第一章　弹性力学的基本理论

应力应变概念〔1，2〕

图1-1表示一个在平衡力系作用下的固体。在确定它的反力和内力时，不仅需要满足静止平衡条件，也要满足连续条件。连续条件要通过结构变形来满足，并由支撑方式及结构部件的联结形式来确定。当我们把固体切为两部分，每一部分都将会处于平衡状态。这意味着内力作用于横截面上的每个面积单元上。如果作用在面积dA上的内力是dF，dA趋于零时dF/dA比值的极限称为单元应力，即

$$S_N = \lim \frac{dF}{dA} \tag{1-1}$$

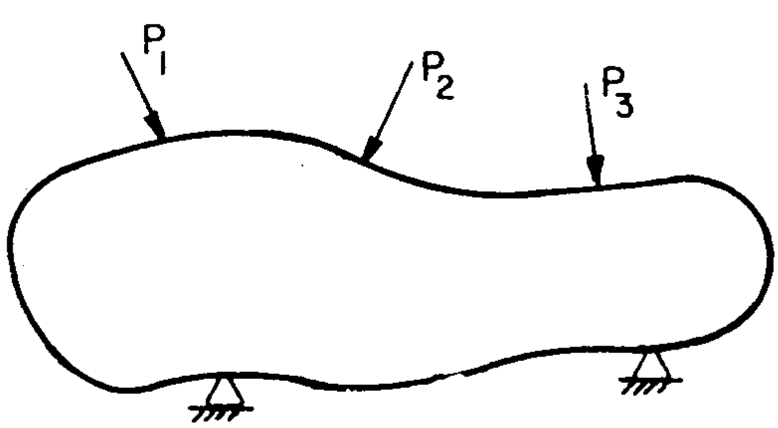

图1-1　受力作用的固体

方程1-1中的Sn为向量，称为总应力。它可以分解成为垂直于dA面的和在dA面中的分量：正应力σ和剪应力为τ。显然，在面积单元dA上，τ能再次分解成为任意两方向的两个分量。Sn的下标N表明了与总应力作用的平面相垂直的力。图1-2中表示从图1-1中的物体切下的任意体，如果作用面正交x轴(法向平行于x轴)，则

$$S_x = \sigma_x i + \tau_{xy} j + \tau_{xz} k \tag{1-2}$$

这里，i，j和k分别为平行于x，y及z轴的单位向量。同样，我们可表示出经过A点并正交于y或z轴的横断面且获得下面的方程：

$$\left.\begin{aligned} S_y &= \tau_{yx} i + \sigma_y j + \tau_{yz} k \\ S_z &= \tau_{zx} i + \tau_{zy} j + \sigma_z k \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

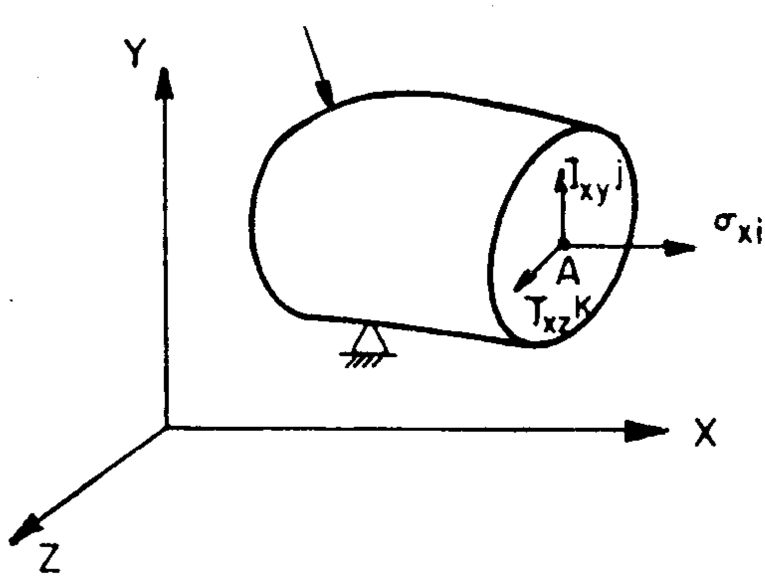

图1-2 从一固体中切取的任意体

方程1-2和1-3表明，一单元体有九个应力分量，它们是：

$$\begin{matrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{matrix}$$

注意，$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，$\tau_{yz}=\tau_{zy}$，并且$\tau_{zx}=\tau_{xz}$，所以只有六个单独的应力分量。立方体单元的应力分量示于图1-3中。

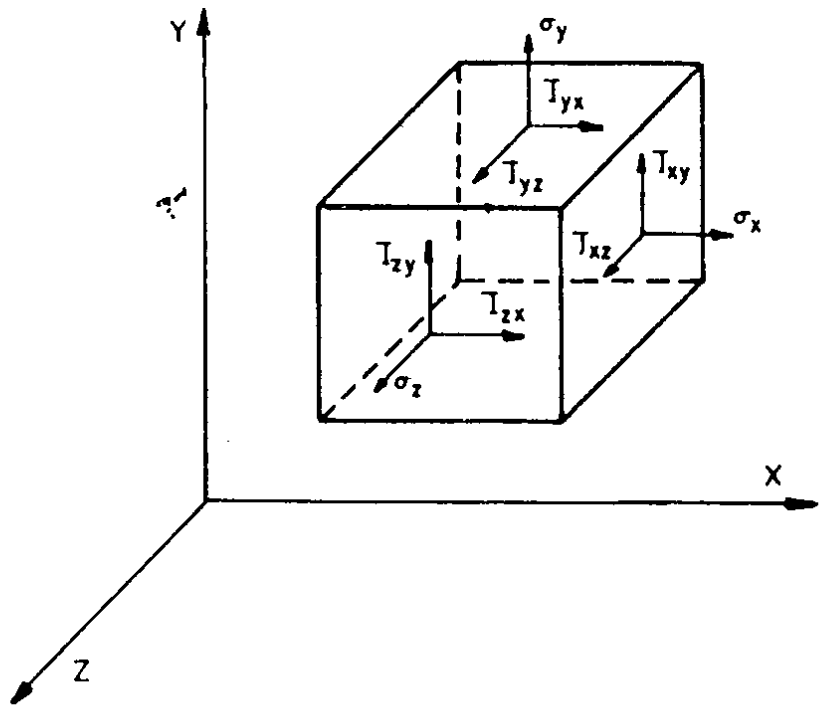

图1-3 单元体应力

当固体受应力作用时，它产生了某些变形。无论是所有点的位移或每一体积单元的尺寸和形状改变都能用来描述这些变形。依照形状，体积单元的变形可以不同的方式描述。描述变形时，可指出变形前后三个轴的方向性并做它们的变形前后长度比较。对于每一个轴，长度增量除以起始长度所得的商称为它的张应变。如果这个单元体是小立方体，它的变形可以由三个边的张应变ϵ和起始正常角的变化，以及剪应变γ来表述。一点处的应变分量ϵ和γ定义了应变模式和类似应力相应参数的应变张量。

在图1-4中设AB和A′B′分别代表物体内的变形前和变形后的两个点。如果AB间的距离为Δs，而Δx、Δy和Δz是Δs在x、y与z轴上的投影，则位移向量U_A和U_B能表达如下：

$$\left.\begin{aligned} U_A &= ui + vj + wk \\ U_B &= u'i + v'j + w'k \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}4)$$

式中，u、v和w与u′、v′和w′分别为U_A和U_B在x、y与z轴上的投影。通过应用泰勒级数并且略去Δx，Δy及Δz的高次幂，我们可得到

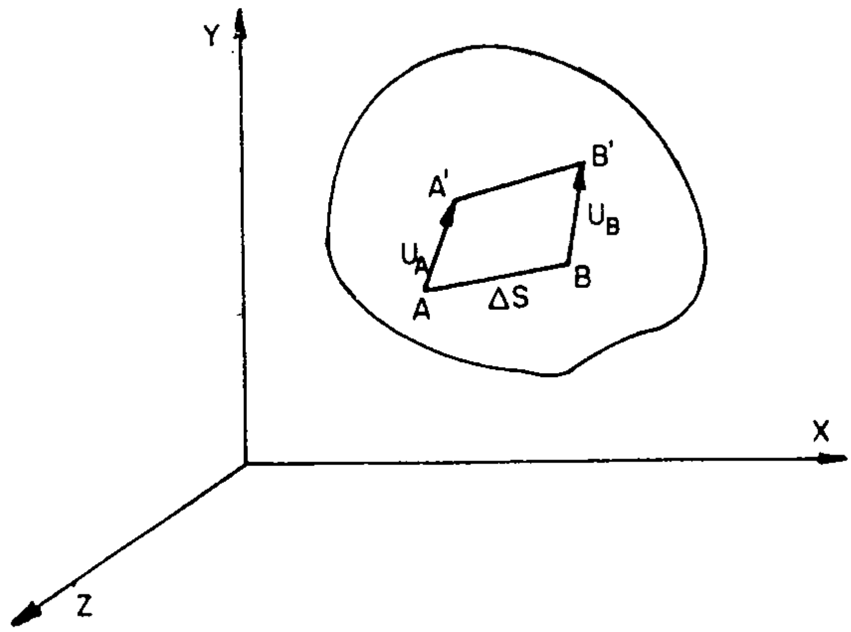

图1-4　变形体的应变

$$U_B - U_A = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_A \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_A \Delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_A \Delta z \tag{1-5}$$

方程1-5的左边是B相对于A的位移，合并方程1-4和1-5我们获得下面的表达式。

$$\begin{aligned}(u' - u)i + (v - v')j + (w' - w)k \\ = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z\right) i + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\Delta z\right) j \\ + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z\right) k\end{aligned}$$

设 $\Delta u = u' - u$, $\Delta v = v' - v$, and $\Delta w = w' - w$, 则

$$\left.\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\Delta z \\ \Delta w &= \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z\end{aligned}\right] \tag{1-6}$$

如果$\overline{AB}$平行于x轴，则$\Delta s = \Delta x$，$\Delta y = \Delta z = 0$，方程1-6成为

$$\left.\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\\ \Delta w &= \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}6a)$$

$\overline{A'B'}$在x轴的投影可表示为

$$\Delta x + \Delta u = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x$$

且

$\overline{A'B'}$在y和z轴的投影分别由$\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x$和$\dfrac{\partial w}{\partial x}\Delta x$表达。变形后$\overline{AB}$的长度为$\overline{A'B'}$，则

$$\overline{A'B'} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \cdot \Delta x \qquad (1\text{-}7)$$

当变形很小时，我们可忽略$\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2$和$\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2$：

$$\overline{A'B'} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x$$

点A在x方向的应变则表达为

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{A'B'} - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (1\text{-}8a)$$

同样，点A在y和z方向的应变表达为

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1\text{-}8b)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (1\text{-}8c)$$

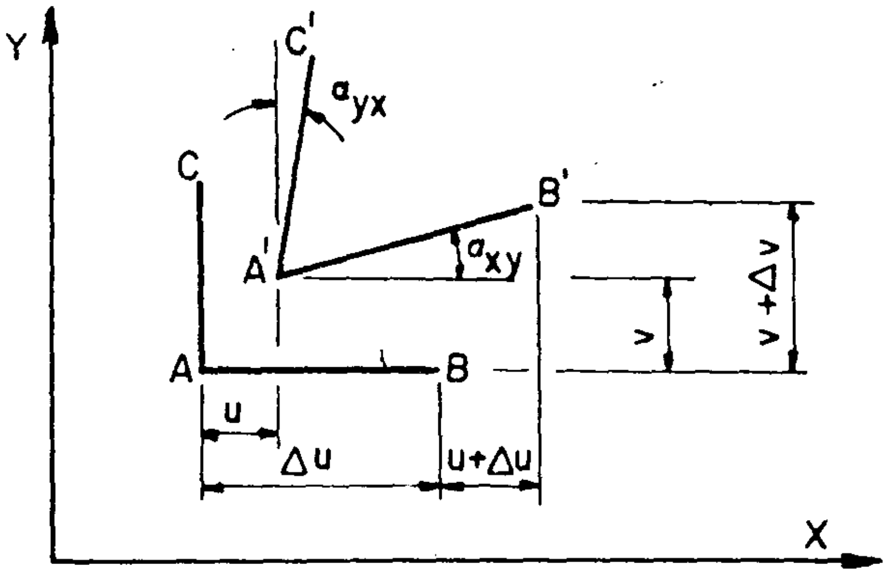

图1-5　应变与变形

在图1-5中，变形前，AB和AC平行于x和y轴，变形后角∠CAB变为∠C′A′B′。$\gamma_{xy}=\alpha_{xy}+\alpha_{yx}$的角度改变称为剪应变。由图1-5所示

$$\alpha_{xy}=\tan\alpha_{xy}\ \text{且}\ \alpha_{xy}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1+\frac{\partial u}{\partial x}}$$

变形微小时，$\frac{\partial u}{\partial x}=\epsilon_x$非常小，我们可以忽略这项，则分母项为

$\alpha_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}$。同样，我们得到 $\alpha_{yx}=\frac{\partial u}{\partial y}$，且剪应变所表达为

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1-9a}$$

相同的，我们可以得到

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z} \tag{1-9b}$$

$$\gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1-9c}$$

方程1-8把应变与位移联系起来，称为动态方程式。这里讨论的是小位移应变，我们假设所有的位移微商变量与整体相比都很小，且方程1-8和1-9是这些微商变量和应变的线性关系式。

应变协调〔1，2，3〕

变形体中点的位移可由u、v、及w度量，且通过ϵ_x、ϵ_y、ϵ_z、γ_{xy}、γ_{yz}和γ_{zx}可确定变形物体的应变。这六个应变分量可由三向位移导示，这就意味着应变绝不能被随意规定为坐标函数，它们与若干相应方程所关联。应变必须是协调的，这意味着变形单元必定共同配合。

由方程1-8a及1-8b我们得到

$$\frac{\partial^2\epsilon_x}{\partial y^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial x}\qquad \frac{\partial^2\epsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}$$

把两方程相加，我们得到

$$\frac{\partial^2\epsilon_x}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2\epsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$

和下面的协调方程

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\epsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\epsilon_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}=0\\
&\frac{\partial^2\epsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\epsilon_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}=0\\
&\frac{\partial^2\epsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\epsilon_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}=0
\end{aligned}\right]\tag{1-10}$$

由方程1-9我们得到如下方程

$$\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}=\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\tag{1-11a}$$

$$\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x}\tag{1-11b}$$

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{1-11c}$$

如果我们把方程1-11b加到1-11c上，且减去1-11a，然后对z求偏导，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)=2\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y}$$

以这种方法我们得到第二组协调方程

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y}\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z}\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x}
\end{aligned}\right] \tag{1-12}$$

应力与平衡〔1，2〕

在平衡力系作用下的物体内，各点的应力各异，应力为座标函数。研究一个体积单元，dx、dy、dz示于图1-6。我们可分出三个前表面和三个后表面，每个面上的应力是不同的。为清楚起见，仅显出平行于x轴的各应力分量。X是物体未变形时，单位体积上所作用力的分量。如果我们取$\Sigma Fx=0$，并简化它，我们可得到

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+X=0 \tag{1-13a}$$

同样地，我们取$\Sigma Fy=0$和$\Sigma Fz=0$可得

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+Y=0 \tag{1-13b}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0 \tag{1-13c}$$

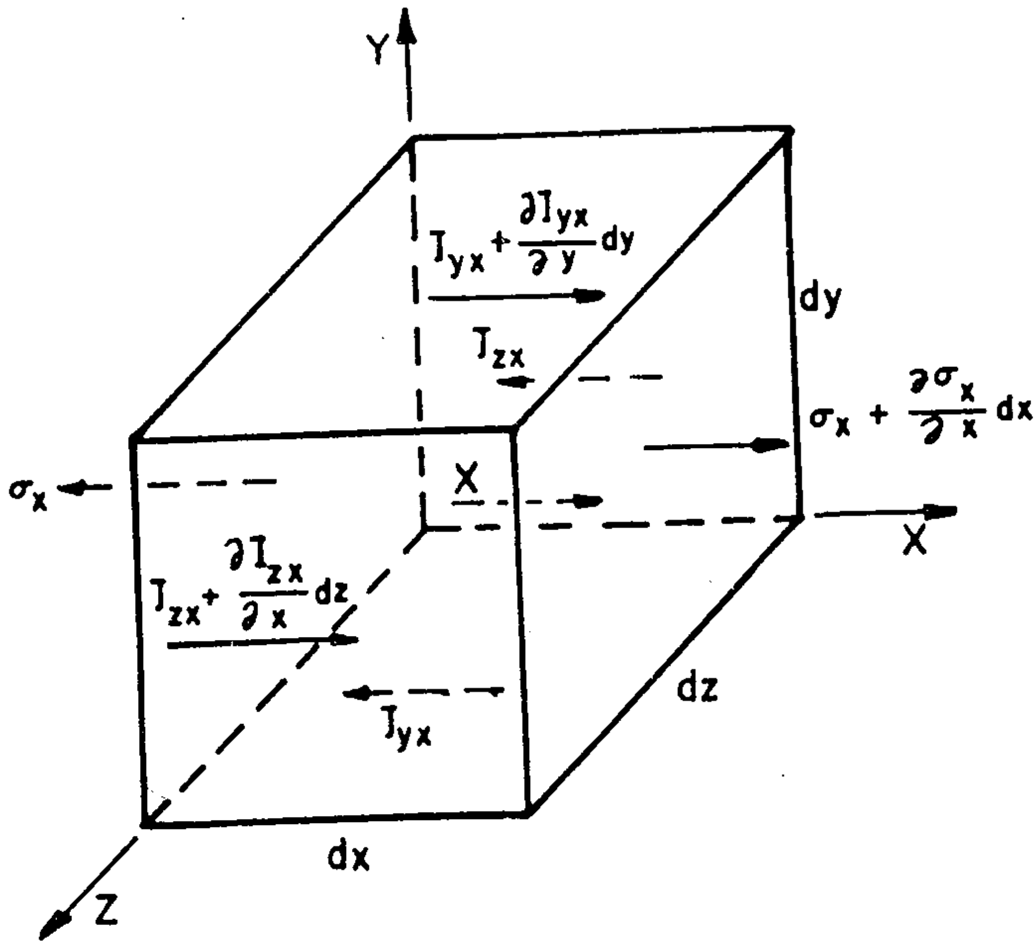

图1-6　应力平衡

如果我们取$M_x=0$，$M_y=0$及$M_z=0$，我们可得

$$\left.\begin{aligned}\tau_{yz}&=\tau_{zy}\\\tau_{zx}&=\tau_{xz}\\\tau_{xy}&=\tau_{yx}\end{aligned}\right\}\tag{1-14}$$

应力、应变及虎克定律〔1，2，3〕

以上应力应变的讨论涉及了动态和静态。动态方程式1-8和1-9及平衡条件的方程式1-13，总共才九个方程，这对于十五个未知的位移、应变和应力是不够的。我们需要一组由应力应变关系式所组成的方程。我们假设固体材料具有如下的性质：

1．均衡

2．各向同性

虎克定律表达式

$$\left.\begin{aligned}
\epsilon_x E &= \sigma_x - \nu\,(\sigma_y + \sigma_z) \\
\epsilon_y E &= \sigma_y - \nu\,(\sigma_z + \sigma_x) \\
\epsilon_z E &= \sigma_z - \nu\,(\sigma_x + \sigma_y) \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\
\gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}
\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}15)$$

这里 $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

E = 杨氏模量

ν = 泊松比

E和ν必须通过试验确立，求解方程 1-15，应力可简单的由应变表达，得

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda\,(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2\,G\epsilon_x \\
\sigma_y &= \lambda\,(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2\,G\epsilon_y \\
\sigma_z &= \lambda\,(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2\,G\epsilon_z \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
\tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\
\tau_{zx} &= G\gamma_{zx}
\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}16)$$

这里，$\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)\,(1-2\nu)}$

参考资料

1. Marguerre, K., *Handbook of Engineering Mechanics*, Chapter 33, McGraw-Hill Book Company, 1962.
2. Lieu, F. W., Lin, C. S., and Chau, M. L., *Advanced Strength of Materials*, Higher Education Publishing Co., China, 1985.
3. Massonnet C. H., *Handbook of Engineering Mechanics*, Chapter 37, McGraw-Hill Book Co., 1962.

第二章　薄板弯曲

前言〔2、3、4〕

在直梁的弯曲中，存在一个中性轴，弯矩是刚度乘以梁的中性线的曲率(译注：1/9)。板是梁的两维变换，并且板的弯曲有类似的方程。处于板的厚度一半的面称为中间平面，通常设为板弯曲前的xy平面。在板挠曲时，xy面上的质点发生微小位移，并且这个轻度弯曲的面是板的中间平面。在研究板的弯曲时我们假设：

1. 板的中间面为板的中性面。
2. 板的挠度w与它的厚度t相比很小。
3. 受弯板的中间面是可展面，同时弯曲时不产生延伸。

我们假设板的材料是弹性的，作用在它边缘上的所有的力沿厚度方向均匀分布。在板的两个面上，应力σ_z、τ_{xz}、τ_{yz}趋于零，因此可完全忽略它们在内部的存在，在薄板的弯曲中，我们概括为：

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

而且在xy平面上的另三种应力σ_x、σ_y、$\tau_{xy}=\tau_{yx}$与z无关。这种假设所表述的应力体系称为板应力。剪应变γ_{zx}和γ_{zy}等于零，且我们不去理会ϵ_z。

板应力的理论是一种近似理论，当作为x和y的函数的应力变

化缓慢时，对于薄板，它会得出满意的结果。轻度弯曲的表面以 $w=f(x,y)$来表述，它是两个变量的函数，它的导数 $\partial w/\partial x$ 和 $\partial w/\partial y$分别为在x和y方向产生的弯曲面的斜率。如果挠曲很小，$\partial^2 w/\partial x^2$与$\partial^2 w/\partial y^2$分别为变形挠曲面与平行于x轴的和平行于y轴的垂直面相交所得的平面曲线的曲率。

轻度受弯时板的斜度和曲率〔1、2、4〕

在图2-1中，xoz平面正交于y轴 它截过轻度弯曲的板，而曲线OP′R′是它与板的中间平面的交会线。变形前，PQ垂直于板的中间平面，根据前言中的第三个假设，我们知道变形后的P′Q′垂直于板中间表面。因轻度的挠曲，P到P′的总位移为挠度w，而它在x和y方向的位移分量可忽略不计。由于PQ＝P′Q′＝z，Q在x方向的位移可表达为

$$u=-z\frac{\partial w}{\partial x}$$

同样地，Q在y方向的位移为

$$v=-z\frac{\partial w}{\partial y}$$

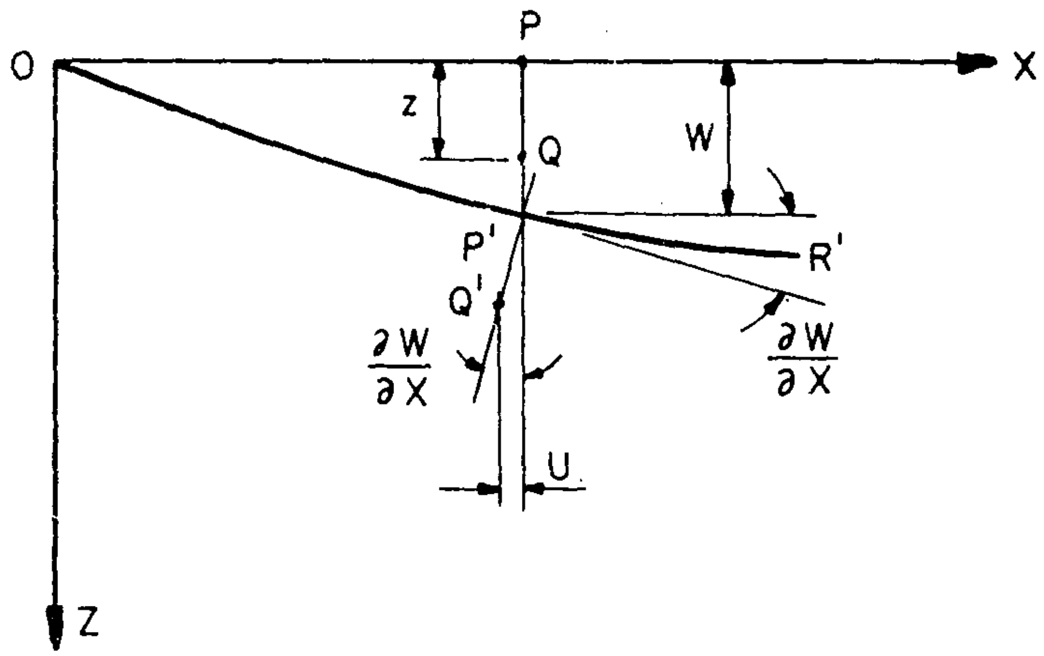

图2-1 板的中间平面

知道距中间平面为z距离的一点Q的位移表达式，我们可得到这点的应变方程，由方程1-8和1-9我们写出

$$\left.\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\right\} \tag{2-1}$$

设P_x和P_y为x和y方向的曲率半径，我们可写出

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\rho_x} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ \frac{1}{\rho_y} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\end{aligned}\right\} \tag{2-2}$$

负值符号意味着当x和y增加时，斜率$\partial w/\partial x$、$\partial w/\partial y$减小。换言之，如凸面向下，曲率被当正值时，而在方程2-1中的负值符号意味挠曲变位是凸面向下。量值

$$\frac{1}{\rho_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2-3}$$

称为相对于x轴和y轴的面扭曲，它是$\partial w/\partial x$在y轴方向的变化率。

由于我们在轻度变形薄板的弯曲里忽略了σ_z、γ_{zx}及γ_{zy}、虎克定律可写为

$$\left.\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)\\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)\\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{2-4}$$

由方程2-1和2-4我们得

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\
\sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\
\tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}
\end{aligned}\right] \quad (2\text{-}5a)$$

方程2-5a可另写成

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{\rho_x}+\nu\frac{1}{\rho_y}\right)\\
\sigma_y &= \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{\rho_y}+\nu\frac{1}{\rho_x}\right)\\
\tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{1}{\rho_{xy}}
\end{aligned}\right] \quad (2\text{-}5b)$$

弯矩和曲率〔1、2、4〕

梁受弯时，假设梁的横截面在弯曲时仍为平面，而且它的旋转仅相对于它们的中性轴产生，它总是正交于弹性的弯曲。这样在两个相垂直方向的弯曲的组合为矩形板的纯弯曲。图 2-2表示出矩形板的中间平面，这个面与xy平面相叠，并且弯矩沿板边缘分布；我们把作用于平行y轴的板边缘上的每单位长度的弯矩标志为Mx；并把作用于平行X轴的板边缘上的每单位长度的弯矩标志为My，我们认为，在板的上表面受压而下表面受张拉时的弯矩为正值。

图2-3表示一矩形薄板，截面ABCD垂直于x轴，距中间表面为z的一点的应力为σ_x、τ_{xy}和τ_{xz}，这点的内力为

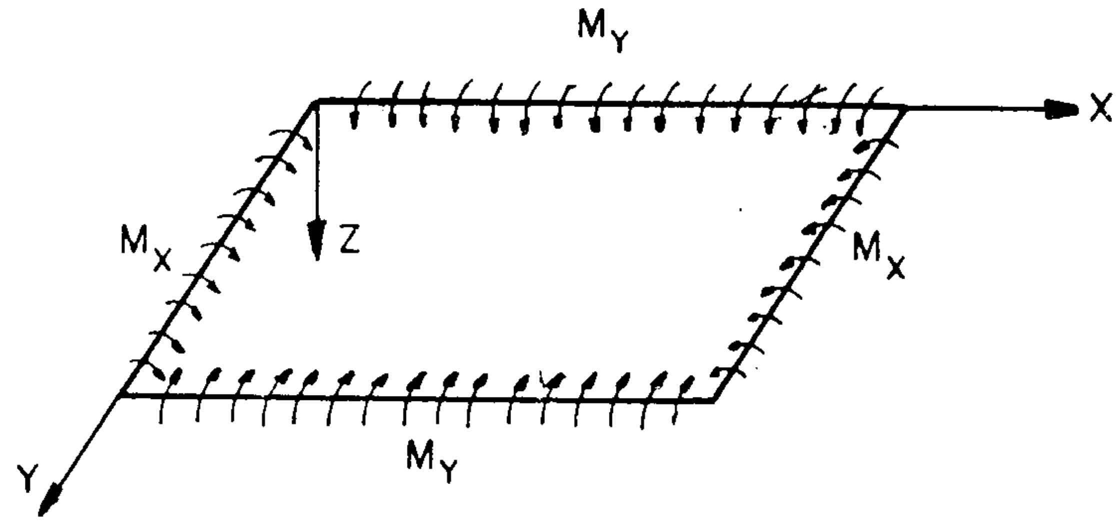

图2-2 板的纯弯曲

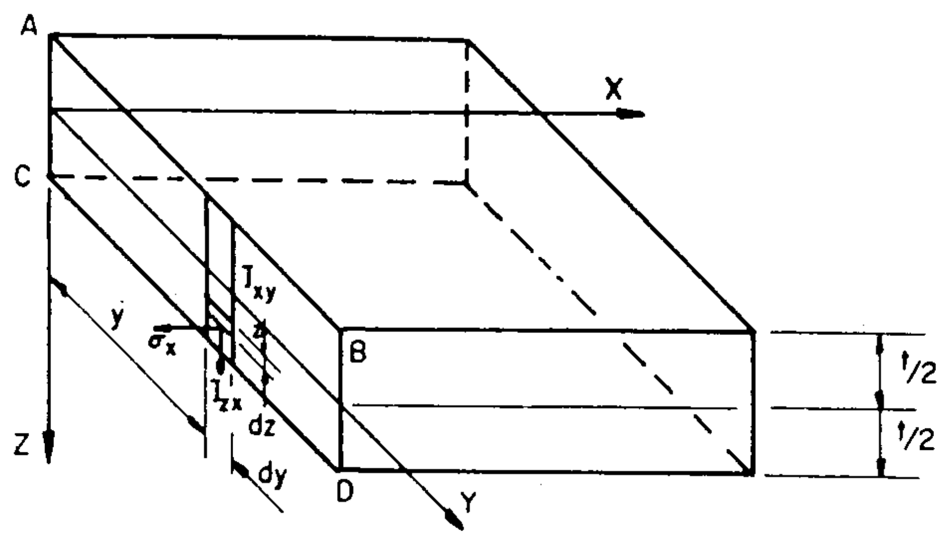

图2-3 矩形薄板

$$
\left.
\begin{aligned}
M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} z\,\sigma_x\,dz \\
M_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} z\,\tau_{xy}\,dz \\
Q_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz}\,dz
\end{aligned}
\right\} \qquad (2\text{-}6)
$$

同样，从垂直于y轴的横截面我们得

$$\left.\begin{aligned} M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} z\,\sigma_y\,dz \\ M_{yx} &= \int_{-t/2}^{t/2} z\,\tau_{yx}\,dz \\ Q_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz}\,dz \end{aligned}\right] \qquad (2\text{-}7)$$

由于存在$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，我们可写$M_{xy}=M_{yx}$引入符号

$$D=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

再用方程2-5a与b取代σ_x、σ_y与τ_{xy}，我们得

$$\left.\begin{aligned} M_x &= D\left(\frac{1}{\rho_x}+\nu\frac{1}{\rho_y}\right)=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y &= D\left(\frac{1}{\rho_y}+\nu\frac{1}{\rho_x}\right)=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} &= -M_{yx}=D(1-\nu)\frac{1}{\rho_{xy}}=D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{aligned}\right] \qquad (2\text{-}8)$$

由方程2-5a与b及2-8，我们得

$$\sigma_x=\frac{12M_x z}{t^3} \qquad \sigma_y=\frac{12M_y z}{t^3} \qquad \tau_{xy}=\frac{12M_{xy} z}{t^3}$$

最大应力是在z＝t/2处

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x)_{max} &= \frac{6M_x}{t^2} \\ (\sigma_y)_{max} &= \frac{6M_y}{t^2} \\ (\tau_{xy})_{max} &= \frac{6M_{xy}}{t^2} \end{aligned}\right] \qquad (2\text{-}8a)$$