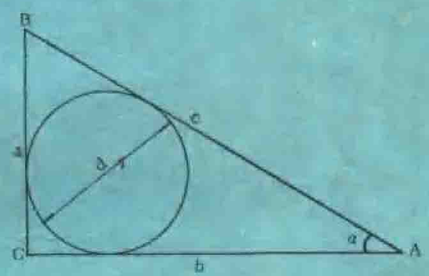
直角三角形内切圆函数表



第三机械工业部三〇一研究所

1974

直角三角形内切圆

函数表

红光仪器厂 徐忠熙

前　言

测量零件交点尺寸的问题，不仅在刀具、量具、夹具、模具和样板制造等工具车间大量存在，而且在机械维修、非标准设备制造，以及其他机械加工中也经常遇到。对这类尺寸，一般是采用圆柱、圆球配合通用量具进行测量。这种测量方法的特点是操作简单、测量精度比较高，同时无需专用设备。

在用圆柱、圆球测量时，往往需要进行一些几何和三角关系的运算。这些运算比较复杂，直接影响计量速度，同时稍不注意会产生差错。因此，设法简化运算过程，对提高计量速度和保证计量的正确性有一定意义。

红光仪器厂工具车间徐忠熙同志，根据多年的实践经验，提出了《直角三角形内切圆函数表》的方法，在检验时运用此表，只需进行较简单的计算，便可得出欲测的结果，快而准确。

这个方法，我们曾在《科技资料》一九七二年第八期作了介绍。资料出版后，引起大家注意，认为这个方法很有实用价值。

根据一些单位和读者的要求，我们把这个资料进行了修订，以单行本形式再版。但由于能力所限，缺点和错误恐仍难免，恳请同志们批评指正。

再版时，承西北工业大学协助，用电子计算机进行了复算，在此表示感谢。

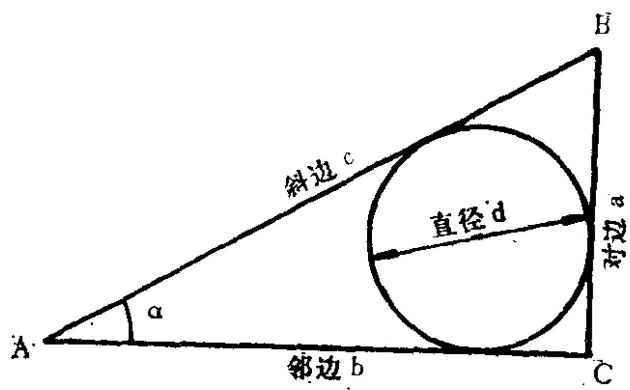
编　者

直角三角形内切圆函数表

一、直角三角形

内切圆函数表的来源

早在两千多年以前，我国数学家商高就提出了著名的“勾股弦定理”。要点是：“勾三、股四、弦五、黄方二”。就是说，在直角三角形的对边 $a=3$、邻边 $b=4$、斜边 $c=5$ 的情况下，其内切圆的直径 $d=2$。这就说明了直角三角形的各边与内切圆直径间存在着一定的关系。



直角三角形各边与内切圆之间，可以写出六个不同的关系：

$$\frac{内切圆直径(d)}{\alpha 角的对边(a)},\quad \frac{\alpha 角的对边(a)}{内切圆直径(d)},$$

$$\frac{内切圆直径(d)}{\alpha 角的邻边(b)},\quad \frac{\alpha 角的邻边(b)}{内切圆直径(d)},$$

$$\frac{内切圆直径(d)}{\alpha 角的斜边(c)},\quad \frac{\alpha 角的斜边(c)}{内切圆直径(d)}。$$

为了书写和计算的方便，上述关系简写如下：

1．已知α角和对边，求内切圆直径（简称：知对求圆）。

令 $$aqd\,\alpha=\frac{d}{a}$$

则 $$d=a\times aqd\,\alpha$$

2．已知α角和内切圆直径，求对边（简称：知圆求对）。

令 $$bqd\,\alpha=\frac{a}{d}$$

则 $$a=d\times dqa\,\alpha$$

3．已知α角和邻边，求内切圆直径（简称：知邻求圆）。

令 $$bqd\,\alpha=\frac{d}{b}$$

则 $$d=b\times bqd\,\alpha$$

4．已知α角和内切圆直径，求邻边（简称：知圆求邻）。

令 $$dqb\,\alpha=\frac{b}{d}$$

则 $$b=d\times dqb\,\alpha$$

5．已知α角和斜边，求内切圆直径（简称：知斜求圆）。

令 $$cqd\,\alpha=\frac{d}{c}$$

则 $$d=c\times cqd\,\alpha$$

6．已知α角和内切圆直径，求斜边（简称：知圆求斜）。

令 $$dqc\,\alpha=\frac{c}{d}$$

则 $$c=d\times dqc\,\alpha$$

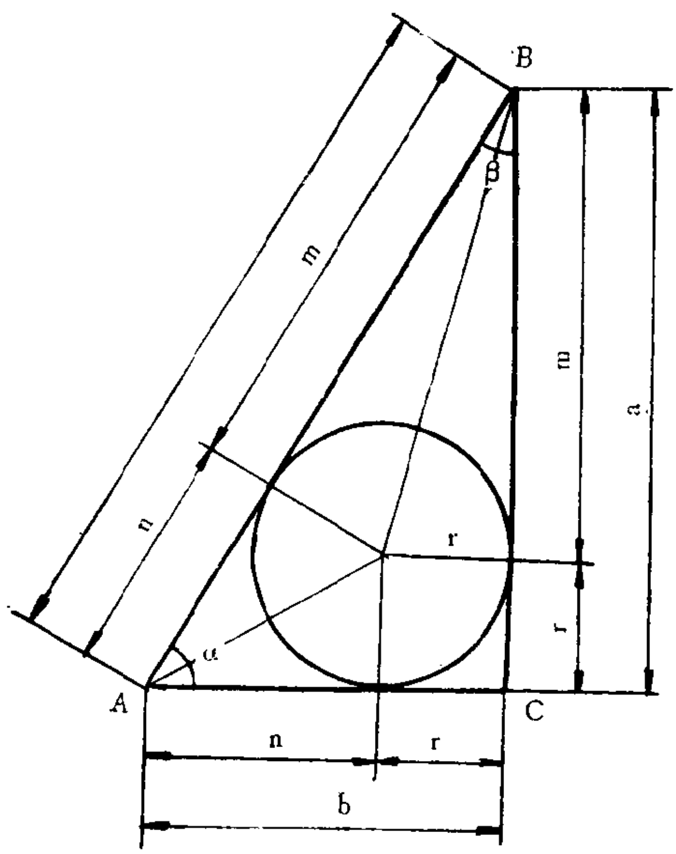
直角三角形内切圆函数表，列出了知对求圆($aqd\,\alpha$)、知圆求对（$dqa\,\alpha$)、知邻求圆（$bqd\,\alpha$)、知圆求邻（$dqb\,\alpha$)、知斜求圆($cqd\,\alpha$）和知圆求斜（$dqc\,\alpha$）随α而变化的函数值。

上述六个函数关系式的名称和符号一定要记熟，这样在使用函数表时才能运用自如。

函数值的计算

直角三角形内切圆函数与三角函数间存在着一定的关系，或者说，直角三角形内切圆函数可以用相应的三角函数关系式表示。推导如下：

直角三角形的内切圆直径等于两直角边之和减去斜边。



设：　$\angle A=\alpha$

$\angle B=\beta=90^\circ-\alpha$

则：对边　$a=r+m$　（1）

邻边　$b=r+n$　（2）

斜边　$c=m+n$　（3）

∴ $$a+b-c=(r+m)+(r+n)-(m+n)$$
$$=2r=d$$

故 $$d=a+b-c \qquad (4)$$

又∵

$$b=a\cdot \mathrm{ctg}\,\alpha \qquad (5)$$

$$c=a\cdot \csc\alpha \qquad (6)$$

$$a=b\cdot \mathrm{tg}\,\alpha \qquad (7)$$

$$c=b\cdot \sec\alpha \qquad (8)$$

$$a=c\cdot \sin\alpha \qquad (9)$$

$$b=c\cdot \cos\alpha \qquad (10)$$

分别将（5）（6）两式代入（4）式，得

$$d=a+a\cdot \mathrm{ctg}\,\alpha-a\cdot \csc\alpha$$
$$=a(1+\mathrm{ctg}\,\alpha-\csc\alpha) \qquad (11)$$

分别将（7）（8）两式代入（4）式，得

$$d=b\cdot \mathrm{tg}\,\alpha+b-b\cdot \sec\alpha$$
$$=b(\mathrm{tg}\,\alpha+1-\sec\alpha) \qquad (12)$$

分别将（9）（10）两式代入（4）式,得

$$d=c\cdot \sin\alpha+c\cdot \cos\alpha-c$$
$$=c\,(\sin\alpha+\cos\alpha-1) \qquad (13)$$

由（11）（12）（13）三式可知：

知对求圆的函数

$$aqd\,\alpha=\frac{d}{a}=1+\mathrm{ctg}\,\alpha-\csc\alpha$$

知邻求圆的函数

$$bqd\,\alpha=\frac{d}{b}=1+\mathrm{tg}\,\alpha-\sec\alpha$$

知斜求圆的函数

$$cqd\ \alpha = \frac{d}{c} = \sin\alpha + \cos\alpha - 1$$

至于知圆求对、知圆求邻、知圆求斜的函数，是上述三函数的倒数，这将在下节介绍。

二、各函数的相互关系

倒数关系

$$\because \quad aqd\ \alpha = \frac{d}{a}; \quad dqa\ \alpha = \frac{a}{d};$$

$$bqd\ \alpha = \frac{d}{b}; \quad dqb\ \alpha = \frac{b}{d};$$

$$cqd\ \alpha = \frac{d}{c}; \quad dqc\ \alpha = \frac{c}{d}。$$

$$\therefore \quad aqd\ \alpha \cdot dqa\ \alpha = \frac{d}{a} \cdot \frac{a}{d} = 1$$

即 $\quad aqd\ \alpha = \frac{1}{dqa\ \alpha}$ 或 $dqa\ \alpha = \frac{1}{aqd\ \alpha}$

同理 $\quad bqd\ \alpha = \frac{1}{dqb\ \alpha}$ 或 $dqb\ \alpha = \frac{1}{bqd\ \alpha}$

$\quad cqd\ \alpha = \frac{1}{dqc\ \alpha}$ 或 $dqc\ \alpha = \frac{1}{cqd\ \alpha}$

上列各式表明：

1）知对求圆与知圆求对的函数互为倒数；

2）知邻求圆与知圆求邻的函数互为倒数；

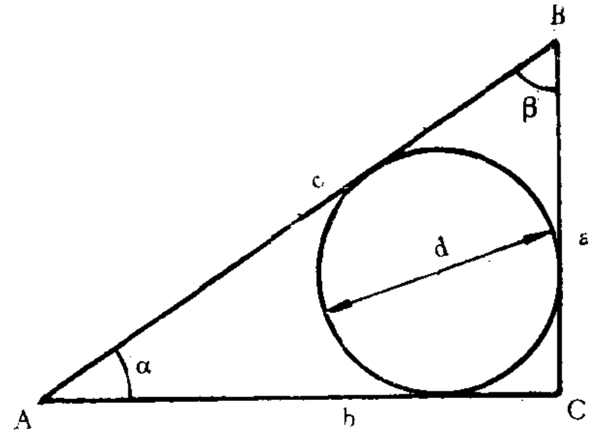
3）知斜求圆与知圆求斜的函数互为倒数。

互为余角的两角之函数关系

若两角之和为 90°，则两角互为余角。

在直角三角形 ABC 中，$\alpha+\beta=90^\circ$，$\beta=90^\circ-\alpha$。

若以 α 角为变量，确定各函数的关系，则



$$aqd\ \alpha=\frac{d}{a},\quad bqd\ \alpha=\frac{d}{b},\quad cqd\ \alpha=\frac{d}{c},$$

$$dqa\ \alpha=\frac{a}{d},\quad dqb\ \alpha=\frac{b}{d},\quad dqc\ \alpha=\frac{c}{d}。\qquad (1)$$

若以 β 角为变量，确定各函数的关系，则

$$aqd\ \beta=\frac{d}{b},\quad bqd\ \beta=\frac{d}{a},\quad cqd\ \beta=\frac{d}{c},$$

$$dqa\ \beta=\frac{b}{d},\quad dqb\ \beta=\frac{a}{d},\quad dqc\ \beta=\frac{c}{d}。\qquad (2)$$

比较（1）（2）各式，得

$$aqd\ \alpha=bqd\ \beta$$
$$dqa\ \alpha=dqb\ \beta$$
$$bqd\ \alpha=aqd\ \beta$$
$$dqb\ \alpha=dqa\ \beta$$
$$cqd\ \alpha=cqd\ \beta$$
$$dqc\ \alpha=dqc\ \beta$$

上列各式表明，在一个直角三角形中，互为余角的两角，其

内切圆函数存在以下关系：

1）一角的知对求圆与另一角的知邻求圆，函数值相等；

2）一角的知圆求对与另一角的知圆求邻，函数值相等；

3）一角的知邻求圆与另一角的知对求圆，函数值相等；

4）一角的知圆求邻与另一角的知圆求对，函数值相等；

5）两角的知斜求圆，函数值相等；

6）两角的知圆求斜，函数值相等。

三、内切圆函数表的查法

该表的形式类似三角函数表，它的查法也基本上与查三角函数表相同。

在每一个表的左上角，分别印有0°、1°、2°……44°，表的左端一行，从上到下印有0′、1′、2′……60′，这表明该表的数值是属于这些度数的函数值。同样，在每一个表的右下角，分别印有89°、88°……45°，表的右端一行，由下到上也印有0′、1′、2′……60′，其意义也是相同的。

为便于熟悉、使用本表，在每个表的上面和下面的第一行分别印有函数的名称和相应的符号，与这个符号同一竖行的数字就是这个函数的函数值。

现在我们试查一下某函数的函数值。例如：$aqd\,0°35'$。

首先翻到“0°”，再找出最左边一行的“35′”，然后从最上面一行的 aqd 往下看，并从该表左边一行“35′”这个数字往右看，在它们相交叉的地方找到“0.99491”这个数字，这就是所要查的 $aqd\,0°35'$，即 $aqd\,0°35'=0.99491$。

其他函数的查法也是这样，就不一一列举了。

请试查下面各函数值：

$$aqd2°15'=0.98036;$$

$$dqa2°20'=1.02079;$$

$$bqd2°25'=0.04131;$$

$$dqb2°30'=23.4147;$$

$$cqd2°45'=0.04683;$$

$$dqc2°54'=20.2789。$$

在生产中，需加工的角度是图纸给出的，加工中用正弦规垫以块规控制角度大小。一般说来，角度误差精确到“分”就可以了。在某些场合，如果需要求出“秒”值的函数值，可以用“内插法”获得。

例如：求出 $aqd5°23'45''$的函数值。

$5°23'45''$是介于 $5°23'$ 和 $5°24'$之间的角度。

查表得

$$aqd5°23'=0.95299$$

$$aqd5°24'=0.95284$$

相差$1'$的函数值之差为

$$0.95299-0.95284=0.00015$$

那么，相差$1''$的函数值之差则应除以60，即：

$$\frac{0.00015}{60}$$

可见，相差 $45''$的函数值则应乘以 45，即

$$\frac{0.00015}{60}\times 45=0.00011$$

或者，相差 $15''$的函数值应乘以 15，即

$$\frac{0.00015}{60}\times 15=0.00004$$

因此有

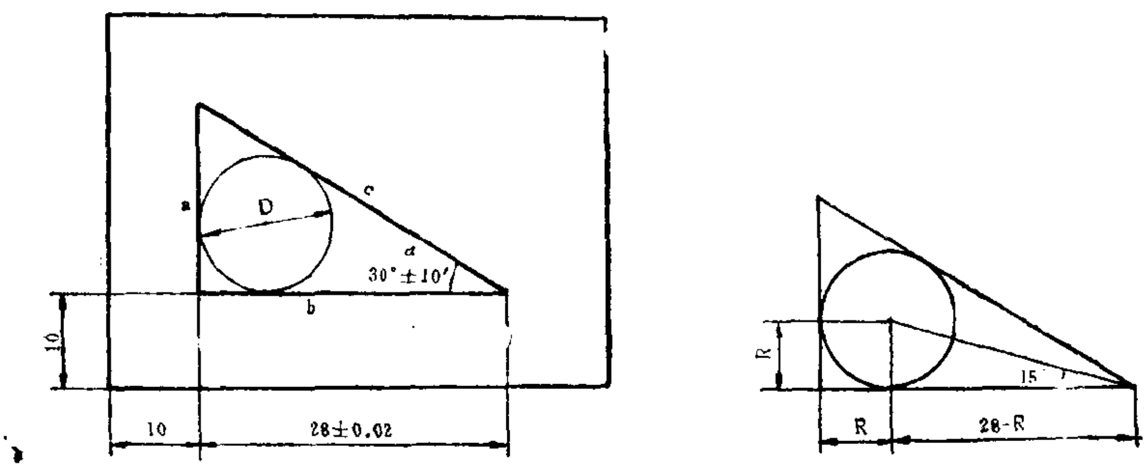
$$aqd5^\circ 23' 45'' = 0.95299 - 0.00011 = 0.95288$$

或者
$$aqd5^\circ 23' 45'' = 0.95284 + 0.00004$$
$$= 0.95288$$

四、函数表应用举例

例1：如图1（a）所示。需要在平板上加工一直角三角形，$\alpha = 30^\circ \pm 10'$，保证邻边 $b = 28 \pm 0.02$。若采用插床加工，求出需予先加工与三边都相切的内切圆是多大？

1. 先按一般的代数与三角解法计算(参看图1（b）)。



（a）　　　　（b）

图　1

$$\mathrm{tg}15^\circ = \frac{R}{28 - R}$$

$$R = 28 \times \mathrm{tg}15^\circ - R \times \mathrm{tg}15^\circ$$

$$R(1 + \mathrm{tg}15^\circ) = 28 \times \mathrm{tg}15^\circ$$

$$\therefore \quad R = \frac{28 \times \mathrm{tg}15^\circ}{1 + \mathrm{tg}15^\circ} = \frac{28 \times 0.26795}{1 + 0.26795} \approx 5.917$$

故需予先加工圆的直径

$$D = 2R = 2 \times 5.917 = 11.834$$

2. 用本函数表计算。

查 30°表中的知邻求圆，得

$$bqd30^\circ=0.42265$$

$$\therefore \quad D=b\times bqd30^\circ=28\times0.42265$$

$$=11.834$$

可见，利用本函数表可以很方便地求出欲求的尺寸。

例 2：如图 2(*a*)所示。需加工 90°的内槽铁，保证 $30^{+0.03}$，求测量用的圆柱直径 d_1 应是多大？

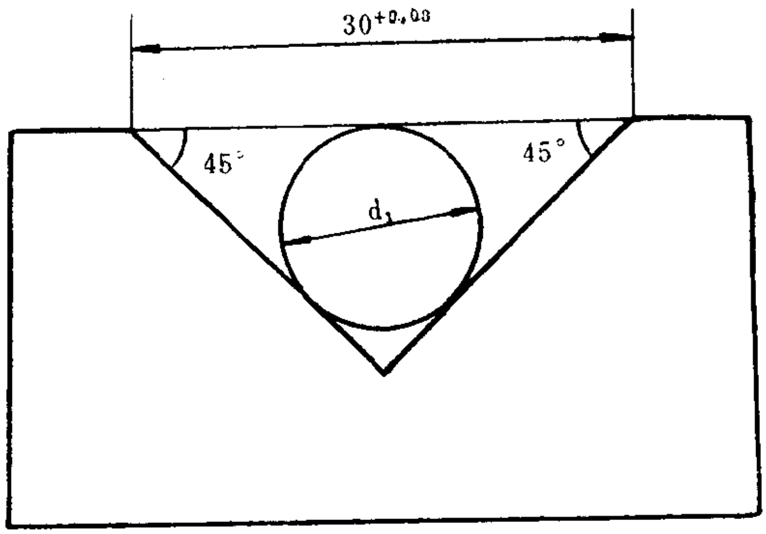


图 2 （*a*）

查表 45° 的知斜求圆

$$cqd45^\circ=0.41421$$

$$\therefore \quad d_1=c\times cqd45^\circ=30^{+0.03}\times0.41421$$

$$=12.426^{+0.012}$$

说明：在实际生产中，对不同的测量尺寸分别加工一个专门圆柱很不合算，一般是采用标准圆柱，配合不同尺寸的块规来进行测量。

图 2（b）就是用直径 $d_2=10$ 的标准圆柱配合块规来测量尺寸$30^{+0.03}$，这里需求的是块规尺寸 x_2。

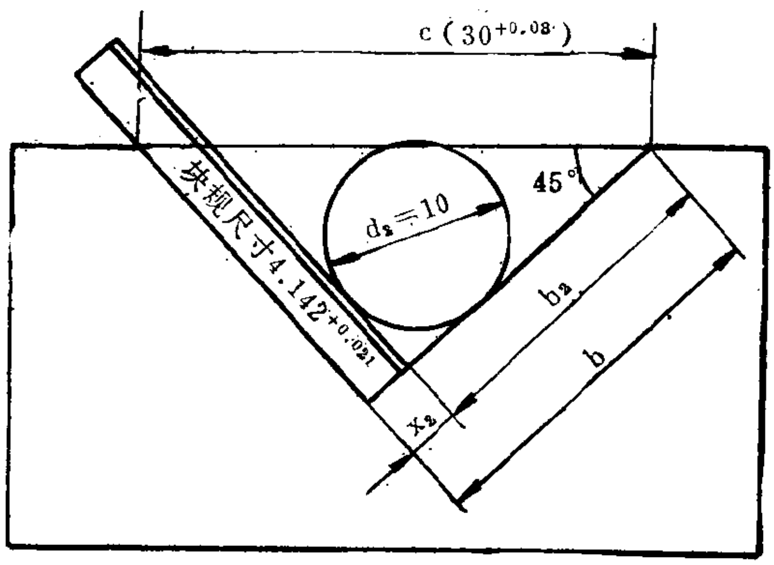


图 2 （b）

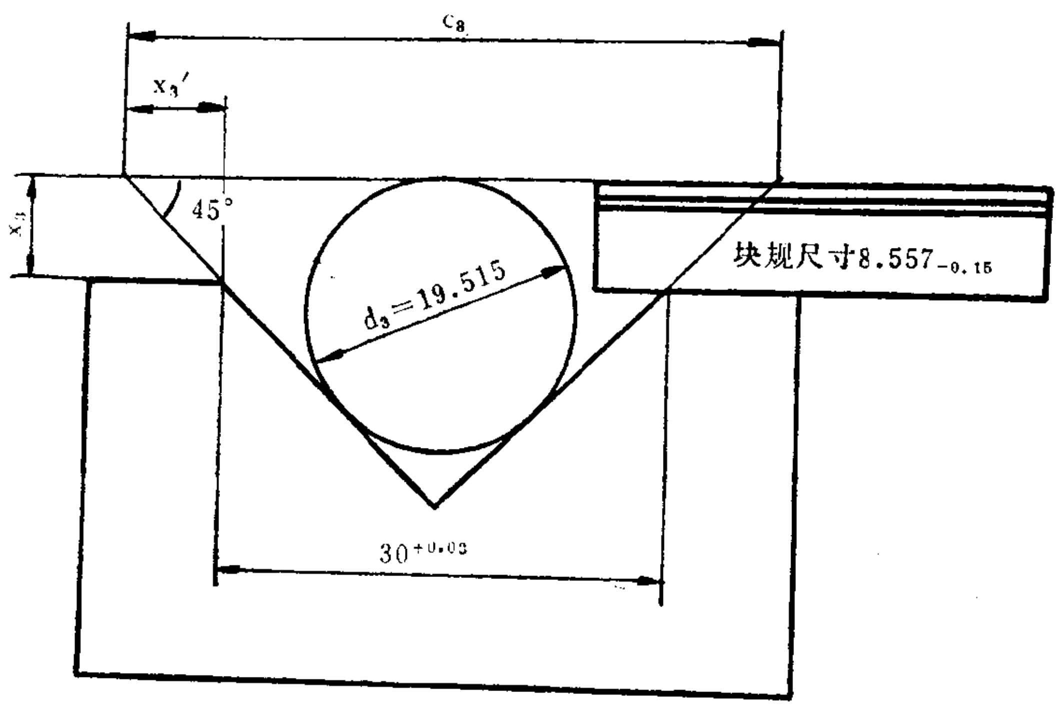


图 2 （c）

已知：$\alpha=45°$，内切圆直径$d_2=10$。

$$\because \quad b=c\times\sin45°=30^{+0.03}\times0.70711$$
$$=21.213^{+0.021}$$

查表，45°的知圆求邻

$$dqb45°=1.70711$$

$$\therefore \quad b_2=d_2\times dqb45°=10\times1.70711$$
$$=17.0711$$

故所垫块规尺寸

$$x_2=b-b_2=21.213^{+0.021}-17.0711$$
$$=4.142^{+0.021}$$

另外，这个例子也可用图 2（c）的方法测量。

任选标准圆柱，设$d_3=19.515$。

查表，45°的知圆求斜

$$dqc45°=2.41421$$

$$\therefore \quad c_3=d_3\times dqc45°=19.515\times2.41421=47.113$$

$$\because \quad x_3'=x_3$$

故所垫块规尺寸

$$x_3=\frac{c_3-30^{+0.03}}{2}=\frac{47.113-30^{+0.03}}{2}=8.557_{-0.015}$$

例 3：如图 3 所示，已知$\alpha=33°$，标准 圆 柱$d=10$，被测量尺寸为$27.5^{+0.03}$，求所垫块规的尺寸x。

先求邻边b。

查表，33°的知圆求邻

$$dqb33°=2.18797$$

$$\therefore \quad b=d\times dqb33°=10\times2.18797=21.88$$

故所垫块规尺寸

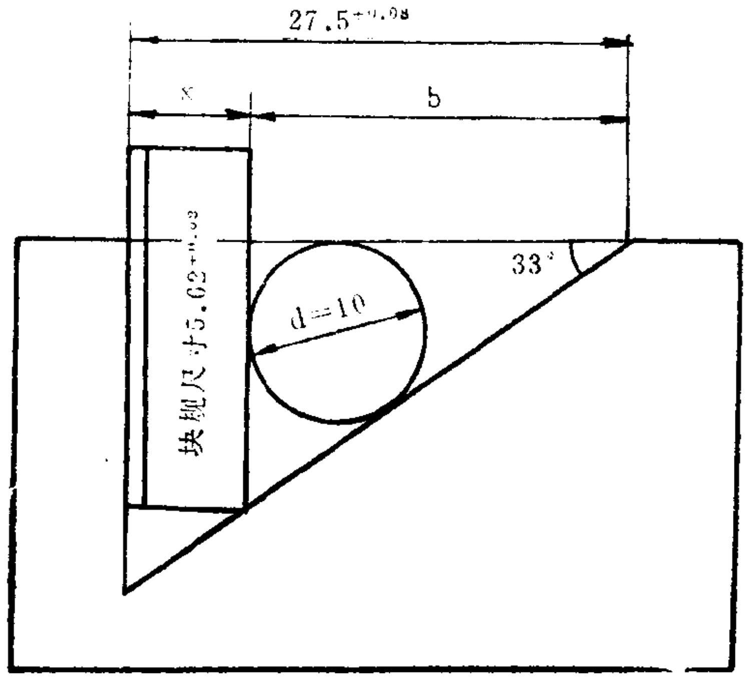

27.5
x
b
块规尺寸5.62
d=10
33°

图　3

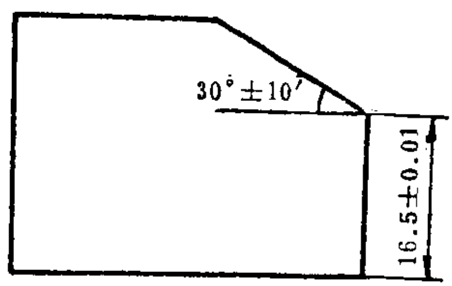

30°±10′
16.5±0.01

图 4　（a）

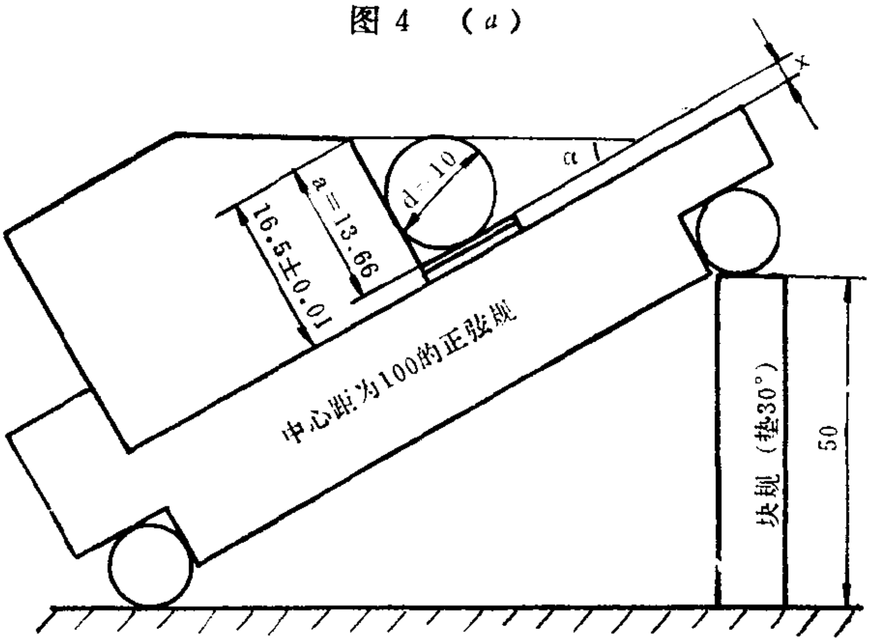

x
α
d=10
a=13.66
16.5±0.01
中心距为100的正弦规
块规（垫30°）
50

图4　（b）

$$x = 27.5^{+0.03} - 21.88 = 5.62^{+0.03}$$

例 4：加工图 4（a）之样板，$\alpha = 30^\circ \pm 10'$，交点尺寸为16.5 ±0.01，可用中心距为100的正弦规，垫尺寸等于50的块规使之形成30°角(图 4（b）)。若用φ10的标准圆柱测量，求需垫的块规尺寸 x 应是多少？

先求对边 a。

查表，30°的知圆求对

$$dqa30^\circ = 1.36603$$

$$\therefore \quad a = d \times dqa30^\circ = 10 \times 1.36603 = 13.6603$$

故所垫块规尺寸

$$x = 16.5 \pm 0.01 - 13.66 = 2.84 \pm 0.01$$

例 5：如图 5 所示。角度面 A（$40^\circ \pm 5'$）与角度面 B（$20^\circ \pm 5'$）的交点尺寸均为24±0.01，同样可采用图 4（b）的加工和测量方法。若用φ10的标准圆柱来测量，分别计算两组块规尺寸 x_A 和 x_B 应是多少？

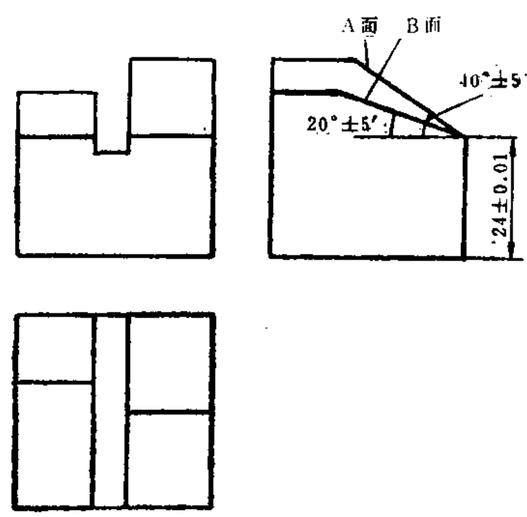


图 5

1. 角度面 A

（1）垫块规 $A_1 = 64.279$，使正弦规成40°的角，磨出角度面 A。

（2）用 $d = 10$ 的标准圆柱测量尺寸24±0.01。

查表，40°的知圆求对

$$dqa40^\circ = 1.57225$$

$$\therefore \quad a_A = d \times dqa40^\circ = 10 \times 1.57225 = 15.723$$

故测量块规尺寸

$$x_A = 24 \pm 0.01 - 15.723 = 8.277 \pm 0.01$$