高 等 数 学

第 三 册

吴德佺编著

一九八一年十月

高等数学

第二册

高 等 数 学

第 三 册

吴 德 佺 编 著

一九八一年十月

目　录

第十四章　广义积分与含参变量的积分

§1　广义积分的敛散性

在第七章关于定积分的讨论中，我们已经讲过无穷限与无界函数的两种广义积分的概念与计算。本节来讲一讲广义积分敛散性的判别法。

1.　广义积分与级数的对应关系

广义积分与无穷级数间有着内在的联系，根据这一联系，我们对广义积分的敛散性的讨论就可以完全与级数类似地进行。

我们知道，广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

令 $F(b)=\int_a^b f(x)\,dx$，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b),$$

而数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

其中 $s_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$ 为级数的部分和序列，我们知道，序列是 n 的函数，若令

$$s_n = F(n),$$

则

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} F(n).$$

由此可见，无穷限积分与数项级数都可看成函数的极限，所不同的是前者是自变量连续地趋向$+\infty$，后者是沿自然数趋向$+\infty$。

对无界函数的广义积分，也一样可看成函数的极限。如被积函数 $f(x)$ 在$[a,b)$上连续，点 b 为瑕点，则

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} F(\varepsilon).$$

其中 $F(\varepsilon)=\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$。

从以上对比中还可看出，广义积分中的被积函数 $f(x)$ 相当于数项级数中的通项 u_n。

思考题

将广义积分与数项级数都看成函数的极限时，这些极限的数量描述有何不同？

2. 无穷限积分

1^0 运算性质

从无穷限积分的定义易见有以下性质：

(1) 若$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，k 为常数，则$\int_a^{+\infty} kf(x)\,dx$ 也收敛，且

$$\int_a^{+\infty} kf(x)\,dx = k\int_a^{+\infty} f(x)\,dx;$$

(2) 若$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$与$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 都收敛，则$\int_a^{+\infty} [f(x)\pm g(x)]\,dx$ 也收敛，且

$$\int_a^{+\infty} [f(x\pm g(x)]\ dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)\,dx;$$

(3) 设 c 为大于 a 的任一常数，则积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$与$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ 同时收敛或同时发散；

(4) 若$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$与$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 都收敛，且在$[a,+\infty)$上有 $f(x)\leq g(x)$，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

以上性质与级数类似。对无穷限积分的敛散性，也与数项级数一样，可类似讨论。

2^0 敛散性的判别法

为简便起见，以下都假设被积函数在区间$[a,+\infty)$上连续。

定理1 若函数 $f(x)\geq 0\ (a\leq x<+\infty)$，则积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛的充要条件是 $F(b)=\int_a^b f(x)\,dx$ 有上界，即 $\exists M>0$，使得

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq M \qquad (a\leq b<+\infty).$$

证：因为 $f(x)\geq 0$时，$F(b)=\int_a^b f(x)\,dx$ 是单调上升函数，而当 $b\to+\infty$时，单调上升函数 $F(b)$ 有极限的充要条件是 $F(b)$ 有上界。所以 积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛的充要条件是 $F(b)=\int_a^b f(x)\,dx$ 有上界。

定理2 （比较判别法）

若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在$[a,+\infty)$内连续，且当 $x\geq x_0\geq a$ 时，有$0\leq f(x)\leq g(x)$，则

(1) 当积分$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛时，积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 也收敛；

(2) 当积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散时，积分$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 也发散。

由定理 1 易证。请读者自己证明之。

以上判别法都是对正函数来说的。对于任意函数 $f(x)$，以下我们首先引进绝对收敛概念，再讲讲常用的哥西判别法。

定义 若积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，则称积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$为绝对收敛积分；若$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，而$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$发散，则称积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$为条件收敛积分。

定理3 若积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，则积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$也收敛，即绝对收敛积分必为收敛积分。

证：因为

$$0\leq|f(x)|-f(x)\leq 2|f(x)|.$$

所以由已知条件及比较判别法知积分

$$\int_a^{+\infty}[|f(x)|-f(x)]dx$$

收敛。又因为

$$f(x)=|f(x)|-(|f(x)|-f(x)),$$

故由广义积分的运算性质知积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_a^{+\infty}|f(x)|dx-\int_a^{+\infty}[|f(x)|-f(x)]dx$$

也收敛。定理证毕。

由$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=A$的哥西收敛准则易知积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$的哥西收敛准则为：

积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛的充要条件是：

$\forall\varepsilon<0$，$\exists X(\varepsilon)\ (\geq a)$，使得只要$b$、$b'\geq X$，就有$\left|\int_b^{b'}f(x)dx\right|<\varepsilon$。

定理4（哥西判别法）

设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)\ (a>0)$上连续。

(1) 若$\exists k>0$，使得

$$|f(x)|\leq\frac{k}{x^p}\ (x\geq x_0\geq a).$$

而$p>1$，则积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$绝对收敛，因而收敛；

(2) 若$\exists k>0$，使得

$$|f(x)|\geq\frac{k}{x^p}\ (x\geq x_0\geq a).$$

而$p\leq1$，则积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散。

证：(1) 由$p>1$时积分$\int_a^{+\infty}\frac{k}{x^p}dx$收敛与比较判别法易见结论成立。

(2) 由$f(x)$的连续性与条件

$$|f(x)|\geq\frac{k}{x^p}\ (x\geq x_0\geq a),$$

易知$f(x)$在$x\geq x_0$上不变号，不妨设$f(x)>0\ (x\geq x_0)$，则由上式得

$$f(x)\geq\frac{k}{x^p}\ (x\geq x_0).$$

而当 $p\leq 1$时，积分$\int_{x_0}^{+\infty}\frac{k}{x^p}dx$ 发散，因此由比较判别法知 积 分$\int_{x_0}^{+\infty}f(x)dx$ 发散，故 由积分的运算性质知$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也发散。

哥西判别法用以下的极限形式使用起来更简便。

定理5（哥西判别法的极限形式）

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=k(0<|k|<+\infty)$，即

$$f(x)\sim\frac{k}{x^p}(x\to+\infty),$$

则 1) 当 $p>1$时，积 分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$（绝对）收敛；

2) 当 $p\leq 1$时，积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散

即积分$\int_a^{+\infty}f(x)\ dx$ 与 p 积 分$\int_a^{+\infty}\frac{k}{x^p}$同时收敛或发散。

应用极限不等式和定理 4 易证定理 5，此证明留作思考题，请读者自己证明。

思考题

1． 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=0$，而 $p>1$，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 绝对收敛。

2． 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=\infty$，而 $p\leq 1$，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散。

例1. 判别积分$\int_1^{+\infty}\frac{5x^2+1}{x^3+4}dx$ 的敛散性。

解：∵当 $x\to+\infty$时，

$$f(x)=\frac{5x^2+1}{x^3+4}\sim\frac{5}{x},\quad p=1.$$

∴积分发散。

例2. 判别积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$的敛散性。

解：∵当 $x\to+\infty$时，

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x+1}}\sim\frac{1}{x\sqrt{x}},\quad p=\frac{3}{2}>1.$$

∴积分收敛。

例3. 判别积分$\int_0^{+\infty}t^n e^{-t}dt$ 的敛散性。

解：法一：∵当 $t\to+\infty$时，无穷大量 e^t 的阶数$\gg n$，∴积分收敛。

法二：∵$t^2f(t)=t^{n+2}e^{-t}\to 0\ (t\to+\infty)$，而 $p=2<1$。

∴积分收敛。

例4. 判别积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ 的敛散性。

解：此题用哥西判别法的极限形式做不如直接用哥西判别法简单。

$$\because |f(x)|=\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\leq\frac{1}{x^2}\ (x\geq 1),\ p=2>1,\ \therefore \text{积分收敛。}$$

思考题

1. 例 4 如用哥西判别法的极限形式该怎么做？

2. 对积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$，以下做法的错误在哪里？

$$\because\quad \left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq\frac{1}{x}\ (x\geq 1),\ p=1,\ \therefore \text{积分发散。}$$

3. 无界函数的积分

无界函数的积分$\int_a^b f(x)\,dx$ 的敛散性的讨论与 2 完全类似。

定理6（哥西判别法）

设函数 $f(x)$ 在$[a,b)$上连续，$x=b$ 为瑕点。

1) 若$|f(x)|<\frac{k}{(b-x)^p}$，而 $p<1$，则积分$\int_a^b f(x)\,dx$ 绝对收敛，因而收敛；

2) 若$|f(x)|>\frac{k}{(b-x)^p}$，而 $p\geq 1$，则积分$\int_a^b f(x)\,dx$ 发散。

定理7（哥西判别法的极限形式）

若 $\lim\limits_{x\to b-0}(b-x)^p f(x)=k\ (0<|k|<+\infty)$，即

$$f(x)\sim\frac{k}{(b-x)^p}\ (x\to b-0),$$

则积分$\int_a^b f(x)\,dx$ 与 p积分$\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^p}$同时收敛或发散，即

1) 当 $p<1$时，积分$\int_a^b f(x)\,dx$（绝对）收敛；

2) 当 $p\geq 1$时，积分$\int_a^b f(x)\,dx$ 发散。

例5. 判别积分$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$的敛散性。

解：法一：因为

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2},$$

所以积分收敛。

法二：$\because$ 当 $x\to 1-0$时，

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}\sim\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}},\ p=\frac{1}{2}<1.$$

$\therefore$ 积分收敛。

例6. 判别积分$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 的敛散性。

解：被积函数有两个瑕点 $x=0$ 与 $x=1$。因为积分

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

又当 $x\to 1-0$时，

$$\ln x=\ln[1+(x-1)]\sim x-1,$$

因此，

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\sim\frac{x-1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}=-\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}\,(x\to 1-0).$$

$p=-\frac{1}{2}<1$，所以积分$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 收敛。

又当 $x\to 0+0$时，由于无穷大量 $\ln x$ 的阶数$\ll 1$，所以积分$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 收敛。

综合以上结果，知积分$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 收敛。

§2 含参变量的定积分

1. 定义

设函数 $f(x,y)$ 在闭矩形

$$D:\ a\le x\le b,\ c\le y\le d$$

上连续。闭矩形 D 简写为$[a,b;c,d]$。对$[c,d]$上任一固定的 y_0，函数 $f(x,y_0)$ 是 x 的连续函数，因而定积分$\int_a^b f(x,y_0)\,dx$ 存在。显然，这个数与 y_0 有关。因此，当 y 在$[c,d]$上变动时，定积分$\int_a^b f(x,y)\,dx$ 就是变量 y 的函数。设

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx,\quad y\epsilon[c,d],$$

我们称变量 y 为参变量，称以上积分为含参变量 y 的定积分。注意，参变量 y 在积分过程中是常量，在积分后又看作变量。

在今后的学习和工作中会遇到一些有用的特殊函数，它们不是初等函数，但可用含参变量的积分表示。在应用时，要考虑这些函数的连续性、可导性与可积性等。为此，我们要研究含参变量积分的这些性质。

2. 性质

定理1（连续性）若函数 $f(x,y)$ 在闭矩形 $D=[a,b;c,d]$上连续，则函数 $\varphi(y)$ 在区间$[c,d]$上连续。

分析：要证对任一 $y_0\epsilon[c,d]$，函数 $\varphi(y)$ 在 $y=y_0$ 连续，即 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=\varphi(y_0)$。也就是要证

$$\forall\varepsilon<0,\ \exists\delta(\varepsilon,y_0)>0,\ 使得只要|y-y_0|<\delta,\ 就有|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon.$$

证：因为

$$\varphi(y)-\varphi(y_0)=\int_a^b f(x,y)\,dx-\int_a^b f(x,y_0)\,dx$$
$$=\int_a^b [f(x,y)-f(x,y_0)]\,dx,$$

又由 $f(x,y)$ 在闭矩形 D 上连续，知 $f(x,y)$ 在 D 上一致连续，即

$\forall \varepsilon_1>0$，$\exists \delta(\varepsilon_1)>0$，使得对一切 M、$M'\in D$，只要 M、M' 两点间的距离 $\rho=d(M,M')<\delta$，就有

$$|f(M)-f(M')|<\varepsilon_1.$$

取 $M=(x,y)$，$M'=(x,y_0)$，则只要 $\rho=d(M,M')=|y-y_0|<\delta$，就有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon_1$$

对一切 $x\in[a,b]$ 成立. 所以只要 $|x-y_0|<\delta$，就有

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|=\left|\int_a^b [f(x,y)-f(x,y_0)]\,dx\right|$$
$$\leq\int_a^b |f(x,y)-f(x,y_0)|\,dx<\varepsilon_1(b-a).$$

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{b-a}$，则由上可知

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon_1)>0$，使得只要 $|y-y_0|<\delta$，就有

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon_1(b-a)=\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=\varphi(y_0)$. 故函数 $\varphi(y)$ 在 $y=y_0$ 连续，又由于 $y_0\in[c,d]$ 的任意性，知函数 $\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续. 定理得证.

定理2 （积分号下求积分）

若函数 $f(x,y)$ 在闭矩形 $[a,b;c,d]$ 上连续，则

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy,$$

即累次积分的积分顺序可以交换.

这定理不证. 但是，这结论在二重积分化成累次积分中已作了几何说明.

定理3 （积分号下求导数）

若函数 $f(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 在闭矩形 $[a,b;c,d]$ 上连续，则函数 $\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 上有连续的导数，且

$$\varphi'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx. \tag{1}$$

证：直接根据导数定义证. 对任一 $y_0\in[c,d]$，令 $\triangle y=y-y_0$. 则由拉格朗日中值定理得

$$\triangle\varphi(y_0)=\varphi(y)-\varphi(y_0)=\int_a^b f(x,y)\,dx-\int_a^b f(x,y_0)\,dx$$
$$=\int_a^b [f(x,y)-f(x,y_0)]\,dx$$
$$=\int_a^b f'_y(x,y_0+\theta\triangle y)\triangle y\,dx$$

其中 $0<\theta<1$. 由上式两边同除 $\triangle y$，得

$$\frac{\triangle\varphi}{\triangle y}=\int_a^b f'_y(x,y_0+\theta\triangle y)\,dx.$$

由于函数 $f'_y(x,y)$ 在闭矩形 $[a,b;c,d]$ 上的连续性，并应用定理1，得

$$\varphi'(y_0)=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{\triangle\varphi(y_0)}{\triangle y}=\lim_{\triangle y\to 0}\int_a^b f'_y(x,y_0+\theta\triangle y)\,dx$$
$$=\int_a^b f'_y(x,y_0)\,dx.$$

再由 y_0 的任意性，得

$$\varphi'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx,\quad y\in[c,d].$$

又由定理 1 知 $\varphi'(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续。

对含参变量的定积分

$$\varphi(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx.$$

其中 $a\leq a(y)\leq b(y)\leq b\,(y\in[c,d])$，有以下结论：

定理4 若函数 $f(x,y)$ 在闭矩形 $[a,b;c,d]$ 上连续；$a(y)$、$b(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上连续，则函数 $\varphi(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上连续。

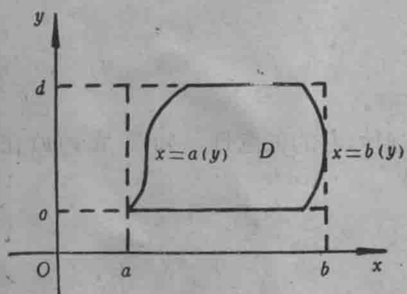

图 14.1

定理5 在定理 4 的条件下，则函数 $\varphi(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上可积，且

$$\int_c^d\varphi(y)\,dy=\iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

其中 D 为区域

$$a(y)\leq x\leq b(y)\ (c\leq y\leq d),$$

见图14.1.

定理6 若函数 $f(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 在闭矩形 $[a,b;c,d]$ 上连续；$a(y)$ 与 $b(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上有导数，则函数 $\varphi(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上可导，且

$$\varphi'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)\,dx+f(b(y),y)\,b'(y)-f(a(y),y)\,a'(y).\tag{2}$$

以上公式可由复合函数微商法导出．设

$$\Phi(y,u,v)=\int_v^u f(x,y)\,dx.$$

令 $u=b(y)$，$v=a(y)$，则

$$\varphi(y)=\Phi(y,b(y),a(y)).$$

请读者自己根据复合函数微商法导出定理 6 中的求导公式。

例1. 已知 $F(a)=\int_{a^2}^{a^3}e^{ax^2}dx$，求 $F'(a)$。

解： 由公式(2)得

$$F'(a)=\int_{a^2}^{a^3}\frac{\partial}{\partial a}(e^{ax^2})\,dx+e^{ax^2}\Big|_{x=a^3}\cdot 3a^2-e^{ax^2}\Big|_{x=a^2}\cdot 2a$$
$$=\int_{a^2}^{a^3}x^2e^{ax^2}dx+3a^2e^{a^7}-2ae^{a^5}.$$

例2. 验证

$$y(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

是微分方程 $y''+\omega^2 y=f(t)$ 的解，其中 $f(t)$ 为连续函数。

证：因为

$$y'=\frac{1}{\omega}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}[f(\tau)\sin\omega(t-\tau)]\,d\tau+\frac{1}{\omega}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\Big|_{\tau=t}$$

$$=\int_0^t f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau,$$

$$y''=\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}[f(\tau)\cos\omega(t-\tau)]\,d\tau+f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\Big|_{\tau=t}$$

$$=-\omega\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau+f(t)$$

$$=-\omega^2\left[\frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau\right]+f(t)$$

$$=-\omega^2 y+f(t).$$

所以 $y(t)$ 满足方程 $y''+\omega^2 y=f(t)$，即 $y(t)$ 是该微分方程的解。

利用含参变量的积分的性质，可以计算一些定积分。

例3. 计算积分 $I=\int_0^{\pi/2}\ln(1+\cos^2 x)\,dx$

解：首先引入参数 a。令

$$I(a)=\int_0^{\pi/2}\ln(1+a\cos^2 x)\,dx \qquad (设\ a>0).$$

对 a 求导。易知被积函数满足定理 3 的条件，因此，得

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+a\cos^2 x}dx\,(令\ t=\mathrm{tg}x)=\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{a}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(a+1+t^2)}=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{(a+1+t^2)-(1+t^2)}{(1+t^2)(a+1+t^2)}dt$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{a+1+t^2}\right]dx=\frac{1}{a}\left[\mathrm{arctg}t\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{a+1}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{a+1}}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a+1}}\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{a\sqrt{a+1}}\right].$$

再对 a 积分。得

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\int\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{a\sqrt{a+1}}\right]da=\frac{\pi}{2}\left[\ln a-\int\frac{da}{a\sqrt{a+1}}\right],$$

因为

$$\int\frac{da}{a\sqrt{a+1}}=\ln a-2\ln\left(\sqrt{a+1}+1\right)+C,$$

所以

$$I(a)=\pi\ln\left(\sqrt{a+1}+1\right)-\frac{\pi}{2}C.$$

确定常数 C。令 $a\to 0$，因为 $I(0)=0$，所以由上式得

$$C=\frac{2}{\pi}[\pi\ln 2-I(0)]=2\ln 2,$$

$$I(a)=\pi\ln(\sqrt{a+1}+1)-\pi\ln 2.$$

故

$$I=I(1)=\pi\ln(\sqrt{2}+1)-\pi\ln 2=\pi\ln\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

§3 含参变量的广义积分

含参变量的无穷限积分

$$\varphi(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx,$$

与含参变量的无界函数的积分

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx,$$

有些什么性质，是我们要研究的。但本节仅就第一种广义积分来研究，第二种广义积分可以完全类似地研究。

1. 收敛性与一致收敛性

如广义积分与数项级数的对应关系那样，含参变量的广义积分与函数项级数也有类似的对应关系。

函数项级数的和函数

$$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x),$$

其中部分和序列 $s_n(x)$ 实际上是变量 x 与 n 的二元函数。令 $G(x,n)=s_n(x)$，则

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}G(x,n).$$

若令 $F(y,b)=\int_a^b f(x,y)\,dx$，则含参变量的无穷限积分

$$\varphi(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x,y)\,dx=\lim_{b\to+\infty}F(y,b).$$

从上可见，函数项级数与含参变量的无穷限积分都是二元函数当一个变量趋于 $+\infty$ 时的单元极限，所不同的是前者是 $n\to+\infty$，后者是 b 连续地趋于 $+\infty$。根据以上两者的对应关系，对含参变量的无穷限积分可以象函数项级数那样类似地加以讨论。

定义1 若对于区间 $[c,d]$ 上的任一 y，积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx$ 收敛，则称积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx$ 在区间 $[c,d]$ 上收敛。

由函数项级数的一致收敛性概念，并根据前面讲的对应关系，很容易写出含参变量积分

的一致收敛性定义。

定义2 若对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists X(\varepsilon)$（不依赖于 y!）$\geq a$，使得只要 $b \geq X$，就有

$$|\varphi(y)-\int_a^b f(x,y)\,dx|=|\int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx|<\varepsilon\ (y\in I),$$

则称积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 在区间 I 上（对 y）一致收敛。

注意，在定义 2 中，区间 I 可以是有限区间，也可以是无穷区间；可以是开区间，也可以是闭区间或半开半闭区间。

思考题

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y)=\varphi(y)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0} F(x,y)=\varphi(y)$ 在区间 I 上的一致收敛怎么定义？

2. 积分一致收敛的判别法

与函数项级数类似，有

定理1（哥西准则）

积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 在区间 I 上一致收敛的充要条件是：

$\forall \varepsilon>0$，$\exists X(\varepsilon)$（不依赖于 y!），使得只要 b、$b'\geq X$，就有

$$|F(y,b')-F(y,b)|=|\int_b^{b'} f(x,y)\,dx|<\varepsilon \qquad (y\in I).$$

定理2（维氏判别法）

若函数 $f(x,y)$ 在矩形 $[a,+\infty;c,d]$ 上连续，且

$$|f(x,y)|\leq g(x) \qquad (x\geq a, y\in[c,d]),$$

而积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛，则积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 在区间 $[c,d]$ 上（对 y）一致收敛。

证：因为积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛，所以由哥西收敛准则知

$\forall \varepsilon>0$，$\exists X(\varepsilon)\geq a$，使得只要 b、$b'\geq X$，就有

$$|\int_b^{b'} g(x)\,dx|<\varepsilon.$$

又因为

$$|f(x,y)|\leq g(x) \qquad (x\geq a, y\in[c,d]),$$

所以当 b、$b'\geq X$时，有

$$|\int_b^{b'} f(x,y)\,dx|\leq|\int_b^{b'} |f(x,y)|\,dx|\leq|\int_b^{b'} g(x)\,dx| <\varepsilon\ (y\in[c,d]),$$

故由定理 1 知积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 在区间 $[c,d]$ 上一致收敛。

思考题

证明：若积分 $\int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx$ 在区间 $[c,d]$ 上一致收敛，则积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 也在区间

$[c,d]$上一致收敛。

例1. 设$|f(t)|\le kt^n$，证明：积分$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$在$p\in[\varepsilon,+\infty)(\varepsilon>0)$上对$p$一致收敛。

证： $\because |f(t)e^{-pt}|\le kt^ne^{-\varepsilon t}$，而$g(t)=kt^ne^{-\varepsilon t}$的积分$\int_0^{+\infty}g(t)dt$是收敛的。

$\therefore$由维氏判别法知积分$\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$在$p\in[\varepsilon,+\infty)$上对$p$一致收敛。

3. 一致收敛积分的性质

一致收敛积分与一致收敛级数类似有以下性质：

定理3 （连续性）

若1）函数$f(x,y)$在矩形$[a,+\infty;c,d]$上连续，

2）积分$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$在区间$[c,d]$上一致收敛，

则$\varphi(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$在区间$[c,d]$上连续。

证： 只要证明对任一$y_0\in[c,d]$，函数$\varphi(y)$在$y=y_0$连续即可。

因为

$$
\begin{aligned}
|\varphi(y)-\varphi(y_0)|&=\left|\int_a^{+\infty}f(x,y)dx-\int_a^{+\infty}f(x,y_0)dx\right|\\
&=\left|\int_b^{+\infty}f(x,y)dx-\int_b^{+\infty}f(x,y_0)dx+\int_a^b[f(x,y)-f(x,y_0)]dx\right|\\
&\le\left|\int_b^{+\infty}f(x,y)dx\right|+\left|\int_b^{+\infty}f(x,y_0)dx\right|+\left|\int_a^b[f(x,y)-f(x,y_0)]dx\right|\\
&=I_1+I_2+I_3,
\end{aligned}
$$

其中$I_i(i=1,2,3)$分别表示等式最后的三个积分。

又由于积分$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$的一致收敛性，知对$\forall\varepsilon>0$，$\exists X(\varepsilon)$，使得只要$b>X$，就有

$$|I_1|=\left|\int_b^{+\infty}f(x,y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad(y\in[c,d]),$$

$$|I_2|=\left|\int_b^{+\infty}f(x,y_0)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

固定b后，由于$f(x,y)$在矩形$[a,b;c,d]$上的连续性，知含参变量的定积分$\int_a^b f(x,y)dx$在区间$[c,d]$上连续，所以对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得只要$|y-y_0|<\delta$，就有

$$|I_3|<\frac{\varepsilon}{3},$$

故$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得只要$|y-y_0|<\delta$，就有

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|\le|I_1|+|I_2|+|I_3|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

即函数$\varphi(y)$在$y=y_0$连续。由于$y_0\in[c,d]$的任意性，知函数$\varphi(y)$在区间$[c,d]$上连续。定理证毕。

定理4 （积分号下求积分）

在定理 3 的条件下，则函数 $\varphi(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上可积，且

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_a^{+\infty} dx\int_c^d f(x,y)\,dy,$$

也就是两累次积分可以交换次序。

证：由定理 3 知函数 $\varphi(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上连续，因而可积。要证定理 4 成立，就是要证明

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$

$$\because \left|\int_c^d dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx-\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy\right|$$

$$=\left|\int_c^d dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx-\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx\right|$$

$$=\left|\int_c^d dy\int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|\le\int_c^d\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|dy,$$

$\forall\varepsilon>0$，由于 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 的一致收敛性。有

$\forall\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{d-c}>0$，$\exists X(\varepsilon)$，使得只要 $b>X$，对一切 $y\in[c,d]$，有

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon_1,$$

$$\therefore \left|\int_c^d dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx-\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy\right|$$

$$\le\int_c^d\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|dy<\varepsilon_1(d-c)=\frac{\varepsilon}{d-c}(d-c)=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx,$$

故定理得证。

定理5（积分号下求导数）

若1）函数 $f(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 在带形 $[a,+\infty;c,d]$ 上连续；

2）积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 在区间 $[c,d]$ 上收敛，积分 $\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ 在区间 $[c,d]$ 上一致收敛。

则函数 $\varphi(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上可导，且

$$\varphi'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx.$$

*证：可以用§ 2 定理 3 的证明方法类似证明，但这较繁。现先将无穷限的含参变量积分化成函数项级数，再由一致收敛级数的性质，导出以上结论。

任取一串单调递增且趋向 $+\infty$ 的序列 b_n，即

$a=b_1<b_2<\cdots<b_n$，且 $b_n\to+\infty\ (n\to\infty)$。

令

$$u_n(y)=\int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x,y)\,dx,\qquad v_n(y)=\int_{b_n}^{b_{n+1}} f'_y(x,y)\,dx,$$