

合成地震图的广义反射透射系数矩阵方法

李 旭^{**} 陈运泰

(中国北京 100081 国家地震局地球物理研究所)

摘要 简述了在均匀层状介质中,合成地震图的广义反射透射系数矩阵方法,并通过与前人的计算结果对比,检验了经过修改调试后的合成地震图的计算程序。计算与对比表明,经修改调试后的程序对于各种因素,包括震源类型、震源深度、震中、频率和慢度都有较好的普适性,适用于实际的地震波形研究。

主题词 广义反射透射系数; 矩阵方法; 合成地震图

1 引言

近年来,由于数字地震仪的运用,数字地震学研究得到了长足的发展,但国内涉及地震波形处理的研究却较少,这主要由于大多数地震波形处理都要涉及到理论地震图的合成,而这项技术在国内尚未得到普及。为使这项技术在国内得到普及和运用,在此,我们简述此方法的原理,并给出一些计算实例。

分层均匀介质中的理论地震图的合成有很多方法(Aki and Richards, 1980),而且近20年来发展很迅速。这些方法可以分为两大类。一类是基于Laplace变换的Cagniard-de Hoop方法,即广义射线法(Helmberger, 1968, 1974)。这类方法适用于计算水平分层或近似水平分层介质模型情况下远场、中低频的某一些特定震相,对于层数较多或近场高频情况,由于转换波的存在和多次反射、折射作用,计算量将大大增加,使合成完全响应的理论地震图比较困难。另一类是基于Fourier变换的波数积分方法,这类方法可较为方便地合成多层介质有完全响应的理论地震图,对近场、远场未加严格限制。因此,近年来,许多研究人员都致力于这种方法的改进和完善,如:广义反射透射系数矩阵方法(Kennett and Kerry, 1979; Kennett, 1980, 1983),离散波数积分方法(Bouchon, 1981),广义反射透射系数法结合离散波数法(Yao and Harkrider, 1983),等等。本文主要介绍的是Kennett的广义反射透射系数矩阵方法。这个方法是合成地震图的一种基本方法。了解其主要原理,将有助于学习和掌握其他合成地震图方法。掌握基于该方法编写的程序,对于利用数字地震波形资料研究震源和地球介质结构都是非常有用的。

国家地震局地球物理研究所论著编号 96A0059.

现在地址:中国成都 610041 四川省地震局.

本文收到日期:1996-03-10.

2 广义反射透射系数矩阵方法

2.1 矩阵波动方程

在均匀、各向同性和完全弹性介质中,某点 $P(\mathbf{r})$ 的位移 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ 满足弹性动力学方程

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1)$$

式中, λ 和 μ 是 Lamé 系数, $\mathbf{f}$ 是体力。

采用柱坐标系 (r, θ, z) , 坐标原点取在震中, z 轴取垂直向下为正, 相应的基向量为 $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{z}})$, 坐标系遵循右手法则。

引入一组面谐向量 $(\mathbf{R}_k^m, \mathbf{S}_k^m, \mathbf{T}_k^m)$

$$\mathbf{R}_k^m = \hat{\mathbf{z}} Y_k^m(r, \theta), \quad \mathbf{S}_k^m = \frac{1}{k} \nabla_1 Y_k^m(r, \theta), \quad \mathbf{T}_k^m = -\frac{1}{k} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_1 Y_k^m(r, \theta) \quad (2)$$

式中, $Y_k^m(r, \theta) = J_m(kr) \exp(im\theta)$, $\nabla_1 = \hat{\mathbf{r}} \partial_r + \hat{\boldsymbol{\theta}} (1/r) \partial_\theta$, $J_m(kr)$ 是第一类 m 阶贝塞尔函数, m 是整数, $\exp$ 表示指数。

利用面谐向量的正交性, 可将位移向量 $\mathbf{u}$ 过水平面的应力向量 $\mathbf{T}$ 和体力 $\mathbf{f}$ 做面谐向量展开

$$\mathbf{u}(r, \theta, z) = u_r \hat{\mathbf{r}} + u_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + u_z \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega t) \int_0^\infty k dk \sum_m (U \mathbf{R}_k^m + V \mathbf{S}_k^m + W \mathbf{T}_k^m) \quad (3)$$

$$\mathbf{T}(r, \theta, z) = \tau_r \hat{\mathbf{r}} + \tau_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + \tau_z \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega t) \int_0^\infty k dk \sum_m (P \mathbf{R}_k^m + S \mathbf{S}_k^m + T \mathbf{T}_k^m) \quad (4)$$

$$\mathbf{f}(r, \theta, z) = f_r \hat{\mathbf{r}} + f_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + f_z \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega t) \int_0^\infty k dk \sum_m (F_z \mathbf{R}_k^m + F_v \mathbf{S}_k^m + F_H \mathbf{T}_k^m) \quad (5)$$

运用应力-位移的本构关系, 可将(1)式改为

$$\partial_z \mathbf{B}(k, m, \omega, z) = \omega \mathbf{A}(p, z) \mathbf{B}(k, m, \omega, z) + \mathbf{F}(k, m, \omega, z) \quad (6)$$

式中, $\mathbf{B}(k, m, \omega, z)$ 为应力-位移向量, 对于 P-SV 波,

$$\mathbf{B}_p = [\mathbf{W}, \mathbf{T}]^T = [U, V, \omega^{-1}P, \omega^{-1}S]^T \quad (7)$$

$$\mathbf{F}_p = [\omega^{-1}F_z, \omega^{-1}F_v]^T \quad (8)$$

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} 0 & p(1 - 2\beta^2/\alpha^2) & (\rho\alpha^2)^{-1} & 0 \\ -p & 0 & 0 & (\rho\beta^2)^{-1} \\ -\rho & 0 & 0 & p \\ 0 & v\rho^2 - \rho & -p(1 - 2\beta^2/\alpha^2) & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

对于 SH 波,

$$\mathbf{B}_H = [\mathbf{W}, \omega^{-1} \mathbf{T}]^T \quad (10)$$

$$\mathbf{F}_H = \omega^{-1} \mathbf{F}_H \quad (11)$$

$$\mathbf{A}_H = \begin{bmatrix} 0 & (\rho\beta^2)^{-1} \\ \rho(\beta^2 p^2 - 1) & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中, p 是慢度 ($p = k/\omega$), k 是波数, $v = 4\rho\beta^2 (1 - \beta^2/\alpha^2)$, 上角标 T 表示转置。

(6) 式便是通常说的矩阵波动方程。可以看出, 引入 (2) 式的面谱向量而做面谱向量展开, 实质上就是分离变量, 得到空间变量只有垂直分向 z 的矩阵波动方程, 这对水平分层均匀介质中求解十分方便。

2.2 地震波向量

设系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的本征值矩阵为 $\mathbf{D}$, 本征向量为 $i\Lambda$, 由 (9)、(12) 式, 对于 P-SV 波,

$$\Lambda_P = \text{diag}\{-q_*, -q_\beta, q_*, q_\beta\} \quad (13)$$

$$\mathbf{D}_P = [b_P^U, b_S^U, b_P^D, b_S^D] \quad (14)$$

对于 SH 波,

$$\Lambda_H = \text{diag}\{-q_\beta, q_\beta\} \quad (15)$$

$$\mathbf{D}_H = [b_H^U, b_H^D] \quad (16)$$

式中上角标 U, D 分别表示上行波和下行波, 且

$$b_P^{U,D} = [\mp iq_*, p, \rho(2\beta^2 p^2 - 1), \mp 2i\rho\beta^2 pq_*]^T$$

$$b_S^{U,D} = [p, \mp iq_\beta, \mp 2i\rho\beta^2 pq_\beta, \rho(2\beta^2 p^2 - 1)]^T$$

$$b_H^{U,D} = [1, \mp i\rho\beta^2 q_\beta]^T$$

这里, $q_* = (\alpha^{-2} - p^2)^{1/2}$, $q_\beta = (\beta^{-2} - p^2)^{1/2}$, $\text{Im } \omega q_*, \omega q_\beta \geq 0$.

引入地震波向量 $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{V} \quad (17)$$

对于 P-SV 波, 用 φ 和 ψ 表示

$$\mathbf{V}_P = [V_U, V_D]^T = [\varphi_U, \psi_U, \varphi_D, \psi_D]^T \quad (18)$$

对于 SH 波, 用 χ 表示

$$\mathbf{V}_H = [\chi_U, \chi_D]^T \quad (19)$$

利用本征值、本征向量的性质及 (17) 式, 将没有体力 $\mathbf{f}$ 的矩阵波动方程 (6) 式改写为

$$\partial_z \mathbf{V} = i\omega \Lambda \mathbf{V} \quad (20)$$

这个方程的解为

$$\mathbf{V}(z) = \exp[i\omega \Lambda (z - z_0)] \mathbf{V}(z_0) \quad (21)$$

由上式可见,地震波向量 $\mathbf{V}$ 与空间方向 z 存在指数关系,对水平均匀层状介质具有很好的传递性(由此引出了传递矩阵及广义反射透射系数矩阵等一系列概念,详见附录 A)。

2.3 完全响应的自由表面面谱向量位移解

如图 1 所示,假设在分层均匀介质内部 $z=z_0$ 处有一点源,我们来求解它在自由表面产生的位移场。这个问题的边界条件是:

(1) 自由表面边界条件:在自由表面 $z=z_0$ 上,应力分量为零,即

$$\mathbf{B}(z_0) = [U(z_0), V(z_0), 0, 0]^T \quad (22)$$

(2) 底面边界条件:不考虑其他从半无限介质深部传来的波的影响,即在 $z=z_L$ 处矩阵波向量为

$$\mathbf{V}(z_L) = [0, V_D(z_L)]^T \quad (23)$$

(3) 震源条件:Burridge 和 Knopoff (1964) 曾经证明,任一走向的平面位错源可以用一组等效力代替而产生相同的波场;Hudson (1969) 指出,一个点力源可用水平面的点位错代替而产生相同的波场。因此,我们可以用应力、位移间断来表征震源作用。由 (20) 式,可具体地用矩阵波向量的间断 $\Sigma(z_0)$ 等效地表示震源(附录 B):

$$\Sigma(z_0) = [\Sigma_U(z_0), \Sigma_D(z_0)]^T = \mathbf{V}(z_0^+) - \mathbf{V}(z_0^-) \quad (24)$$

利用以上 3 个边界条件,可得如下矩阵波动方程的面谱向量位移解:

$$\mathbf{W}(z_0) = \mathbf{R}_{EV}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_D^{RS}\tilde{\mathbf{R}})^{-1}\mathbf{T}_U^{RS}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_D^{SL}\mathbf{R}_U^{FS})^{-1}(\mathbf{R}_D^{SL}\Sigma_D - \Sigma_U) \quad (25)$$

式中, $\mathbf{R}_{EV}$ 是自由表面的接收系数矩阵; $\tilde{\mathbf{R}}$ 是自由表面的反射系数矩阵; $\mathbf{R}_D^{RS}$ 是自由表面与震源之间下行波的广义反射系数矩阵; $\mathbf{T}_U^{RS}$ 是自由表面与震源之间上行波的广义透射系数矩阵; $\mathbf{R}_D^{SL}$ 是震源与底界面之间下行波的广义反射系数矩阵; $\mathbf{R}_U^{FS}$ 是震源与自由表面之间上行波的广义反射系数矩阵(包括了自由表面的反射作用)。 $\mathbf{R}_D^{RS}$, $\mathbf{T}_U^{RS}$, $\mathbf{R}_D^{SL}$, $\mathbf{R}_U^{FS}$ 的物理意义如图 1 所示。

由 (25) 式可以看出,面谱向量解 $\mathbf{W}(z_0)$ 包含了自由表面的反射、层间的多次反射、透射以及 P-SV 波的相互转换等所有的作用,因此,是完全响应解。对照 (25) 式中的 $\mathbf{R}_{EV}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_D^{RS}\tilde{\mathbf{R}})^{-1}\mathbf{T}_U^{RS}$ 与附录 A 中反射、透射系数矩阵迭代公式 (A21) 的第 4 式,可以看出,如果

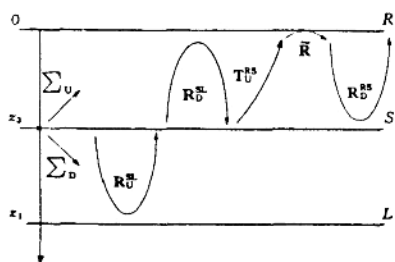


图 1 (25) 式中各项的物理意义示意图

如果把 $\mathbf{R}_{EV}$, $\tilde{\mathbf{R}}$ 分别视作自由表面的上行波“透射、反射”系数矩阵,则此项的计算与多层介质的广义上行波透射系数矩阵的过程相同,因此,在程序设计时,可把此项的计算安排在上行波透射系数的迭代计算中,不必再单独计算。

2.4 数值积分

求得地面面谱向量位移解 $\mathbf{W}(z_0)$ 后,由 (3) 式可得柱坐标系下时空域地表的响应:

$$u_z(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega t) \int_0^{\infty} k dk \sum_{m=-2}^2 U(k, m, z, \omega) J_m(kr) \exp(im\theta) \quad (26)$$

$$u_r(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega t) \int_0^{\infty} k dk \sum_{m=-2}^2 \left\{ V(k, m, z, \omega) \frac{\partial J_m(kr)}{\partial(kr)} + W(k, m, z, \omega) im \frac{J_m(kr)}{kr} \right\} \exp(im\theta) \quad (27)$$

$$u_\theta(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega t) \int_0^{\infty} k dk \sum_{m=-2}^2 \left\{ -W(k, m, z, \omega) \frac{\partial J_m(kr)}{\partial(kr)} + V(k, m, z, \omega) im \frac{J_m(kr)}{kr} \right\} \exp(im\theta) \quad (28)$$

实际计算中采用的是慢度积分,而不是通常的波数积分,这样可以使震源表示及界面上的反射、透射系数矩阵只是慢度的函数,而与频率无关[附录(A15)式],在计算广义反射、透射系数频率慢度循环中,减少了计算量,从而加快了计算速度。但是与此同时,这种方法也有缺陷,由于积分由原来的 $k dk$ 变为 $\omega^2 p d p$,对于低频直至零频,在有限的慢度区间[一般为 $(0.85\beta_0)^{-1}$] 内,被积函数的行为要受 ω^2 影响,可能使 Bessel 函数由于其宗量 $\omega p r$ 较小(当震中距 r 也很小时),不能充分起到使积分收敛的作用,最终导致低频信号的计算失真。实际计算中也发现,在震中距越小时,误差越大。改进的方法是,在计算内存空间允许的情况下,在不影响精度的条件下,加大慢度区间,尽量使被积函数摆脱频率的控制,以获得比较好的结果。

对于完全弹性介质,(26)、(27)、(28) 式中的被积函数的奇异点分布在 p 实轴上,这给积分带来了一些困难。Wang 和 Herrmann (1980) 通过回路积分方法在慢度复平面上积分来解决这个问题,为此,需要在离散情况下精确地确定极点位置,这将增加计算难度,延长计算时间。现采用直接沿 p 实轴积分,选用下列两个方法之一,将被积函数的奇异点从 p 实轴移开:

(1) 给频率加上一微小虚数频率(Bouchon, 1981),即 $\omega' = \omega + i\Delta\omega$,使频率成为复数,保证被积函数的奇异点为复数。由 Fourier 变换的性质,在积分回到时间域时,要乘以一个与此虚数频率对应的项 $\exp(\Delta\omega t)$,以消除虚数频率带来的影响。在 Yao 和 Harkrider (1983) 的广义反射透射矩阵和离散波数(GTDW)方法中,就是采用虚数频率的方法来解决奇异点的问题。利用复频率,零频行为也易于处理。但在我们的计算中,如果频率为复数,则 Bessel 函数的宗量 $\omega p r$ 便成为复数,为避免复宗量 Bessel 函数的数学表示带来的麻烦,原 Kennett 的计算程序中采用了实宗量的 Bessel 函数表示式,并乘以 $\exp(-\Delta\omega p r)$ 项以近似虚数频率部分在 Bessel 函数中的作用,但由此带来的误差却难以估计和控制,因此,实际计算时往往不用此法来消除奇异点带来的误差。

(2) 既然实际介质本来就不是完全弹性的,那么,为什么不更接近实际情况,考虑介质有一微小衰减呢(Kennett, 1975)? 这样波速便成为复数,从而被积函数的奇异点从 p 实轴移开,避免了沿 p 实轴积分时奇异点带来的困难。

在非弹性情况下,波速 α, β 成为频率 ω 的函数 $\alpha(\omega), \beta(\omega)$:

$$\alpha(\omega) = \alpha_1 [1 + \pi^{-1} Q_*^{-1} \ln(\omega/2\pi) - i \operatorname{sgn}(\omega) Q_*^{-1}/2] \quad (29)$$

$$\beta(\omega) = \beta_1[1 + \pi^{-1}Q_p^{-1}\ln(\omega/2\pi) - i \operatorname{sgn}(\omega)Q_p^{-1}/2] \quad (30)$$

式中, α_1 , β_1 分别为 P 波 S 波的参考速度; Q_p , Q_s 分别为 P 波 S 波的品质因子; 第二项 $\pi^{-1}Q_p^{-1}\ln(\omega/2\pi)$ 对应于频散作用; 第三项 $i \operatorname{sgn}(\omega)Q_p^{-1}/2$ 对应于衰减作用。

O'Neill 和 Hill (1979) 曾指出, 除非在高吸收介质 ($Q_{p,s} < 100$) 中, 频散作用对波形的影响是十分微小的, 因此, 当考虑介质只有微小衰减时, 可以忽略频散项, 而得

$$\alpha(\omega) = \alpha_1[1 - i \operatorname{sgn}(\omega)Q_p^{-1}/2] \quad (31)$$

$$\beta(\omega) = \beta_1[1 - i \operatorname{sgn}(\omega)Q_s^{-1}/2] \quad (32)$$

这样不但避免了积分时奇异点带来的误差, 同时也保证单层间反射、透射系数与频率无关, 从而节约了计算时间。

实际慢度积分时, 上限不可能取无穷大, 一般对于频率 2 Hz 左右的波, 取慢度上限为 $(0.85\beta_0)^{-1}$, β_0 为地表面的剪切波速, 这一近似在计算直到基谱瑞利面波的震相都是有效的 (Kennett, 1980)。而更低频时, 如前所述, 需要取更大一些的慢度上限。在处理浅源地震时, 由于面波相当发育, 对波形影响很大, 如果把慢度空间取得过宽, 势必增加计算时间, 带来一些不必要的误差。对此, 计算时可将慢度区间分成两部分, 分别对体波和面波进行计算, 然后把两部分叠加起来, 得到综合的理论地震图。

频率域中的积分采用快速 Fourier 变换, 积分区间由 Nyquist 频率限制。

3 合成地震图程序的检验及计算结果

根据前面介绍的理论, 计算程序分为两部分, 第一部分计算震源在自由表面上产生的面谱向量解; 第二部分进行慢度积分和 Fourier 变换合成时空域的 Z 、 R 、 T 三分向地震图。

为确认计算程序的可靠性, 我们做了一系列计算, 以检验此程序对各种参数, 如震源模型、介质模型及接收点位置等的普适性。为此, 我们选择与 Herrmann 和 Wang (1985), Apsel 和 Luco (1983), Kennett (1980) 计算结果对照。对照时, 我们选择与原文一致的参数及相同的图示方式。对于原文未明示的某些参数, 我们加星号 “*” 注明。

3.1 与 Herrmann 和 Wang (1985) 的结果对比

在 Herrmann 和 Wang (1985) 的论文中给出了 4 个基本震源 M_{DD} , M_{DS} , M_{SS} , M_{EP} 在均匀半无限介质及一层半无限介质中产生的地面位移的计算结果, 据此, 我们检验程序对各种震源模型的普适性。计算时采用的各种参数如下:

(1) 震源

地震矩张量

$$M_{DD} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{DS} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{SS} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{EP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

震源时间函数

$$2rs(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t/\tau)^2 & 0 \leq t \leq \tau \\ -\frac{1}{2}(t/\tau)^2 + 2(t/\tau) - 1 & \tau \leq t \leq 3\tau \\ \frac{1}{2}(t/\tau)^2 - 4(t/\tau) + 8 & 3\tau \leq t \leq 4\tau \end{cases}$$

时间采样间隔取为 0.25s, 常数 τ 取为 0.5s, 频率上限为 2 Hz, 震源深度为 10 km。

(2) 介质模型和接收点

设 P 波速度为 α (km/s), S 波速度为 β (km/s), 介质层密度为 ρ (g/cm³), 每一介质层厚度为 h (km), 介质层的纵波与剪切波的品质因子分别为 Q_p 、 Q_s , 参数见表 1 和表 2。

表 1 均匀半无限介质

α	β	ρ	h	Q_p	Q_s
6.15	3.55	2.8	∞	1000	500

方位角 $\theta=0^\circ$, 震中距 $r=10.0$ km

表 2 一层半无限介质

α	β	ρ	h	Q_p	Q_s
6.15	3.55	2.8	40	1000	500
8.09	4.67	3.3	∞	1000	500

方位角 $\theta=0^\circ$, 震中距 $r=75.0$ km

图 2 和图 3 分别是均匀半无限介质和一层半无限介质情形的对比。从图 2 和图 3 中可以看到, 我们的计算结果与 Herrmann 和 Wang (1985) 的计算结果在波形上非常一致, 最大振幅误差在 10% 以内, 说明我们的程序对各种震源模型是普适的。

3.2 与 Apsel 和 Luco (1983) 的结果对比

Apsel 和 Luco (1983) 曾计算过震源不在最上方的介质层时的理论地震图。我们将与他们的结果进行对比, 以检验程序在计算震源上部的混响效应的功能。

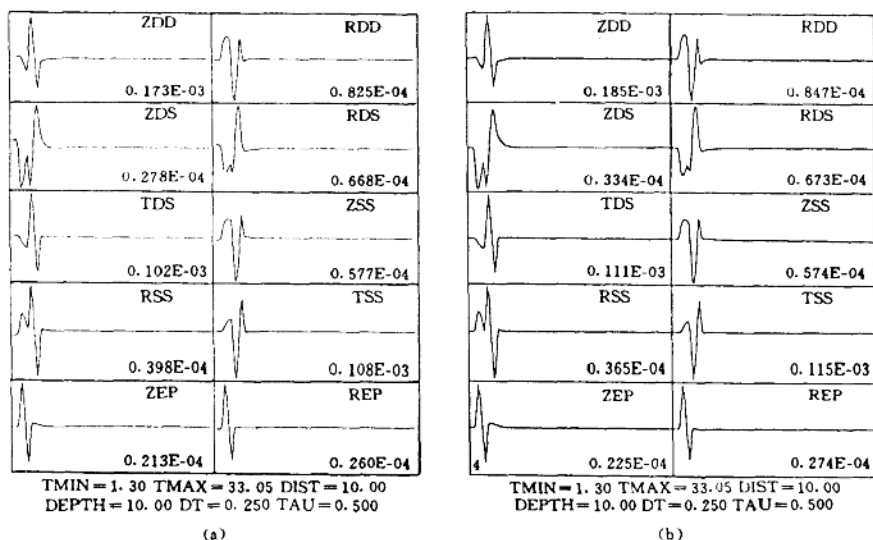


图 2 与 Herrmann 和 Wang (1985) 的结果对比 (均匀半无限介质)

(a) 作者的计算结果; (b) Herrmann 和 Wang 的计算结果

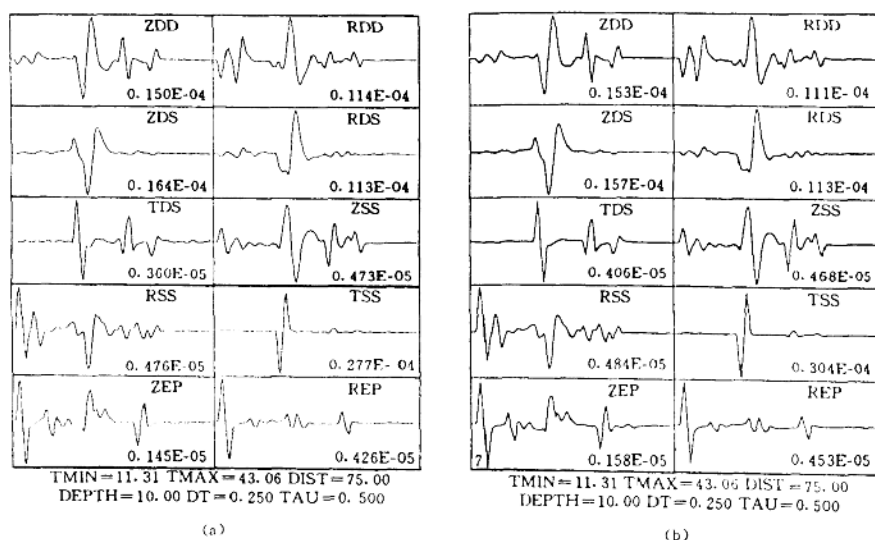


图3 与 Herrmann 和 Wang (1985) 的结果对比 (一层半无限介质)

(a) 作者的计算结果; (b) Herrmann 和 Wang 的计算结果

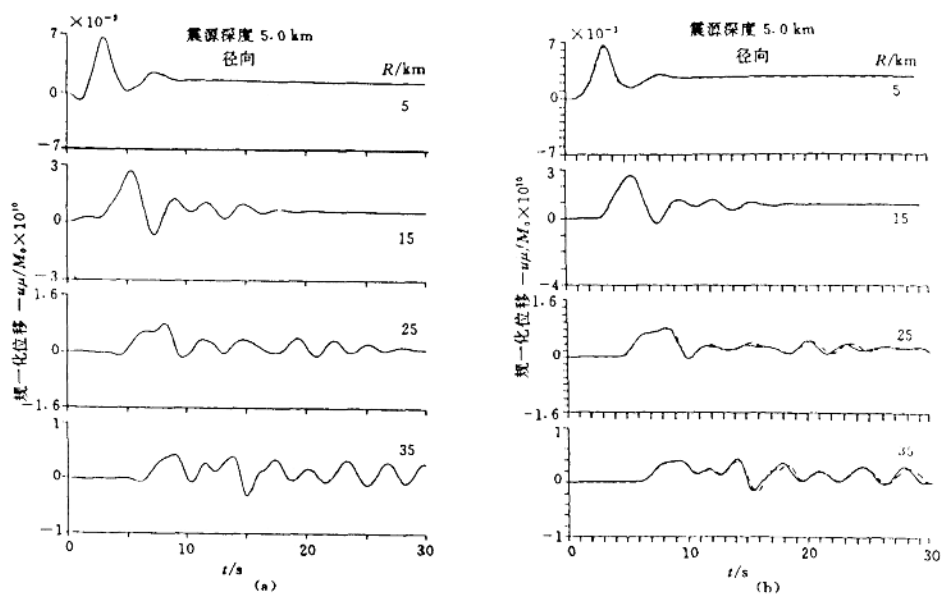


图4 与 Apsel 和 Luco (1983) 的结果对比 (径向分量)

(a) 作者计算结果; (b) Apsel 和 Luco 的计算结果

(1) 震源

矩张量

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

时间函数 $s^*(t)$ 为梯形函数, 上升时间为 0.25 s, 持续时间为 0.5 s, 下降时间为 0.25 s, 时间采样间隔为 0.125 s, 频率上限 0.5 Hz, 震源深度为 5 km。

表 3 介质模型

α	β	ρ	h	Q_α	Q_β
3.0	1.73	1.67	2	395	198
5.0	2.89	2.89	2	748	376
6.0	3.46	3.46	∞	939	472

(2) 介质模型与接收点

介质模型见表 3。接收点方位角 $\theta = 22.5^\circ$, 震中距 $r = 5, 15, 25, 35$ km。

观察并对比计算结果 (图 4 和图 5), 可看出两者在周期、位相上是非常一致的, 而

在近距离 ($r = 5$ km) 时, 振幅有一些差别。这一差别主要是由零频误差引起的。对比 Apsel 和 Luco (1983) 的计算结果和我们的计算结果, 可以看出, 两者均给出了在近距离时的零频行为, 但我们的计算结果的幅值略小。总的看来, 波形是很一致的, 可以说震源上部的混响效应的计算是可靠的。

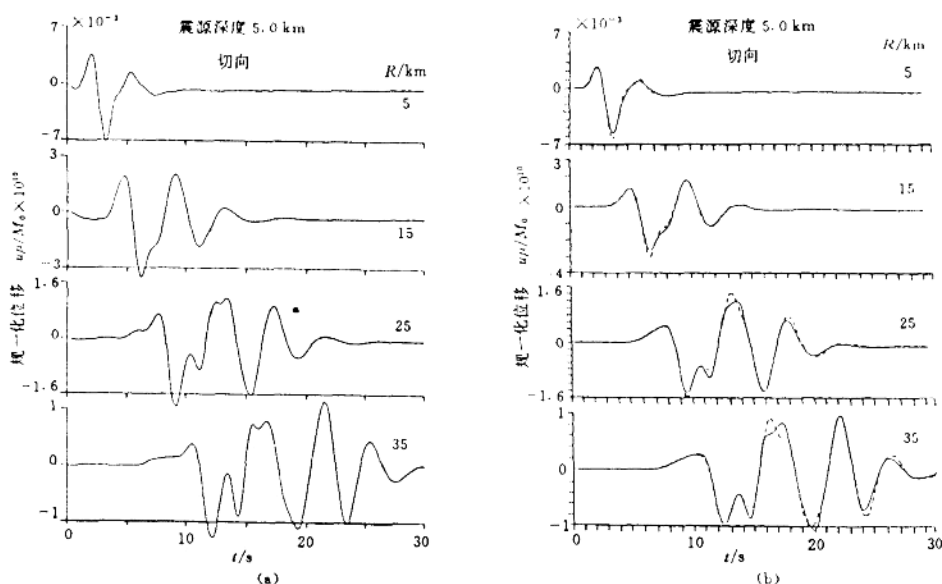


图 5 与 Apsel 和 Luco (1983) 的结果对比 (切向分量)

(a) 作者的计算结果; (b) Apsel 和 Luco 的计算结果

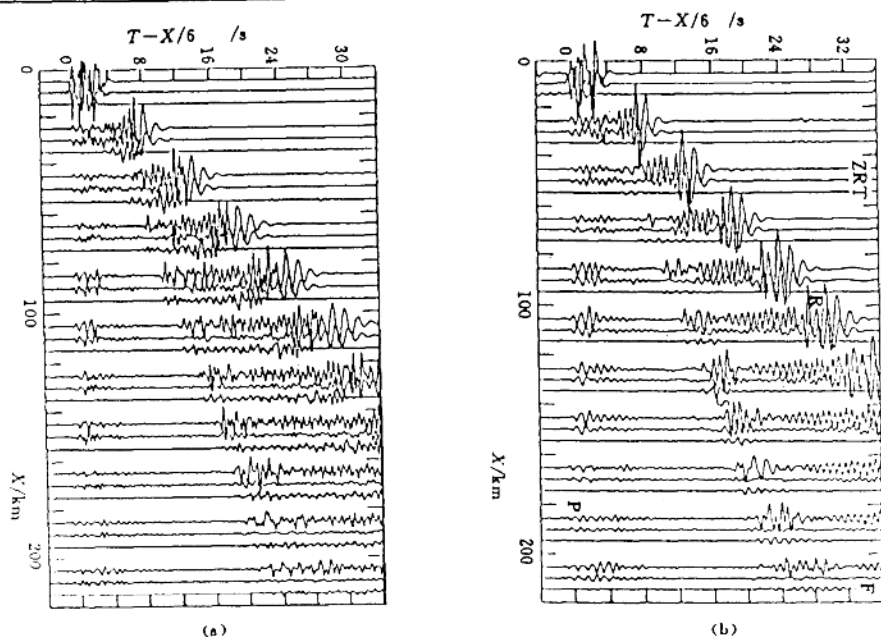


图 6 与 Kennett (1980) 的结果对比 (震源深度 $h_s = 2.5$ km)

(a) 作者的计算结果; (b) Kennett 的计算结果

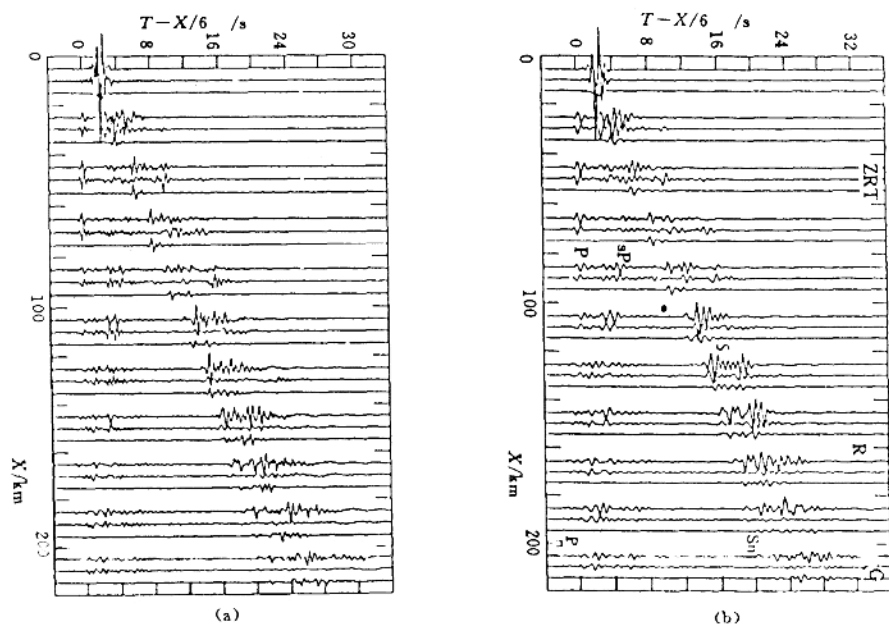


图 7 与 Kennett (1980) 的结果对比 (震源深度 $h_s = 10$ km)

(a) 作者的计算结果; (b) Kennett 的计算结果

3.3 与 Kennett(1980)的结果对比

我们的程序本来就是从 Kennett 程序改进而来的, 因此, 与他的计算结果做对比是必要的。同时, 通过与他结果对比, 可以检验此程序随震中距变化时的计算能力。计算时所

表 4 介质模型

α^*	β^*	ρ^*	h^*	Q_p	Q_s
5.0	2.7	2.3	2.0	1000	500
6.0	3.6	2.9	10.0	1000	500
6.5	3.85	3.1	16.0	1000	500
8.0	4.25	3.6	∞	1000	500

矩张量, $M = \text{diag}(-1, 0, 1)$

者在振幅、各震相周期、直达 P 波和 S 波都是非常相似的, 但由于我们采用的介质模型与原作者不尽相同, 特别是介质层厚度不同时, 会使各种反射、透射波及首波的到时和振幅产生很大差别。另外, 时间采样间隔、频率采样间隔等参数也与原作者不尽相同, 使总的合成地震图有所差别。这说明, 实际计算时一定要构制合适的介质模型, 尽可能地模拟实际的介质结构, 才能得到可靠的计算结果。

从这些检验结果看到, 经我们修改调试后的程序对于计算各种震源模型、介质模型是普遍适用的, 但在计算近距离 ($r < 10$ km), 甚低频 ($f < 0.01$ Hz) 时, 误差增大 [图 6 (a) 和图 8 (a)]。

用的各参数参见表 4。

时间函数 $s(t)$ 为阶跃函数, 时间采样间隔 $dt^* = 0.1$ s, 频率范围为 0.03—2 Hz, 震源深度分别为 2.5, 10, 20 km, 接收点的方位角 $\theta = 10^\circ$, 震中距 $r = 10, 30, 50, \dots, 210$ km。

从计算结果 (图 7 和图 8) 可以看出, 两

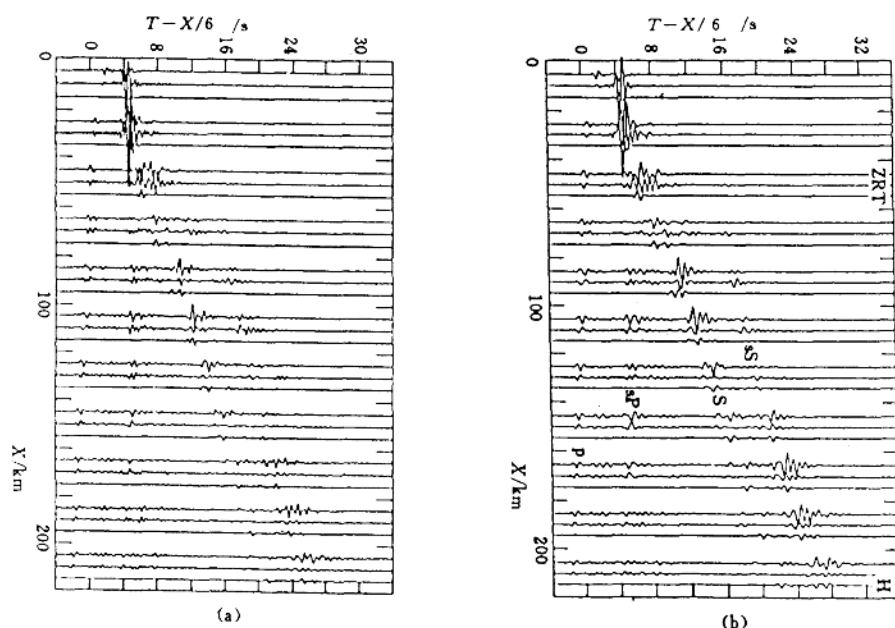


图 8 与 Kennett (1980) 的结果对比 (震源深度 $h_s = 20$ km)

(a) 作者的计算结果; (b) Kennett 的计算结果

4 结 语

以上我们简要地介绍了在均匀、各向同性和完全弹性的层状介质中,用广义反射透射系数矩阵方法合成地震图的基本原理,运用经我们修改调试后的程序计算了多种情形下的合成地震图,并与前人的计算结果进行了对比。通过计算与对比表明,经修改调试后的程序对于各种震源类型、震源深度、震中、频率和慢度都有较好的普适性,适用于实际的地震波形研究。

参考文献

- Aki, K. and Richards, P. G., 1980. Quantative Seismology: Theory and Methods, Vols. 1 and 2. W. H. Freeman, San Francisco, 932pp.
- Apsel, R. J. and Luco, J. E., 1983. On the Green's functions for a layered halfspace. Part II. Bull. Seism. Soc. Amer., **73**, 931-951.
- Bouchon, M., 1981. A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media. Bull. Seism. Soc. Amer., **71**, 959-971.
- Burridge, R. and Knopoff, L., 1964. Body force equivalents for seismic dislocations. Bull. Seism. Soc. Amer., **54**, 1875-1888.
- Helmberger, D. V., 1968. Crust-mantle transition in the Bering Sea. Bull. Seism. Soc. Amer., **58**, 179-214.
- Helmberger, D. V., 1974. Generalized ray theory for shear dislocations. Bull. Seism. Soc. Amer., **64**, 45-64.
- Herrmann, R. B. and Wang, C. Y., 1985. A comparison of synthetic seismograms. Bull. Seism. Soc. Amer., **75**, 41-56.
- Hudson, J. A., 1969. A quantitative evaluation of seismic signals at teleseismic distances—I. Radiation from point sources. Geophys. J. R. astr. Soc., **18**, 233-249.
- Kennett, B. L. N., 1975. The effects of attenuation on seismograms. Bull. Seism. Soc. Amer., **65**, 1643-1651.
- Kennett, B. L. N. and Kerry, N. J., 1979. Seismic waves in a stratified half space. Geophys. J. R. astr. Soc., **57**, 557-583.
- Kennett, B. L. N., 1980. Seismic waves in a stratified half space-II. Theoretical seismograms. Geophys. J. R. astr. Soc., **61**, 1-10.
- Kennett, B. L. N., 1983. Seismic Wave Propagation in Stratified Media. Cambridge University, Cambridge, 342pp.
- O'Neill, M. E. and Hill, D. P., 1979. Causal absorption: Its effect on synthetic seismograms computed by the reflectivity method. Bull. Seism. Soc. Amer., **69**, 17-26.
- Wang, C. Y. and Herrmann, R. B., 1980. A numerical study of P-SV, and SH wave generation in a plane layered medium. Bull. Seism. Soc. Amer., **70**, 1015-1036.
- Yao, Z. X. and Harkrider, D. G., 1983. A generalized reflection-transmission coefficient matrix and discrete wavenumber method for synthetic seismograms. Bull. Seism. Soc. Amer., **73**, 1685-1699.

附录 A 广义反射透射系数矩阵方法的有关概念和公式

为叙述方便, 先介绍此目录中一些常用字符的意义。 z_j^-, z_j^+ 分别代表水平面 $z=z_j$ 的上表面和下表面; 凡带有下角标 j 的字符表示第 j 层介质的参数。 z_j 与介质层数 j 的相对关系见图 A1。

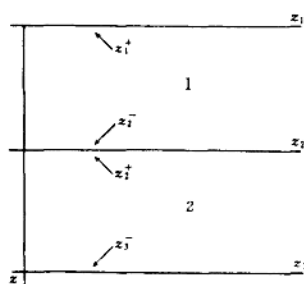


图 A1 介质层序号 i 与 z_i^+, z_i^- 的相对位置

A.1 应力-位移向量 B 的传递矩阵 P

(1) 定义

$$B(z_j) = P(z_i, z_j)B(z_i) \quad (A1)$$

(2) 性质

$$P(z_j, z_j) = I \quad (A2)$$

$$P(z_j, z_i) = P^{-1}(z_i, z_j) \quad (A3)$$

$$P(z_1, z_n) = \prod_{j=1}^{n-1} P(z_j, z_{j+1}) \quad (A4)$$

$$P(z_j, z_{j+1}) = D_j \begin{bmatrix} E_j^{-1} & 0 \\ 0 & E_j \end{bmatrix} D_j^{-1} \quad (A5)$$

传递矩阵 P 做为慢度 p 的函数, 在整个复 p 平面没有奇异点。

式中, I 为单位矩阵; D 为矩阵波动方程中矩阵 A 的本征向量矩阵, 见正文 (13) — (16) 式; 而

$$E_j = \begin{bmatrix} \exp(i\omega q_{\alpha j} d_j) & 0 \\ 0 & \exp(i\omega q_{\beta j} d_j) \end{bmatrix} \quad (A6)$$

A.2 矩阵波向量 V 的传递矩阵 Q

(1) 定义

$$V(z_i^+) = Q(z_i^+, z_j^+)V(z_j^+) \quad (A7)$$

(2) 性质

$$Q(z_j^-, z_j^+) = D_{j+1}^{-1} D_j \quad (A8)$$

$$Q(z_j^+, z_{j+1}^+) = \begin{bmatrix} E_j^{-1} & 0 \\ 0 & E_j \end{bmatrix} Q(z_{j+1}^-, z_{j+1}^+) \quad (A9)$$

$$Q(z_j^-, z_{j+1}^-) = Q(z_j^-, z_j^+) \begin{bmatrix} E_j^{-1} & 0 \\ 0 & E_j \end{bmatrix} \quad (A10)$$

$$Q(z_1^+, z_n^+) = \prod_{j=1}^{n-1} Q(z_j^+, z_{j+1}^+) \quad (A11)$$

$$Q(z_i^+, z_j^+) = D_i P(z_i, z_j) D_j^{-1} \quad (A12)$$

A.3 固体界面上的反射透射系数矩阵

对于 P-SV 波,

$$\begin{aligned} V_U(z_j^-) &= R_D V_D(z_j^-), & V_D(z_j^+) &= T_D V_D(z_j^-), \\ V_D(z_j^+) &= R_U V_U(z_j^+), & V_U(z_j^-) &= T_U V_U(z_j^+) \end{aligned} \quad (A13)$$

$$\begin{aligned} R_D &= \begin{bmatrix} r_{PP}^D & r_{SP}^D \\ r_{PS}^D & r_{SS}^D \end{bmatrix}, & T_D &= \begin{bmatrix} t_{PP}^D & t_{SP}^D \\ t_{PS}^D & t_{SS}^D \end{bmatrix}, \\ R_U &= \begin{bmatrix} r_{PP}^U & r_{SP}^U \\ r_{PS}^U & r_{SS}^U \end{bmatrix}, & T_U &= \begin{bmatrix} t_{PP}^U & t_{SP}^U \\ t_{PS}^U & t_{SS}^U \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A14)$$

式中, 角标 U, D 分别代表上行波和下行波。

对于 SH 波, 由于不存在转换波的问题, 故只有 4 个反射、透射系数, 而 P-SV 波 4 个矩阵共计 16 个系数。

设界面上部介质序号为 1, 下部介质序号为 2, 由其定义推得这些系数如下:

$$\begin{aligned} r_{PP}^D &= [q_{01}q_{\beta 1}(\rho_2\Omega_2 - 2\rho_1p^2\beta_1^2)^2 - q_{02}q_{\beta 2}(\rho_1\Omega_1 - 2\rho_2p^2\beta_2^2)^2 + \rho_1\rho_2(q_{01}q_{\beta 2} - q_{02}q_{\beta 1}) \\ &\quad + 4q_{01}q_{\beta 1}q_{02}q_{\beta 2}p^2(\rho_2\beta_2^2 - \rho_1\beta_1^2)^2 - p^2(\rho_1\Omega_1 - \rho_2\Omega_2)^2]/\Delta \\ r_{SP}^D &= -2ipq_{\beta 1}[(2\rho_1p^2\beta_1^2 - \rho_2\Omega_2)(\rho_1\Omega_1 - \rho_2\Omega_2) + 2q_{02}q_{\beta 2}(\rho_2\beta_2^2 - \rho_1\beta_1^2)(2\rho_2p^2\beta_2^2 - \rho_1\Omega_1)]/\Delta \\ r_{PS}^D &= -2ipq_{01}[(2\rho_1p^2\beta_1^2 - \rho_2\Omega_2)(\rho_1\Omega_1 - \rho_2\Omega_2) + 2q_{02}q_{\beta 2}(\rho_2\beta_2^2 - \rho_1\beta_1^2)(2\rho_2p^2\beta_2^2 - \rho_1\Omega_1)]/\Delta \\ r_{SS}^D &= [q_{01}q_{\beta 1}(\rho_2\Omega_2 - 2\rho_1p^2\beta_1^2)^2 - q_{02}q_{\beta 2}(\rho_1\Omega_1 - 2\rho_2p^2\beta_2^2)^2 - \rho_1\rho_2(q_{01}q_{\beta 2} - q_{02}q_{\beta 1}) \\ &\quad + 4q_{01}q_{\beta 1}q_{02}q_{\beta 2}p^2(\rho_2\beta_2^2 - \rho_1\beta_1^2)^2 - p^2(\rho_1\Omega_1 - \rho_2\Omega_2)^2]/\Delta \\ t_{PP}^D &= 2\rho_1q_{01}[(2\rho_1p^2\beta_1^2 - \rho_2\Omega_2)q_{\beta 1} + (2\rho_2p^2\beta_2^2 - \rho_1\Omega_1)q_{\beta 2}]/\Delta \\ t_{SP}^D &= -2i\rho_1q_{\beta 1}p[(\rho_1\Omega_1 - \rho_2\Omega_2) + 2q_{01}q_{\beta 2}(\rho_1\beta_1^2 - \rho_2\beta_2^2)]/\Delta \\ t_{PS}^D &= -2i\rho_1q_{01}p[(\rho_1\Omega_1 - \rho_2\Omega_2) + 2q_{02}q_{\beta 1}(\rho_1\beta_1^2 - \rho_2\beta_2^2)]/\Delta \\ t_{SS}^D &= 2\rho_1q_{\beta 1}[(2\rho_1p^2\beta_1^2 - \rho_2\Omega_2)q_{01} + (2\rho_2p^2\beta_2^2 - \rho_1\Omega_1)q_{02}]/\Delta \\ r_{PP}^U &= [q_{02}q_{\beta 2}(\rho_1\Omega_1 - 2\rho_2p^2\beta_2^2)^2 - q_{01}q_{\beta 1}(\rho_2\Omega_2 - 2\rho_1p^2\beta_1^2)^2 - \rho_1\rho_2(q_{01}q_{\beta 2} - q_{02}q_{\beta 1}) \\ &\quad + 4q_{01}q_{\beta 1}q_{02}q_{\beta 2}p^2(\rho_2\beta_2^2 - \rho_1\beta_1^2)^2 - p^2(\rho_1\Omega_1 - \rho_2\Omega_2)^2]/\Delta \\ r_{SP}^U &= -2ipq_{\beta 2}[(2\rho_2p^2\beta_2^2 - \rho_1\Omega_1)(\rho_1\Omega_1 - \rho_2\Omega_2) + 2q_{01}q_{\beta 1}(\rho_2\beta_2^2 - \rho_1\beta_1^2)(2\rho_1p^2\beta_1^2 - \rho_2\Omega_2)]/\Delta \\ r_{PS}^U &= -2ipq_{02}[(2\rho_2p^2\beta_2^2 - \rho_1\Omega_1)(\rho_1\Omega_1 - \rho_2\Omega_2) + 2q_{01}q_{\beta 1}(\rho_2\beta_2^2 - \rho_1\beta_1^2)(2\rho_1p^2\beta_1^2 - \rho_2\Omega_2)]/\Delta \\ r_{SS}^U &= [q_{02}q_{\beta 2}(\rho_1\Omega_1 - 2\rho_2p^2\beta_2^2)^2 - q_{01}q_{\beta 1}(\rho_2\Omega_2 - 2\rho_1p^2\beta_1^2)^2 + \rho_1\rho_2(q_{01}q_{\beta 2} - q_{02}q_{\beta 1}) \\ &\quad + 4q_{01}q_{\beta 1}q_{02}q_{\beta 2}p^2(\rho_2\beta_2^2 - \rho_1\beta_1^2)^2 - p^2(\rho_1\Omega_1 - \rho_2\Omega_2)^2]/\Delta \\ t_{PP}^U &= 2\rho_2q_{02}[(2\rho_1p^2\beta_1^2 - \rho_2\Omega_2)q_{\beta 1} + (2\rho_2p^2\beta_2^2 - \rho_1\Omega_1)q_{\beta 2}]/\Delta \\ t_{SP}^U &= -2i\rho_2q_{\beta 2}p[(\rho_1\Omega_1 - \rho_2\Omega_2) + 2q_{02}q_{\beta 1}(\rho_1\beta_1^2 - \rho_2\beta_2^2)]/\Delta \\ t_{PS}^U &= -2i\rho_2q_{02}p[(\rho_1\Omega_1 - \rho_2\Omega_2) + 2q_{01}q_{\beta 2}(\rho_1\beta_1^2 - \rho_2\beta_2^2)]/\Delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{SS}^U &= 2\rho_2 q_{\beta 2} [(2\rho_1 p^2 \beta_1^2 - \rho_2 \Omega_2) q_{\alpha 1} + (2\rho_2 p^2 \beta_2^2 - \rho_1 \Omega_1) q_{\alpha 2}] / \Delta \\
r_{SH}^D &= (\rho_1 \beta_1^2 q_{\beta 1} - \rho_2 \beta_2^2 q_{\beta 2}) / \Gamma \\
t_{SH}^D &= 2\rho_1 \beta_1^2 q_{\beta 1} / \Gamma \\
t_{SH}^U &= 2\rho_2 \beta_2^2 q_{\beta 2} / \Gamma \\
r_{SH}^U &= -(\rho_1 \beta_1^2 q_{\beta 1} - \rho_2 \beta_2^2 q_{\beta 2}) / \Gamma
\end{aligned} \tag{A15}$$

式中,

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= 2p^2 \beta_1^2 - 1 \\
\Omega_2 &= 2p^2 \beta_2^2 - 1 \\
\Delta &= q_{\alpha 1} q_{\beta 1} (\rho_2 \Omega_2 - 2\rho_1 p^2 \beta_1^2)^2 + q_{\alpha 2} q_{\beta 2} (\rho_1 \Omega_1 - 2\rho_2 p^2 \beta_2^2)^2 + \rho_1 \rho_2 (q_{\alpha 1} q_{\beta 2} + q_{\alpha 2} q_{\beta 1}) \\
&\quad + 4q_{\alpha 1} q_{\beta 1} q_{\alpha 2} q_{\beta 2} p^2 (\rho_2 \beta_2^2 - \rho_1 \beta_1^2)^2 + p^2 (\rho_1 \Omega_1 - \rho_2 \Omega_2)^2 / \Delta \\
\Gamma &= \rho_1 \beta_1^2 q_{\beta 1} + \rho_2 \beta_2^2 q_{\beta 2}
\end{aligned}$$

A.4 自由表面的反射系数矩阵和接收系数矩阵

自由表面反射系数矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}$ 及接收系数矩阵 $\mathbf{R}_{EV}$ 定义如下:

$$\mathbf{V}_D(z_0^+) = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{V}_U(z_0^+), \quad \mathbf{W}(z_0) = \mathbf{R}_{EV} \mathbf{V}_U(z_0^+) \tag{A16}$$

式中 $\mathbf{W}$ 为面谱向量表示的位移量 [参见正文(7)式], 而

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} r_{PP} & r_{SP} \\ r_{PS} & r_{SS} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{EV} = \begin{bmatrix} r_{PU} & r_{SU} \\ r_{PV} & r_{SV} \end{bmatrix}$$

各分量分别为:

$$\begin{aligned}
r_{PP} &= -[(2p^2 - \beta^{-2})^2 - 4p^2 q_{\alpha} q_{\beta}] / [(2p^2 - \beta^{-2})^2 + 4p^2 q_{\alpha} q_{\beta}] \\
r_{SP} &= 4ipq_{\beta}(2p^2 - \beta^{-2}) / [(2p^2 - \beta^{-2})^2 + 4p^2 q_{\alpha} q_{\beta}] \\
r_{PS} &= 4ipq_{\alpha}(2p^2 - \beta^{-2}) / [(2p^2 - \beta^{-2})^2 + 4p^2 q_{\alpha} q_{\beta}] \\
r_{SS} &= -[(2p^2 - \beta^{-2})^2 - 4p^2 q_{\alpha} q_{\beta}] / [(2p^2 - \beta^{-2})^2 + 4p^2 q_{\alpha} q_{\beta}]
\end{aligned} \tag{A17}$$

$$\begin{aligned}
r_{PU} &= 2i\beta^{-2} q_{\alpha}(2p^2 - \beta^{-2}) / [(2p^2 - \beta^{-2})^2 + 4p^2 q_{\alpha} q_{\beta}] \\
r_{SU} &= 4p q_{\alpha} q_{\beta} \beta^{-2} / [(2p^2 - \beta^{-2})^2 + 4p^2 q_{\alpha} q_{\beta}] \\
r_{PV} &= 4p q_{\alpha} q_{\beta} \beta^{-2} / [(2p^2 - \beta^{-2})^2 + 4p^2 q_{\alpha} q_{\beta}] \\
r_{SV} &= 2i\beta^{-2} q_{\beta}(2p^2 - \beta^{-2}) / [(2p^2 - \beta^{-2})^2 + 4p^2 q_{\alpha} q_{\beta}]
\end{aligned} \tag{A18}$$

而 SH 波的自由表面反射系数为 1, 接收系数为 2。

A.5 反射透射系数矩阵与矩阵 Q 的关系

$$\begin{aligned}
 R_D &= Q_{12} Q_{22}^{-1} \\
 T_D &= Q_{22}^{-1} \\
 R_U &= -Q_{22}^{-1} Q_{21} \\
 T_U &= Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{21}
 \end{aligned} \tag{A19}$$

而

$$Q(z_j^-, z_j^+) = \begin{bmatrix} T_U - R_D T_D^{-1} R_U & R_D T_D^{-1} \\ T_D R_U & T_D^{-1} \end{bmatrix} \tag{A20}$$

A.6 迭代公式

设 Q 矩阵在任意两界面 $z=z_i$, $z=z_j$ 之间仍保持 (A20) 的表示形式, 则对应的反射、透射系数矩阵称为界面 z_i 、 z_j 之间的广义反射、透射系数矩阵。

设有三层介质, 序号为 1, 2, 3, 以 R_b^1 , T_b^1 , R_b^2 , T_b^2 表示 z_1^+ 与 z_2^+ 之间的广义反射、透射系数矩阵; 以 R_b^2 , T_b^2 , R_b^3 , T_b^3 表示 z_2^+ 与 z_3^+ 之间的广义反射透射系数矩阵; 以 R_b^{12} , T_b^{12} , R_b^{13} , T_b^{13} 表示 z_1^+ 与 z_3^+ 之间的广义反射透射系数矩阵, 则有迭代公式:

$$\begin{aligned}
 R_b^{12} &= R_b^1 + T_b^1 R_b^2 (I - R_b^1 R_b^2)^{-1} T_b^1 \\
 T_b^{12} &= T_b^2 (I - R_b^1 R_b^2)^{-1} T_b^1 \\
 R_b^{13} &= R_b^2 + T_b^2 R_b^3 (I - R_b^2 R_b^3)^{-1} T_b^2 \\
 T_b^{13} &= T_b^3 (I - R_b^2 R_b^3)^{-1} T_b^2
 \end{aligned} \tag{A21}$$

附录 B 震源表示

B.1 等效体力震源的面谱向量展开

根据震源处位移间断、曳引力间断及体力作用的相互等效性, 可以统一用体力 $\mathbf{f}$ 表示震源的作用, 而一般点源可用下列形式的体力等效表示

$$f_j = \epsilon_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) - \partial_k [M_{jk} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)] \quad (\text{B1})$$

其中, ϵ 表示单力; δ 是 Dirac δ -函数; $\mathbf{M}$ 表示地震矩张量。

对体力 $\mathbf{f}$ 作面谱向量展开

$$\mathbf{f} = \int_0^\infty k dk \sum [F_z \mathbf{R}_k^m + F_v \mathbf{S}_k^m + F_H \mathbf{T}_k^m] \quad (\text{B2})$$

由面谱矩量的正交性, F_z , F_v , F_H 可分别表示如下:

$$F_z = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta [\mathbf{R}_k^m]^* \cdot \mathbf{f} \quad (\text{B3})$$

$$F_v = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta [\mathbf{S}_k^m]^* \cdot \mathbf{f} \quad (\text{B4})$$

$$F_H = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta [\mathbf{T}_k^m]^* \cdot \mathbf{f} \quad (\text{B5})$$

式中, $*$ 表示复共轭。由 Dirac δ -函数及 Bessel 函数的性质得到 (省写了 $1/2\pi$):

$$\begin{aligned} F_z &= \epsilon_x \delta(z - z_s) - M_{xx} \delta'(z - z_s) & m=0 \\ &= \frac{k}{2} (\pm M_{xx} - i M_{xy}) \delta(z - z_s) & m=\pm 1 \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

$$\begin{aligned} F_v &= -\frac{k}{2} (M_{xx} + M_{yy}) \delta(z - z_s) & m=0 \\ &= \frac{1}{2} (\pm \epsilon_x - i \epsilon_y) \delta(z - z_s) + \frac{1}{2} (\mp M_{xx} + i M_{yy}) \delta'(z - z_s) & m=\pm 1 \\ &= \frac{k}{4} [(M_{xx} - M_{yy}) \mp i (M_{xy} + M_{yx})] \delta(z - z_s) & m=\pm 2 \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

$$\begin{aligned} F_H &= -\frac{k}{2} (M_{xy} + M_{yx}) \delta(z - z_s) & m=0 \\ &= \frac{1}{2} (\pm \epsilon_y - i \epsilon_x) \delta(z - z_s) + \frac{1}{2} (\mp M_{yx} + i M_{xx}) \delta'(z - z_s) & m=\pm 1 \\ &= -\frac{k}{4} [(M_{xy} + M_{yx}) \pm i (M_{xx} - M_{yy})] \delta(z - z_s) & m=\pm 2 \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

设矩阵波动方程中的体力项 $\mathbf{F}$ 为

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{F}_1 \delta(z - z_s) + \mathbf{F}_2 \delta'(z - z_s) \quad (\text{B9})$$