ISSN 0254-7791

计算数学

MATHEMATICA NUMERICA SINICA

第22卷 第1期

Vol. 22 No. 1

1

2000

中国科学院计算数学与科学工程计算研究所 主办

《计算数学》编辑部 出版

2000 年 2 月
Feb., 2000

计 算 数 学
MATHEMATICA NUMERICA SINICA

第 22 卷第 1 期
Vol.22, No.1

一类非协调元的收敛性分析*

石钟慈 王家城
(中国科学院计算数学与科学工程计算研究所, 北京, 100080)

CONVERGENCE ANALYSIS OF A CLASS OF NONCONFORMING FINITE ELEMENTS

Shi Zhongci Wang Jiacheng
(*Institute of Computational Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Beijing,* 100080)

Abstract

In this paper, two nonconforming finite elements are discussed. They pass the generlized patch test and can be used in the numerical solution of second order elliptic problems.

Keywords: nonconforming, finite element method, convergence
关键词: 非协调, 有限元, 收敛性

1. 引 言

最近, [1] 在求解 Stokes 方程时提出了一类非协调元. 这类非协调元定义在矩形网格上, 形式简单, 自由度少, 比熟知的多线性元还少. 例如, 对于三维问题, 它们只有六个自由度, 是型函数在各个表面中点处的函数值或者表面上的平均值.

与一些熟知的非协调元不同之处是, 由于这类非协调元简单的形式及其非常少的自由度, 它们不包含任何协调的部分, 但是, 已有的结果表明它们具有良好的数值表现 [1], [2] 中已有一些理论分析, 用它们来求解晶体的微结构方程, 也取得较好的结果.

本文将详细分析这类非协调元的收敛性, 所用的工具是 [3] 的广义分片检验和 [4] 的 F-E-M 检验. 指出用它们来求解一般的二阶椭圆边值问题能够获得收敛的结果.

为了叙述方便, 以三维问题为例, 高维情形完全类似. 设 Ω 是一个立方体: $\Omega=[0,L_1]\times[0,L_2]\times[0,L_3], V=H_0^1(\Omega)$, 考虑如下的问题: 求 $u\in V$, 使得

$$a(u,v)=f(v),\quad \forall v\in V, \tag{1}$$

其中

$$a(u,v)=\int_\Omega(\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+cuv)\,dx,$$

* 1997 年 11 月 16 日收到.

$$f(v)=\int_\Omega fv\,dx.$$

所有的数据满足通常的正则性要求，使得问题 (1) 的解存在唯一.

2. 有限元空间

在参考单元 $\hat{K}=[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$ 上，定义有限元 $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \sum_{\hat{K}}^p)$:

$$P_{\hat{K}}=\mathrm{span}\{1,\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3,\hat{x}_1^2-\hat{x}_2^2,\hat{x}_1^2-\hat{x}_3^2\},\tag{2}$$

$$\textstyle\sum_{\hat{K}}^p=\{q(\hat{M}_i),\quad i=1,2,...,6\},\tag{3}$$

其中 $q(\hat{M}_i)$ 是型函数在 $\hat{M}_i$ 上的值，而 $\hat{M}_i$ 表示 $\hat{K}$ 的六个表面的中点

$$\{\hat{M}_i\}=\{(1,0,0),(-1,0,0),(0,1,0),(0,-1,0),(0,0,1),(0,0,-1)\}.$$

很明显，自由度集 $\sum_{\hat{K}}^p$ 对多项式空间 $P_{\hat{K}}$ 是唯一可解的. 例如，我们可以找到一组 $\hat{\varphi}_i(\hat{x})\in P_{\hat{K}}$, 使得

$$\hat{\varphi}_i(\hat{M}_j)=\delta_{ij},\quad i,j=1,2,...,6.\tag{4}$$

$\hat{\varphi}_i$ 的具体表达式可写为

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_1&=-\frac{1}{6}\hat{x}_2^2-\frac{1}{6}\hat{x}_3^2+\frac{1}{3}\hat{x}_1^2+\frac{1}{2}\hat{x}_1+\frac{1}{6},\\
\hat{\varphi}_2&=-\frac{1}{6}\hat{x}_2^2-\frac{1}{6}\hat{x}_3^2+\frac{1}{3}\hat{x}_1^2-\frac{1}{2}\hat{x}_1+\frac{1}{6},\\
\hat{\varphi}_3&=-\frac{1}{6}\hat{x}_1^2-\frac{1}{6}\hat{x}_3^2+\frac{1}{3}\hat{x}_2^2+\frac{1}{2}\hat{x}_2+\frac{1}{6},\\
\hat{\varphi}_4&=-\frac{1}{6}\hat{x}_1^2-\frac{1}{6}\hat{x}_3^2+\frac{1}{3}\hat{x}_2^2-\frac{1}{2}\hat{x}_2+\frac{1}{6},\\
\hat{\varphi}_5&=-\frac{1}{6}\hat{x}_1^2-\frac{1}{6}\hat{x}_2^2+\frac{1}{3}\hat{x}_3^2+\frac{1}{2}\hat{x}_3+\frac{1}{6},\\
\hat{\varphi}_6&=-\frac{1}{6}\hat{x}_1^2-\frac{1}{6}\hat{x}_2^2+\frac{1}{3}\hat{x}_3^2-\frac{1}{2}\hat{x}_3+\frac{1}{6}.
\end{aligned}\tag{5}$$

即 $\{\hat{\varphi}_i\}$ 是有限元 $\left(\hat{K},P_{\hat{K}},\sum_{\hat{K}}^p\right)$ 的一组标准基，我们称这个有限元为 NF_1 元.

下面构造另一种有限元 NF_2 元. 多项式空间 $P_{\hat{K}}$ 仍如前面的 (2) 式，自由度集如下:

$$\textstyle\sum_{\hat{K}}^a=\left\{\frac{1}{|\hat{F}_i|}\int_{\hat{F}_i}q\,ds,\quad i=1,2,...,6\right\},\tag{6}$$

$\hat{F}_i\subset\partial\hat{K}$ 是单元 $\hat{K}$ 的表面. 同样，可以构造出它的标准基:

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_1&=-\frac{1}{4}\hat{x}_2^2-\frac{1}{4}\hat{x}_3^2+\frac{1}{2}\hat{x}_1^2+\frac{1}{2}\hat{x}_1+\frac{1}{6},\\
\hat{\psi}_2&=-\frac{1}{4}\hat{x}_2^2-\frac{1}{4}\hat{x}_3^2+\frac{1}{2}\hat{x}_1^2-\frac{1}{2}\hat{x}_1+\frac{1}{6},\\
\hat{\psi}_3&=-\frac{1}{4}\hat{x}_1^2-\frac{1}{4}\hat{x}_3^2+\frac{1}{2}\hat{x}_2^2+\frac{1}{2}\hat{x}_2+\frac{1}{6},
\end{aligned}$$

$$\hat{\psi}_4 = -\frac{1}{4}\hat{x}_1^2 - \frac{1}{4}\hat{x}_3^2 + \frac{1}{2}\hat{x}_2^2 - \frac{1}{2}\hat{x}_2 + \frac{1}{6}, \tag{7}$$

$$\hat{\psi}_5 = -\frac{1}{4}\hat{x}_1^2 - \frac{1}{4}\hat{x}_2^2 + \frac{1}{2}\hat{x}_3^2 + \frac{1}{2}\hat{x}_3 + \frac{1}{6},$$

$$\hat{\psi}_6 = -\frac{1}{4}\hat{x}_1^2 - \frac{1}{4}\hat{x}_2^2 + \frac{1}{2}\hat{x}_3^2 - \frac{1}{2}\hat{x}_3 + \frac{1}{6}.$$

对立方体 Ω 作网格剖分：

$$C_h = \{K_{i_1,i_2,i_3}\}, \qquad 1 \le i_k \le m_k, \quad k = 1,2,3, \tag{8}$$

$$K_{i_1,i_2,i_3} = [x^{i_1-1}, x^{i_1}] \times [x^{i_2-1}, x^{i_2}] \times [x^{i_3-1}, x^{i_3}], \tag{9}$$

$$0 = x_k^0 < x_k^1 < \dots < x_k^{m_k} = L_k, \qquad k = 1,2,3. \tag{10}$$

令 $h_k = \max\limits_{1\le i\le m_k}(x_k^i - x_k^{i-1})$, $h = \max\limits_{1\le k\le 3}(h_k)$.

设单元 K 的中心坐标为 (a_1, a_2, a_3), 三边棱长分别为 $2r_1, 2r_2, 2r_3$. 通过仿射变换

$$\begin{cases} T_K: \quad \hat{K} \longrightarrow K, \\ x_k = r_k\hat{x}_k + a_k, \qquad k = 1,2,3 \end{cases} \tag{11}$$

可以建立标准的仿射有限元族 $(K, P_K, \sum_K^p)$ 和 $(K, P_K, \sum_K^a)$.

我们用 N_h 表示 $K \in C_h$ 的表面的中点. 在剖分 C_h 上, 有限元 NF_1 和 NF_2 的空间形式为

$$V_h^p = \left\{v_h \in L^2(\Omega) : v_h|_K \in P_k, \forall K \in C_h, v_h\text{在}N_h\text{上连续}\right\}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} V_h^a = \Big\{ & v_h \in L^2(\Omega) : v_h|_K \in P_k, \textstyle\int_F v_h|_{K'}\,ds = \int_F v_h|_{K''}\,ds, \\ & \forall F = \partial K' \cap \partial K'' \ne \phi, K', K'' \in C_h \Big\}. \end{aligned} \tag{13}$$

另外, 对 Dirichlet 边界, 相应的有限元空间为

$$V_{0h}^p = \{v_h \in V_h^p : v_h = 0, \text{在}N_h \cap \partial\Omega \text{ 上}\}, \tag{14}$$

$$V_{0h}^a = \left\{v_h \in V_h^a : \int_F v_h\,ds = 0, \forall F = \partial K \cap \partial\Omega \ne \phi, K \in C_h\right\}. \tag{15}$$

明显地, 每个有限元空间 V_h^p, V_h^a, V_{0h}^p, V_{0h}^a 是 $L^2(\Omega)$ 的子空间, 但都不是 $H^1(\Omega)$ 的子空间, 所以对于二阶问题来说是非协调元.

我们定义半范数及范数

$$|v_h|_{k,h} = \Big(\sum_{K\in C_h} |v_h|_{k,K}^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{16}$$

$$\| v_h \|_{k,h} = \Big(\sum_{K\in C_h} \| v_h \|_{k,K}^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

容易验证, 半范数 $|\cdot|_{k,h}$ 也是空间 V_{0h}^p, V_{0h}^a 上的范数.

为简便我们用 V_h 表示 V_h^p 或者 V_h^a, 用 V_{0h} 表示 V_{0h}^p 或者 V_{0h}^a. 象通常一样，定义离散双线性形式

$$a_h(u_h,v_h)=\sum_{K\in C_h}\int_K\Big(\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\frac{\partial v_h}{\partial x_j}+cu_hv_h\Big)\,dx, \tag{18}$$

$a_h(\cdot,\cdot)$ 仍然是 V_h 上连续对称双线性形式，并且在 V_h 上是一致椭圆的，即存在与 h 无关的常数 $\alpha>0$, 使得

$$a_h(v_h,v_h)\ge\alpha\,\|\,v_h\,\|_{1,h}^2,\qquad \forall v_h\in V_{0h}. \tag{19}$$

因此，由 Lax-Milgram 引理，存在唯一的解 $u_h\in V_{0h}$, 使得

$$a_h(u_h,v_h)=f(v_h),\qquad \forall v_h\in V_{0h}. \tag{20}$$

3. 收敛性分析

由 Strang 引理 [5], 对于问题 (1) 的解 u 和问题 (20) 的解 u_h, 有估计式

$$\|\,u-u_h\,\|_{1,h}\le C\Big(\inf_{v_h\in V_{0h}}\|\,u-v_h\,\|_{1,h}+\sup_{w_h\in V_{0h}}\frac{|a(u,w_h)-f(w_h)|}{\|\,w_h\,\|_{1,h}}\Big). \tag{21}$$

上式右边第一项为逼近误差 E_a. 由于有限元空间 V_{0h} 包含了完备的一次多项式空间 (见 (2) 式), 由插值理论可知 [5]

$$|E_a|\ \le\ Ch\,|u|_2. \tag{22}$$

对于第二项，由 [3] 可知，它趋于零的充分必要条件是有限元空间 V_{0h} 通过广义分片检验

$$\lim_{h\to0}T(\varphi,v_h)\ =\ \lim_{h\to0}\sum_{K\in C_h}\int_{\partial K}v_h\varphi n_{K,i}\,ds\ =\ 0,\quad i=1,2,3 \tag{23}$$

对一切有界的 $v_h\in V_{0h}$, $n_{K,i}$ 表示单元 K 的边界上的单位外法向的第 i 个分量， $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$.

由单元 NF_2 的构造 (2) 及 (13) 式，此元的型函数在越过单元边界时保持积分意义下的连续性，因此通过强 F 检验条件 [4]:

$$\int_F[v_h]\,ds\ =\ 0,\qquad \forall F=\partial K'\cap\partial K''\ne\phi,\ \ K',K''\in C_h, \tag{24}$$

$[v_h]$ 表示 v_h 在 F 两侧的跃度 $(v_h|_{K'}-v_h|_{K''})$.

定理 3.1. 非协调元 NF_2 通过强 F 检验条件，因此它也通过广义分片检验，可以用它来求解一般的二阶椭圆边值问题.

下面我们分析 NF_1 元的收敛性.

设 $w\in C(F)$, $F\subset\partial K$, $K\in C_h$, 定义泛函 $T_F(w)=w(M_F)$, M_F 表示 F 的中点. 由 NF_1 元的定义，我们有

$$T(\varphi,v_h)\ =\ \sum_{K\in C_h}\int_{\partial K}v_h\varphi n_i\,ds\ =\ \sum_{K\in C_h}\int_{\partial K}(v_h-T_F(v_h))\varphi n_i\,ds. \tag{25}$$

对于单元 $K=[a_1-r_1,a_1+r_1]\times[a_2-r_2,a_2+r_2]\times[a_3-r_3,a_3+r_3]$，考虑它的两个相对表面 $F_{\pm}=(a_1\pm r_1)\times[a_2-r_2,a_2+r_2]\times[a_3-r_3,a_3+r_3]$. 明显地，外法向 $n_1=\pm1$, $n_2=n_2=0$. 设

$$\hat{v}_h = \sum_{i=1}^{6}\alpha_i\hat{\varphi}_i, \tag{26}$$

α_i 是待定系数. 由 $v_h|_K=\hat{v}_h\cdot T_K^{-1}$ 可得

$$v_h = \sum_{i=1}^{6}\alpha_i\varphi_i, \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= -\frac{1}{6}\Big(\frac{x_2-a_2}{r_2}\Big)^2-\frac{1}{6}\Big(\frac{x_3-a_3}{r_3}\Big)^2+\frac{1}{3}\Big(\frac{x_1-a_1}{r_1}\Big)^2+\frac{1}{2}\frac{x_1-a_1}{r_1}+\frac{1}{6},\\
\varphi_2 &= -\frac{1}{6}\Big(\frac{x_2-a_2}{r_2}\Big)^2-\frac{1}{6}\Big(\frac{x_3-a_3}{r_3}\Big)^2+\frac{1}{3}\Big(\frac{x_1-a_1}{r_1}\Big)^2-\frac{1}{2}\frac{x_1-a_1}{r_1}+\frac{1}{6},\\
\varphi_3 &= -\frac{1}{6}\Big(\frac{x_1-a_1}{r_1}\Big)^2-\frac{1}{6}\Big(\frac{x_3-a_3}{r_3}\Big)^2+\frac{1}{3}\Big(\frac{x_2-a_2}{r_2}\Big)^2+\frac{1}{2}\frac{x_2-a_2}{r_2}+\frac{1}{6},\\
\varphi_4 &= -\frac{1}{6}\Big(\frac{x_1-a_1}{r_1}\Big)^2-\frac{1}{6}\Big(\frac{x_3-a_3}{r_3}\Big)^2+\frac{1}{3}\Big(\frac{x_2-a_2}{r_2}\Big)^2-\frac{1}{2}\frac{x_2-a_2}{r_2}+\frac{1}{6},\\
\varphi_5 &= -\frac{1}{6}\Big(\frac{x_1-a_1}{r_1}\Big)^2-\frac{1}{6}\Big(\frac{x_2-a_2}{r_2}\Big)^2+\frac{1}{3}\Big(\frac{x_3-a_3}{r_3}\Big)^2+\frac{1}{2}\frac{x_3-a_3}{r_3}+\frac{1}{6},\\
\varphi_6 &= -\frac{1}{6}\Big(\frac{x_1-a_1}{r_1}\Big)^2-\frac{1}{6}\Big(\frac{x_2-a_2}{r_2}\Big)^2+\frac{1}{3}\Big(\frac{x_3-a_3}{r_3}\Big)^2-\frac{1}{2}\frac{x_3-a_3}{r_3}+\frac{1}{6}.
\end{aligned} \tag{28}$$

直接计算可知

$$\varphi_i(a_1-r_1,x_2,x_3) = \varphi_i(a_1+r_1,x_2,x_3), \qquad i=3,4,5,6. \tag{29}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=3}^{6}\alpha_i\varphi_i(a_1-r_1,x_2,x_3)-\sum_{i=3}^{6}\alpha_i\varphi_i(a_1-r_1,a_2,a_3)\\
=&\sum_{i=3}^{6}\alpha_i\varphi_i(a_1+r_1,x_2,x_3)-\sum_{i=3}^{6}\alpha_i\varphi_i(a_1+r_1,a_2,a_3).
\end{aligned} \tag{30}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(a_1-r_1,x_2,x_3)-(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(a_1-r_1,a_2,a_3)\\
=&(\alpha_1+\alpha_2)\Big(-\frac{1}{6}\Big(\frac{x_2-a_2}{r_2}\Big)^2-\frac{1}{6}\Big(\frac{x_3-a_3}{r_3}\Big)^2\Big),
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(a_1+r_1,x_2,x_3)-(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(a_1+r_1,a_2,a_3)\\
=&(\alpha_1+\alpha_2)\Big(-\frac{1}{6}\Big(\frac{x_2-a_2}{r_2}\Big)^2-\frac{1}{6}\Big(\frac{x_3-a_3}{r_3}\Big)^2\Big).
\end{aligned} \tag{32}$$

由 (30),(31) 以及 (32) 式，得

$$v_h(a_1-r_1,x_2,x_3)-v_h(a_1-r_1,a_2,a_3) = v_h(a_1+r_1,x_2,x_3)-v_h(a_1+r_1,a_2,a_3),$$

即

$$(v_h|_{F+} - T_{F+}(v_h)) = (v_h|_{F-} - T_{F-}(v_h)). \tag{33}$$

记 $P_0^K\varphi = \frac{1}{|K|}\int_K dx, |K| = \int_K dx$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{F+}\varphi(v_h - T_{F+}(v_h))n_+ \, ds + \int_{F-}\varphi(v_h - T_{F-}(v_h))n_- \, ds\right| \\
=&\left|\int_{F+}(\varphi - P_0^K\varphi)(v_h - T_{F+}(v_h))n_+ \, ds + \int_{F-}(\varphi - P_0^K\varphi)(v_h - T_{F-}(v_h))n_- \, ds\right| \\
\leq&\left|\int_{F+}(\varphi - P_0^K\varphi)(v_h - T_{F+}(v_h))n_+ \, ds\right| + \left|\int_{F-}(\varphi - P_0^K\varphi)(v_h - T_{F-}(v_h))n_- \, ds\right| \\
\leq& Ch\,|\varphi|_{1,K}|v_k|_{1,K}.
\end{aligned} \tag{34}$$

重新组合 (25) 式中的各项, 就可获得估计

$$|T(\varphi, v_h)| \leq Ch|\varphi|_{1,\Omega}|v_h|_{1,h}, \tag{35}$$

所以, 对一切有界的 $v_h \in V_{0h}$, 成立

$$\lim_{h\to 0} T(\varphi, v_h) = 0. \tag{36}$$

定理 3.2. 非协调元 NF_1 通过广义分片检验, 可以用它来求解一般的二阶椭圆边值问题.

注. 对于 NF_2 元, 由它的构造就可知其通过强 F 检验条件, 因而是收敛的. 而对于 NF_1 元, F 检验不适用, 又由于它不含有协调部分, 因而不能对它进行协调和非协调部分分解而应用 E-M 检验条件, 但是我们充分利用了它的插值条件 (12) 式而得到 (25) 式, 进而利用立方体剖分的特殊结构而得到 (33) 式, 这样, 我们证明了它通过广义分片检验.

参 考 文 献

[1] R.Rannacher and S.Turek, Simple nonconforming quadrilateral Stokes element, *Numer. Meths. for PDEs*, 8(1992), 97–111.

[2] P.Kloucek, B.Li, M.Luskin, Analysis of a class of nonconforming finite elements for crystalhline microstructures, *Math. Comp.*, 67(1996), 1111–1135.

[3] F.Stummel, The generalized patch test, *SIAM, J. Numer. Anal.*, 16(1979), 449–471.

[4] Z.C.Shi, The F-E-M-Test for convergence of nonconforming finite elements, *Math. Comp.*, 49(1987), 391–405.

[5] P.G.Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, 1978.