\\
&\int[\vec{C}\cdot\vec{A}(t)]dt=\vec{C}\cdot\int\vec{A}(t)dt\\
&\int[\vec{C}\times\vec{A}(t)]dt=\vec{C}\times\int\vec{A}(t)dt
\end{aligned} \tag{1.16}$$

其中 λ 为常数，而 $\vec{C}$ 为常向量。

类似地，我们可以把单变量向量的积分概念推广到多变量向量的积分情形。假设向量 $\vec{U}(x,y,z)$ 的三个分量 $u(x,y,z)$，$V(x,y,z)$ 和 $W(x,y,z)$ 在空间区域 Ω 上连续，则向量 $\vec{U}(x,y,z)$ 在 Ω 上的积分可通过它的三个分量在 Ω 上的积分表示出来。即

$$\int_{\Omega}\vec{U}d\Omega=\vec{i}\int_{\Omega}ud\Omega+\vec{j}\int_{\Omega}Vd\Omega+\vec{k}\int_{\Omega}wd\Omega \tag{1.17}$$

其中 Ω 为空间积分区域。例如，Ω 是由空间闭曲面围成的空间区域，则上式可写为体积分形式

$$\iiint_{\Omega}\vec{U}d\Omega=\vec{i}\iiint_{\Omega}ud\Omega+\vec{j}\iiint_{\Omega}Vd\Omega+\vec{k}\iiint_{\Omega}wd\Omega \tag{1.18}$$

若 Ω 是取空间曲面 S 作为积分区域的话，则可写为曲面积分形式

$$\iint_{S}\vec{U}ds=\vec{i}\iint_{S}uds+\vec{j}\iint_{S}vds+\vec{k}\iint_{S}wds \tag{1.19}$$

10．积分中值定理

假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在 (a,b) 内至少存在一点 C 使得下式成立：

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=f(c)(b-a),\ (a<c<b) \tag{1.20}$$

这就是定积分中值定理。推广到曲面积分和体积分时可表述如下

假设函数 $f(x,y,z)$ 在闭曲面 S 上连续，则在 S 内至少存在一点 (x^*,y^*,z^*) 使得下式成立：

$$\iint_{S}f(x,y,z)ds=f(x^*,y^*,z^*)S \tag{1.21}$$

其中点 (x^*,y^*,z^*) 属于 S 内，右边的 S 是左边积分区域曲面 S 的面积（用同一符号表示）。

同样假定函数 $f(x,y,z)$ 在空间闭区域V上连续，则在V内至少存在一点 (x^*,y^*,z^*) 使得下式成立：

$$\iiint_{V}f(x,y,z)dV=f(x^*,y^*,z^*)V \tag{1.22}$$

其中点 (x^*,y^*,z^*) 属于 V 内，右边的 V 是左边积分区域 V 的体积。

11．张量概念

众所周知，在三维空间中标量只有一个“分量”，而向量有三个分量，它可写成

$$\vec{A}(x,y,z)=(a_x,a_y,a_z)$$

也就是说，一个空间（三维）向量需要用三个量（分量）来表示它，那么有没有比向量更复杂的物理量，它需要用更多的量来表示呢？有。后两节中我们所考虑的应变和应力就是这种物理量。现在我们先从一个简单例子来说明这一问题。如果我们要描述向量 $\vec{A}(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 附近的变化率，即向量 $\vec{A}$ 在空间的分布情况，那么就需要考虑

它的三个分量 $a_x(x,y,z)$，$a_y(x,y,z)$ 和 $a_z(x,y,z)$ 分别对三个坐标 x，y 和 z 的偏导数，这样就得到九个偏导数。为方便起见，我们把这九个偏导数用双下标的记号来表示它，即 a_{xx}，a_{xy}，a_{xz}；a_{yx}，a_{yy}，a_{yz}；a_{zx}，a_{zy} 和 a_{zz}。其中第一个下标表示它在那个坐标轴上的分量；而第二个下标则表示其分量对各个坐标求偏导数。由此可见，需要用到九个量，即九个偏导数才能描述向量 $\vec{A}$ 在空间的分布情况。类似于把向量表示为其三个分量的列矩阵形式，我们把上述的九个偏导数看成一个整体，并排成一个方阵：

$$\begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

这个方阵描述了向量 $\vec{A}(x,y,z)$ 在空间的分布情况，或者说向量 $\vec{A}(x,y,z)$ 的空间分布情况完全由方阵（1.23）所确定。我们就把这个方阵叫做一个张量，而方阵中的每个元素叫做这个张量的分量。张量可以看成是向量的推广，而向量也可以看成是张量的特殊情形。因而也可以把标量，向量和张量三者在某种意义上统一起来。现在我们考虑三维空间的情形，如果用 N 表示空间的维数，即 $N=3$，用 n 表示分量的个数。那么，标量，向量和张量三者的分量的个数就可以写成

标量：$n=N^0=1$

向量：$n=N^1=3$

张量：$n=N^2=9$

因此，我们可以把具有九个分量（对三维空间而言）的张量叫做一个二秩张量，这里我们把 N 上面的指数叫做张量的“秩”。在这种理解下，也就可以把标量和向量分别叫做零秩张量和一秩张量。所以，标量，向量和张量在“秩”的意义上统一起来了。

§ 1.2 弹性体变形的几何分析

在外力作用下，弹性体会产生变形。我们首先来研究其几何变形的情况，即要研究弹性体变形后其内部各点间的位移以及其内部各点的应变状态。

1. 位移梯度

任取弹性体内一点 P，设对于坐标系 OXYZ，P 点的初始位置为向径 $\vec{r}=(x,y,z)$，变形后 P 点位移到 P^* 点，并记 P^* 点的向径为 $\vec{r}^*=(x^*,y^*,z^*)$，这里 $\vec{r}^*$ 是依赖于 $\vec{r}$ 的，即 $\vec{r}^*=\vec{r}^*\left(\vec{r}\right)$。如果记 $\vec{u}\left(\vec{r}\right)=\overrightarrow{PP^*}=\vec{r}^*-\vec{r}$ 则我们称 $\vec{u}\left(\vec{r}\right)=\vec{u}(x,y,z)$ 为 P 点的位移向量（或位移场）。对应物体内不同点，$\vec{u}\left(\vec{r}\right)$ 的三个分量值是随着点的坐标而变化的，所以我们可以把位移向量 $\vec{u}$ 写成 $\vec{u}=[u(x,y,z),V(x,y,z),w(x,y,z)]$，并假定分量 u，v，w 为任意阶可微函数。

现在考虑 P 点的一个邻近点 Q，Q 点在变形后位移至 Q^* 点。这里 Q 点的向径为

$\vec{r}+d\vec{r}$，Q^*点的向径为$\vec{r^*}+d\vec{r^*}$，而Q点的位移向量$\overrightarrow{QQ^*}$为 $\vec{u}\left(\vec{r}+\vec{dr}\right)=\vec{u}(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$。如果记$\Delta\vec{u}=\vec{u}\left(\vec{r}+d\vec{r}\right)-\vec{u}\left(\vec{r}\right)$，则我们称$\Delta\vec{u}$为Q点对P点的相对位移（如图1.7所示）。

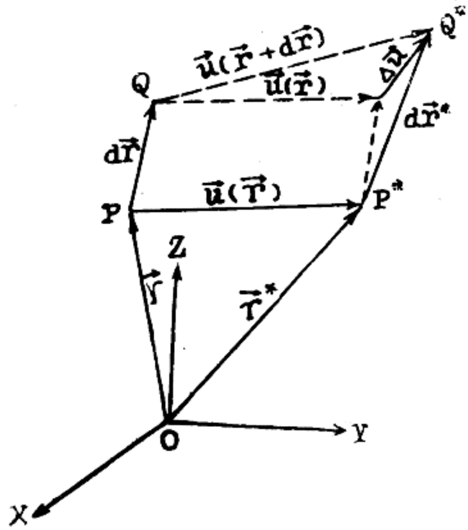

图 1.7

如果Q点离P点很近时，$\Delta\vec{u}\approx d\vec{u}=(du,dv,dw)$。所以Q点对P点的相对位移$\Delta\vec{u}$的三个分量可以通过下列公式来计算：

$$
\begin{aligned}
du&=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\\
dV&=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz\\
dw&=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

若记

$$
d\vec{u}=\begin{bmatrix}du\\dv\\dw\end{bmatrix},\quad d\vec{r}=\begin{bmatrix}dx\\dy\\dz\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}&\frac{\partial u}{\partial z}\\\frac{\partial V}{\partial x}&\frac{\partial V}{\partial y}&\frac{\partial V}{\partial z}\\\frac{\partial w}{\partial x}&\frac{\partial w}{\partial y}&\frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}\tag{1.25}
$$

则（1.24）式可简写为

$$\vec{du} = A\vec{dr} \tag{1.26}$$

我们把（函数）矩阵 A 称为 P 点的位移梯度。所以由关系式（1.26）得知，P 点的任意邻近点 Q 对于 P 点的相对位移 $\vec{du}$ 完全由 P 点的位移梯度 A 所决定。

下面来说明位移梯度 A 的几何意义。由图 1.7 可得到

$$\vec{dr^*} = \vec{dr} + \vec{du} \tag{1.27}$$

利用（1.26）式可得

$$\begin{aligned}\vec{dr^*} &= \vec{dr} + A\vec{dr}\\ &= I\vec{dr} + A\vec{dr}\\ &= (I+A)\vec{dr}\end{aligned}$$

这里 I 为单位矩阵

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

即

$$\overrightarrow{P^*Q^*} = (I+A)\overrightarrow{PQ} \tag{1.28}$$

在小范围内，可以认为过已知点 P 的任一直线段（线元）$\overline{PQ}$，变形后仍为一直线段 $\overline{P^*Q^*}$。那么从（1.28）式可以看出：位移梯度 A 正好刻划了小线元在变形后发生的方向与长度上的变化（参看图 1.7）。

2. 应变张量

如前所述，从 P 点的向径 $\vec{r} = (x, y, z)^T$（表示列向量）出发的一小线元 $d\vec{r}$，变形后移至 P^* 点的向径 $\vec{r^*} = (x^*, y^*, z^*)^T$ 出发的小线元 $d\vec{r^*}$，它们之间有如下关系式

$$\vec{r^*} = \vec{r} + \vec{u}(\vec{r}), \qquad \vec{dr^*} = (I+A)\vec{dr} \tag{1.29}$$

式中 $\vec{u}\left(\vec{r}\right)$ 称为 P 点的位移向量，A 称为 P 点的位移梯度。现在我们来研究 P 点的小线元 $\left|\vec{dr}\right|$ 在变形后的伸长度。所谓伸长度，即小线元的长度的相对变化。如果记变形后对应的 P^* 点的线元长度为 $\left|\vec{dr^*}\right|$，以 e 表示 P 点线元的伸长度，那么有

$$e = \frac{|\vec{dr^*}| - |\vec{dr}|}{|\vec{dr}|} = \frac{|\vec{dr^*}|}{|\vec{dr}|} - 1 \tag{1.30}$$

为了明确是在哪个方向上的伸长度，我们假定线元向量 $\vec{dr}$ 的方向余弦为 $\vec{n} = \left(\frac{dx}{\left|\vec{dr}\right|},\right.$

$\dfrac{dy}{|\overrightarrow{dr}|}$, $\dfrac{dz}{|\overrightarrow{dr}|}\Big)\overset{记}{=}(l,m,n)$，那么就可以用 $e_{\vec{n}}$ 来表示P点在 $\vec{n}$ 方向上线元的伸长度。由于方向 $\vec{n}$ 的任意性，所以常称 $e_{\vec{n}}$ 表示了P点的应变状态。所谓应变状态就是物体内一点在各个方向上的线元的伸长度的总称。亦即可以把全体伸长度 $\{e_{\vec{n}}\}$ 称为P点的应变状态。

下面我们来计算伸长度 $e_{\vec{n}}$。由（1.27）式有

$$\overrightarrow{dr^*} = \overrightarrow{dr} + \overrightarrow{du} = (dx, dy, dz) + (du, dV, dw)$$
$$= (dx + du, dy + dv, dz + dw)$$

$$|\overrightarrow{dr^*}| = \sqrt{(dx + du)^2 + (dy + dV)^2 + (dz + dw)^2}$$
$$= \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2(dxdu + dydV + dzdw) + (du^2 + dV^2 + dw^2)}$$
$$= |\overrightarrow{dr}|\sqrt{1 + \frac{2}{|\overrightarrow{dr}|^2}(dxdu + dydV + dzdw) + \frac{1}{|\overrightarrow{dr}|^2}(du^2 + dV^2 + dw^2)}$$

在小变形的情况下，位移向量 $\overrightarrow{du}$ 很小，即 du，dv，dw 很小，因而可略去其乘积项。再利用近似公式

$$(1 + x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

则计算 $|\overrightarrow{dr^*}|$ 的式子可简化为

$$|\overrightarrow{dr^*}| = |\overrightarrow{dr}|\left[1 + \frac{1}{|\overrightarrow{dr}|^2}(dxdu + dydV + dzdw)\right]$$

代入（1.30）式便得到

$$e_{\vec{n}} = \frac{1}{|\overrightarrow{dr}|^2}(dxdu + dydV + dzdw)$$

利用（1.24）式并加以整理后得到

$$e_{\vec{n}} = \frac{1}{|\overrightarrow{dr}|^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)dx\right.$$
$$+ \left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)dy$$
$$\left.+ \left(\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right)dz\right]$$
$$= \frac{1}{|\overrightarrow{dr}|^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx^2 + \frac{\partial V}{\partial y}dy^2 + \frac{\partial w}{\partial z}dz^2\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)dxdy\right.$$
$$\left.+ \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)dydz + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)dzdx\right]$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{dx}{|d\vec{r}|}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial y}\left(\frac{dy}{|d\vec{r}|}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{dz}{|d\vec{r}|}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{dx}{|d\vec{r}|}\ \frac{dy}{|d\vec{r}|} + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{dy}{|d\vec{r}|}\ \frac{dz}{|d\vec{r}|}$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{dz}{|d\vec{r}|}\ \frac{dx}{|d\vec{r}|}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}l^2 + \frac{\partial V}{\partial y}m^2 + \frac{\partial w}{\partial z}n^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)lm$$

$$+ \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)mn + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)nl$$

引进记号

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y} & \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & \varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{1.31}$$

则上式可写成

$$\begin{aligned} e_{\vec{n}} &= \varepsilon_{xx}l^2 + \varepsilon_{yy}m^2 + \varepsilon_{zz}n^2 + 2\varepsilon_{xy}lm + 2\varepsilon_{yz}mn + 2\varepsilon_{zx}nl \\ &= (l, m, n)\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.32}$$

若记

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

则有

$$e_{\vec{n}} = \vec{n}E\vec{n}^T \tag{1.34}$$

（1.34）式是（1.30）式在小变形条件下的简化。但（1.34）式的简明形式揭示了弹性体变形中一个规律：对任一点P，在任意给定方向$\vec{n}$上，线元的伸长度（即P点的应变状态）由矩阵E（它的每个元素由P点的位移梯度所确定）以$e_{\vec{n}} = \vec{n}E\vec{n}^T$的形式完全确定。因此，矩阵E描述了物体内各点的应变状态，并称矩阵E为应变张量。

应变张量E是一个对称矩阵，因而它只有六个独立的元素，这些元素可根据(1.31)式由位移梯度来确定。下面我们来分析应变张量各元素，它们表示的在P点附近变形的具体含义。

当 $\vec{n}$ 取为正 x 轴的方向时，即 $\vec{n}=(1,0,0)=\vec{i}$，此时

$$e_{\vec{i}}=(1,0,0)\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{xy},\varepsilon_{xz})\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\varepsilon_{xx}$$

这说明 ε_{xx} 表示P点在 x 轴方向线元的伸长度。同理，若取 $\vec{n}$ 分别为(0,1,0)和(0,0,1)，可得到 $e_{\vec{j}}=\varepsilon_{yy}$，$e_{\vec{k}}=\varepsilon_{zz}$。它们分别为P点在 y 轴和 z 轴方向上线元的伸长度。所以我们把矩阵 E 的主对角线上三个元素 ε_{xx}，ε_{yy} 和 ε_{zz} 叫做正应变。

为了说明其它三个元素 ε_{xy}，ε_{yz} 和 ε_{zx} 的含义，我们引入一个变形中剪切的概念。设过P点的两线元 $\vec{dr}_1$ 和 $\vec{dr}_2$ 变形后成为 P^* 点的两线元 $\vec{dr}_1^*$ 和 $\vec{dr}_2^*$，它们除长度的改变外，一般说来 $\vec{dr}_1^*$，$\vec{dr}_2^*$ 的夹角不同于 $\vec{dr}_1$，$\vec{dr}_2$ 的夹角。特别，如果 $\vec{dr}_1$ 与 $\vec{dr}_2$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$，变形后 $\vec{dr}_1^*$ 与 $\vec{dr}_2^*$ 的夹角为 α，则称角 $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 为P点在 $\vec{dr}_1^*$ 与 $\vec{dr}_2^*$ 两方向的剪切。有了剪切（角）的概念，就可以来说明 ε_{xy}，ε_{yz} 和 ε_{zx} 正好与P点在两坐标轴方向的剪切有联系。为此，我们先取 $\vec{dr}_1$ 和 $\vec{dr}_2$ 分别为 x 轴和 y 轴方向的单位向量，并写为列向量形式有

$$\vec{dr}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \vec{dr}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

且 $\left|\vec{dr}_1\right|=\left|\vec{dr}_2\right|=1$。若记P点在X，Y轴方向上的剪切为 γ_{xy}，则有（图1.8和1.9）

$$\sin\gamma_{xy}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$=\frac{\vec{dr}_1^*\cdot\vec{dr}_2^*}{|\vec{dr}_1^*|\,|\vec{dr}_2^*|}=\frac{(\vec{dr}_1+\vec{du}_1)\cdot(\vec{dr}_2+\vec{du}_2)}{|\vec{dr}_1^*|\,|\vec{dr}_2^*|}$$

$$=\frac{\vec{dr}_1\cdot\vec{dr}_2+\vec{dr}_1\cdot\vec{du}_2+\vec{dr}_2\cdot\vec{du}_1+\vec{du}_1\cdot\vec{du}_2}{|\vec{dr}_1^*|\,|\vec{dr}_2^*|}\qquad(1.35)$$

由伸长度的定义（1.30）式有

$$|\vec{dr}_1^*|=|\vec{dr}_1|(1+e_{\vec{i}})=1+e_{\vec{i}}$$

和

$$|\vec{dr}_2^*|=|\vec{dr}_2|(1+e_{\vec{j}})=1+e_{\vec{j}}$$