大学物理习题解答

第一册　力学部分

天 津 大 学

前　　言

本习题集及解答系天津大学根据多年的教学经验收集国内外典型习题汇集而成，解答中力求给学生有一个严格的演算基本技能的训练，因此强调演算步骤，文字运算及分析问题的方法，从而达到融会贯通，触类旁通的目的。不但对大、中学生学习物理具有较大的启发作用，而且也可作为教师身边一本有益的参考读物，由于编集时间仓促，水平有限，还望各使用同志多多指教，提出改进意见。

目　　录

第一章 矢 量

1—1 两个矢量相等的条件是什么？由 $|a| = |b|$ 是否可以断定 $\vec{a} = \vec{b}$？

解：两个矢量相等的条件为：数值的大小相等，方向相同。而 $|a| = |d|$ 只是说明其数值相等，没有说明其方向，所以不能断定 $\vec{a} = \vec{b}$。

1—2 可否将大小不同的两个矢量合起来得到一个大小为零的合矢量？三个矢量是否可以这样作？试说明之

解：两个大小不同的矢量合起来不可能为零。而三个（或三个以上）矢量合成是可能为零的，根据多边形法则，当三个矢量合成正好是一封闭三角形时，即第一矢量的起点和第三个矢量的终点相重合，则合矢量为零。

1—3 如果一个矢量的分量不为零，这个矢量可否为零？

解：只要有一任何分量不为零，则此矢量即不为零。

1—4 已知 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 $77°$ $a=10$ $b=8$ 求

（1）求 $|\vec{a}+\vec{b}|$ 以及 $\vec{a}+\vec{b}$ 和 a 之间的夹角

（2）求 $|\vec{a}-\vec{b}$ 以及 $\vec{a}-\vec{b}$ 和 b 之间的夹角，

解：（1）$c = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 2}$

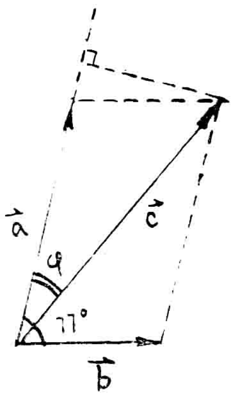
$$= \sqrt{10^2+8^2+2\times 10\times 8\cos 77°}$$

$$= \sqrt{100+64+160\times 0.225}$$

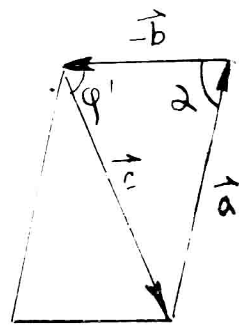
$$= \sqrt{200} = 1.41\times 10 = 14.1$$

$$tg\varphi=\frac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}=\frac{8\sin77^\circ}{10+8\cos77^\circ}=\frac{8\times0.9744}{10+1.8}=0.66$$

$$\therefore\qquad \varphi=33^\circ26'.$$



题 1—4 （1）



题 1—4 （2）图

（2）　$\overline{c}=|a-b|=\sqrt{a^2+(-b)^2+2a(-b)\cos\alpha}$

$=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$

$=\sqrt{10^2+8^2-2\times10\times8\cos77^\circ}$

$=\sqrt{164-36}=\sqrt{1.28}$

$=11.3.$

由正弦定理：

$$\frac{\sin\alpha}{R}=\frac{\sin\varphi}{a}$$

$$sin\varphi = \frac{a}{R} sin\alpha = \frac{10}{11.3} \times 0.9744 = 0.862$$

$$\varphi' = 59°33'$$

1—5 试证：若 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ 则 $\vec{a} \perp \vec{b}$.

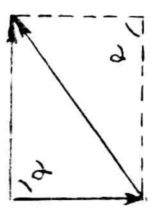
证明：$|a+b| = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$

$$|a-b| = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$$

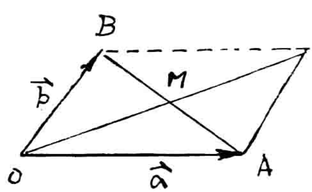
由上式看出：

只有当：$\alpha = \frac{\pi}{2}$时. $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

则$\vec{a} \perp \vec{b}$



（题 1—5）图



（题 1—6）图

1—6 如图所示：在平行四边形 $OACB$ 中，设$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ M是两条对角线的交点，试用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示$\overline{OM}$，$\overline{BA}$及$\overline{MA}$

解： $\overline{OC} = \vec{a} + \vec{b}$ 而$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

$$\therefore \quad \overline{OM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$\overline{BA} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\overline{MA} = \frac{1}{2}\overline{BA} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$$

1—7　已知作用于一点的两个力，它的大小分别为 12 公斤力和 9 公斤力，夹角为 120°，求 合力。

解:

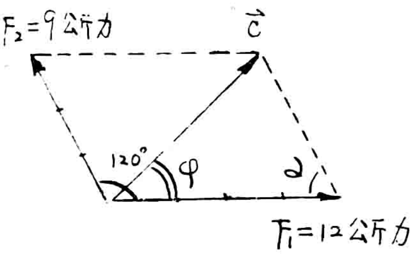
$$c = \sqrt{F_1{}^2 + F_2{}^2 + 2F_1F_2\cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{F_1{}^2 + F_2{}^2 - 2F_1F_2\cos 60^\circ}$$

$$\sqrt{12^2 + 9^2 - 2\times 12\times 9\,\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{144 + 81 - 108} = \sqrt{117}$$

$$= 10.8$$



（题 1—7）图

由正弦定理：$\dfrac{F_2}{\sin\varphi} = \dfrac{R}{\sin\alpha}$

$$\therefore \quad \sin\varphi = \frac{F_2}{R}\sin\alpha = \frac{9}{10.8}\sin 60^\circ = \frac{9}{10.8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.72.$$

$$\therefore \quad \varphi = 46^\circ 3'$$

1—8　如图把大小为300公斤力F分解为F_1与F_2，已知F_1与F的夹角$\alpha = 47^\circ$ F_2与F的夹角$\beta = 18^\circ$求F_1与F_2。

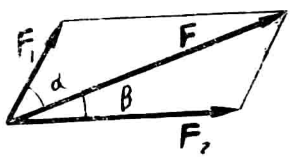
解：$$\frac{F}{\sin[\pi-(\alpha+\beta)]} = \frac{F_1}{\sin\beta}$$

$$F_1 = \frac{F\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{300\times\sin 18^\circ}{\sin(47^\circ+18^\circ)}$$

$$= \frac{300\times 0.3090}{0.9063}$$

$$= 102(\text{公斤力})$$



（题1—8）图

$$\frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{F}{\sin[\pi-(\alpha+\beta)]} = \frac{F}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

$$F_2 = \sin\alpha\frac{F}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin 47^\circ\times F}{\sin 65^\circ} = 242(\text{公斤力})$$

1—9　矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$有什么关系时，才能有下列关系，试绘图说明。

（Ⅰ）$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}|$ $\xrightarrow{\vec{a}}\xrightarrow{\vec{b}}$ $\vec{a}$与$\vec{b}$夹角为零.

（Ⅱ）$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|-|\vec{b}|$ $\overset{\vec{a}}{\longrightarrow}$ $\underset{\vec{b}}{\longleftarrow}$ $\vec{a}$与$\vec{b}$夹角为π.

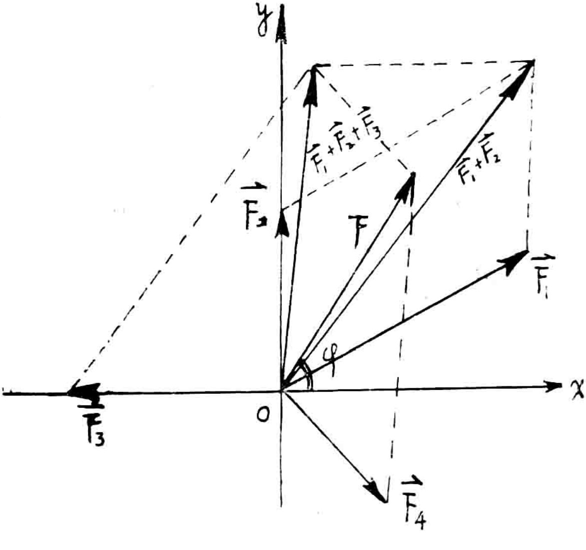
(Ⅲ) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ $\xrightarrow{\vec{a}}$ $\xleftarrow[\vec{b}]{}$ $\vec{a}$与$\vec{b}$夹角为π.

(Ⅳ) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$ $\xrightarrow{\vec{a}}$ $\xrightarrow{}$ $\vec{a}$与$\vec{b}$夹角为零.

1—10 某物体受到4个在同一平面上的力$F_1=40$公斤力，$\theta_1=30°$ $F_2=25$公斤，$\theta_2=90°$，$F_3=30$公斤力$\theta_3=180°$，$F_4=20$公斤力，$\theta_4=-45°$的作用。$\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4$分别为相应力与$X$轴所夹的角。试求其合力。

（Ⅰ）试用平行四边形法则计算合力的大小及方向。

（Ⅱ）用多边形画图法，用尺规量出答案，画多边形时是



题 1—10图

否必须按照 $F_1F_2F_3F_4$ 的次序？

解：（Ⅰ）平行四边形法则

（Ⅱ）用多边形法（略）

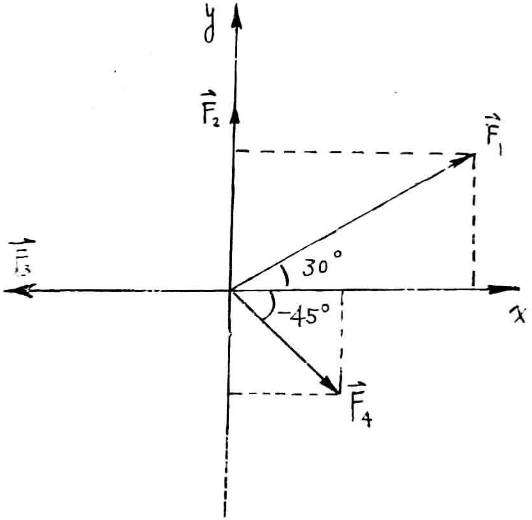
1—11 用解析法求题 10 中的合力，试与题 10 中所用的两种方法比较，何种方法优越？

解：$\vec{F}_1=\vec{i}F_1cos30+\vec{j}F_1sin30°$

$\vec{F}_2=\vec{j}F_2sin90°$

$\vec{F}_3=\vec{i}F_3sin180°$

$\vec{F}_4=\vec{i}F_4cos(-45°)+\vec{j}F_4sin(-45°)$



题 1—11图

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$$
$$= F_1 \cos 30 + 0 + F_3 \cos 180° + F_4 \cos 45。$$
$$= 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + (-30) + 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 18.7\text{公斤力}$$
$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}$$
$$= F_1 \sin 30° + F_2 \sin 90° + 0 + F_4 \sin(-45°)$$
$$= 40 \times \frac{1}{2} + 25 + 20\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 30.9(\text{公斤力})$$

合力 $F = \sqrt{F_x^2 + F_y} = \sqrt{18.7^2 + 30.9^2} = 26.2$公斤力

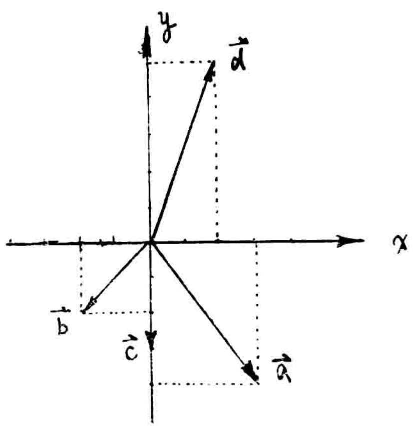
$$t_y\varphi = \frac{F_y}{F_x} = \frac{30.9}{18.7} = 1.653 \quad \therefore \varphi \doteq 58°40'$$

※与次序无关，因矢量加法服从交换律。

1—12 在采用多边形法求几个矢量的合成时，这些矢量一一首尾相接后，恰好构成一个封闭多边形，试问其合矢量如何？

解：合矢量为零

1—13 在平面直角坐标系中，以坐标原点为起点画出下列各矢量：



题 1—12图

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \quad \vec{b} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{c}=-3\vec{j} \qquad \vec{d}=2i+5\vec{j}$$

求：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=?$ 并将此合矢量画在坐标系上。

解：$F_x=a_x+b_x+c_x+d_x=3-2+0+2=3.$

$F_y=a_y+b_y+c_y+d_y=-4-2-3+5=-4.$

即：$\vec{F}=\vec{i}\,3-\vec{j}\,4=3\vec{i}-4\vec{j}\,(=\vec{a})$

$$F=\sqrt{3^2+4^2}=5. \quad tg\varphi=\frac{4}{3}\ \varphi=53°4'$$

1—14　试求在同一平面上的位移矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$与$\vec{c}$的矢量和，已知它们的分量为：

$$\left.\begin{array}{l}a_x=12\text{米}\\ a_y=4\text{米}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}b_x=-10\text{米}\\ b_y=0\text{米}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}c_x=6\text{米}\\ c_y=2\text{米}\end{array}\right\}$$

用解析法及多边形法分别作此题.

（Ⅰ）解析法：

$F_x=a_x+b_x+c_x=12-10+6=8$ 米.

$F_y=a_y+b_y+c_y=4+0+2=6$米.

$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\sqrt{8^2+64}=\sqrt{100}=10$米.

$$\varphi=arctg\frac{F_y}{F_x}=arctg\frac{6}{8}=arctg0.75=36°52'.$$

（Ⅱ）作图法略

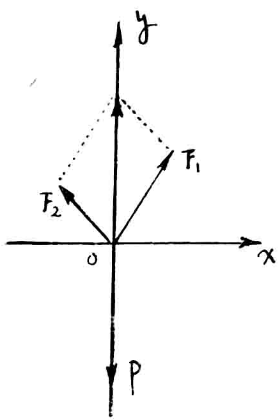
1—15　作用于原点的力 F_1F_2 和铅直向下的力$\vec{P}$平衡（即合力为零）F_1F_2和 y 轴的夹角相应为30° 和 45°（两侧）如果$F_1=100$ 公斤力，求$\vec{F}_2$与$\vec{P}$各为多少？有人将三个矢量关系写作$\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{P}$是否正确？

解：$F_x=F_1sin30°+F_2sin45°=0.$

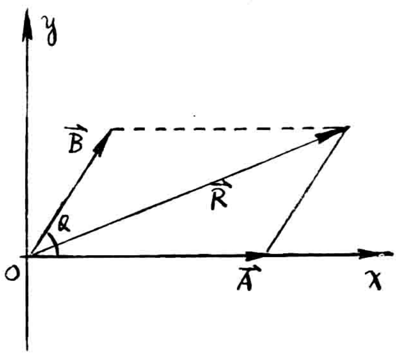
$$100\times\frac{1}{2}=F_2\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\therefore\quad F_2=\frac{100}{\sqrt{2}}=7\text{（公斤）}$$

$$F_y=F_1\cos 30^\circ+F_2\cos 45^\circ-P=0.$$

$$P=F_1\cos 30^\circ+F_2\cos 45^\circ=100\frac{\sqrt{3}}{2}+71\frac{\sqrt{2}}{2}=136.6\text{（公斤）}.$$



题　1—15图



题　1—16图

由以上计算得知：$\vec{F}_1+\vec{F}_2=-\vec{P}$

所以　$\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{P}$是不正确的，应该写成$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{P}=0$.

1—16　假设长度为$\vec{A}$与$\vec{B}$的两个矢量的起点放在一起，并且它们相交成θ角，试用沿两垂直的轴所取的分量，证明矢量的长度为

$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$

证明：选取直角坐标系，使 ox 轴沿 $\vec{A}$ 矢量方向。

$$\vec{A} = \vec{i} A + 0$$

$$\vec{B} = iB\cos\theta + \vec{j} B\sin\theta.$$

合矢量为 $\vec{R}$

$$R_x = A + B\cos\theta.$$

$$R_y = B\sin\theta.$$

$$\therefore \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_B^2} = \sqrt{(A+B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2}$$

$$= \sqrt{A^2 + 2AB\cos\theta + B^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{A^2 + 2AB\cos\theta + B^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$ （证毕）

1—17　试将三个矢量的分解与合成的解析法推广到三维的情况：

没有 $\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$ 三个矢量，在三维坐标中为：

$$\left.\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z \\ \vec{B} &= \vec{i} B_x + \vec{j} B_y + \vec{k} B_z \\ \vec{C} &= \vec{i} C_x + \vec{j} C_y + \vec{k} C_z \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{合矢量各分量}} \left\{\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x + C^x \\ R_y &= A_y + B_y + C_y \\ R_z &= A_z + A_z + A_z \end{aligned}\right.$$

$$\therefore \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$ （合矢量的大小）．

合矢量的方向：$\frac{R_x}{R} = \cos\alpha \cdot \frac{R_y}{R} = \cos\beta.\ \frac{R_z}{R} = \cos r.$

1—18　试证明

（Ⅰ）$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$

（Ⅱ）$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}$

$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

证明（Ⅰ）
$$\left.\begin{aligned}\vec{i}\cdot\vec{i}&=1\cos 0^\circ=1\\ \vec{j}\cdot\vec{j}&=1\cos 0^\circ=1\\ \vec{k}\cdot\vec{k}&=1\cos 0^\circ=1\end{aligned}\right\}\therefore \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{i}\cdot\vec{j}&=1\cdot\cos 90^\circ=0\\ \vec{j}\cdot\vec{k}&=1\cdot\cos 90^\circ=0\\ \vec{k}\cdot\vec{i}&=1\cdot\cos 90^\circ=0\end{aligned}\right\}\therefore \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0.$$

（Ⅱ）
$$\left.\begin{aligned}\vec{j}\times\vec{i}&=1\sin 0^\circ=0\\ \vec{j}\times\vec{j}&=1\sin 0^\circ=0\\ \vec{k}\times\vec{k}&=1\sin 0^\circ=0\end{aligned}\right\}\therefore \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$

1—19　在直角右手坐标系中，已知$A=3\vec{i}$ $B=5\vec{j}$试求（a）$\vec{A}\cdot\vec{B}$（b）$\vec{A}\times\vec{B}$（大小及方向）

解：（a）$\vec{A}\cdot\vec{B}=3\vec{i}\cdot 5\vec{j}=15\cos(\widehat{ij})=15\cos 90^\circ=0$.

（b）$\vec{A}\times\vec{B}=3\vec{i}\times 5\vec{j}=15\sin(\widehat{ij})=15\sin 90^\circ=15\vec{k}$.

方向⊥于ij平面。

1—20　$|A|=8$单位，$|B|=6$单位，A与B的夹角为30°. 求$\vec{A}\cdot\vec{B}$与$\vec{A}\times\vec{B}$

解：（a）$\vec{A}\cdot\vec{B}=48\cos 30^\circ=48\frac{\sqrt{3}}{2}=41.5$(单位)(标量)

（b）$\vec{A}\times\vec{B}=48\sin 30^\circ=48\frac{1}{2}=24$单位方向⊥$\vec{A}\cdot\vec{B}$平面，

1—21证明$\vec{A}\cdot\vec{i}=A_x$，$\vec{A}\cdot\vec{j}=A_y$，$\vec{A}\cdot\vec{k}=A_z$

其中A_x，A_y，A_z为矢量$\vec{A}$沿各坐标轴分量）

证明：$\vec{A}\cdot\vec{i}=A\cos\theta=A_x$

$\vec{A}\cdot\vec{j}=A\cos\beta=A_y$

$\vec{A}\cdot\vec{k}=A\cos r=A_z$

1—22　试就任一个矢量$\vec{A}$（大小为A）证明：$\vec{A}\cdot\vec{A}=A^2$

$\vec{A}\times\vec{A}=0$

证明：$\vec{A}\cdot\vec{A}=A^2\cos 0^\circ=A^2$

$|\vec{A}\times\vec{A}|=|A^2\sin 0^\circ|=0$

1—23（Ⅰ）证明本章§1—1—4中式(1—1—13)即：

$\vec{a}\cdot\vec{b}\ a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

（Ⅱ）证明：$\vec{a}\cdot\vec{a}=a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2$，并说明此式的几何意义。

（Ⅰ）证明

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{i}a_x+\vec{j}ay+\vec{k}a_z)\cdot(\vec{i}b_x+\vec{j}b_y+\vec{k}b_z)$

$=[(ax\cdot bx)\vec{i}\cdot\vec{i}+(a_yb_x)\vec{j}\cdot\vec{i}+(a_zb_x)\vec{k}\cdot\vec{i}][(a^xb_y)\vec{i}\cdot\vec{j}$
$+(a_yb_y)\vec{j}\cdot\vec{j}+(a_zb_y)\vec{k}\cdot\vec{j}]+[(a_xb_z)\vec{i}\cdot\vec{k}+(a_yb_z)\vec{j}\cdot\vec{k}$
$+(a_zb_z)\vec{k}\cdot\vec{k}]$.

$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

（Ⅱ）$\vec{a}\cdot\vec{a}=(\vec{i}a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z)\cdot(\vec{i}a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z)$

$=a_x{}^2(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_xa_y(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_xa_z(\vec{i}\cdot\vec{k})$
$+a_ya_x(\vec{j}\cdot\vec{i})+a_ya_y(\vec{j}\cdot\vec{j})+a_ya_z(\vec{j}\cdot\vec{k})+a_za_x(\vec{k}\cdot\vec{i})+$

$$+a_z a_y(\vec{k}\cdot\vec{j})+a_z a_z(\vec{h}\cdot\vec{k})$$

$$=a_x{}^2\cos 0^\circ+a_y{}^2\cos 0^\circ+a_z{}^2\cos 0^\circ$$

$$=a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2 \qquad \text{对角线}$$

1—24 设$oxyz$与$ox'y'y'$为原点相同，方位不同的两个直角右手坐标系，矢量$\vec{A}$与$\vec{B}$在两个坐标系中的正交分解出来的分量分别为 A_x、A_y、A_z、A_x'、A_y'、A_z'及 B_x、B_y、B_z、B_x'、B_y'、B_z'证明：

（Ⅰ）$A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2=A_x'^2+A_y'^2+A_z'^2$

（Ⅱ）$A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=A_x'B_x'+A_y'B_y'+A_z'A_z'$

从上列结果，你对矢量关系式的性质能得到什么启示。

（Ⅰ）在x、y、z坐标系中：

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=(\vec{i}A_x+\vec{j}A_y+\vec{k}A_z)\cdot(\vec{i}A_x+\vec{j}A_y+\vec{k}A_z).$$

$$=A_x^2(\vec{i}\cdot\vec{i})+A_xA_y\overset{0}{(\vec{i}\cdot\vec{j})}+$$

$$+A_xA_z\overset{0}{(\vec{i}\cdot\vec{k})}+A_yA_x\overset{0}{(\vec{j}\cdot\vec{i})}+$$

$$+A_y^2(\vec{j}\cdot\vec{j})+A_yA_z\overset{0}{(\vec{j}\cdot\vec{h})}+$$

$$+A_{zx}A\overset{0}{(\vec{k}\cdot\vec{i})}+A_zA_y\overset{0}{(\vec{k}\cdot\vec{j})}+$$

$$+A_z{}^2(\vec{k}\cdot\vec{k})$$

$$=A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2$$