线性规划与几何规划

数学系优化教研室编

第一册

大连工学院

前　　言

本讲义的目的是为各专业的教师、学生以及工程科学的研究人员和工程技术员，提供一本线性规划，凸规划与几何规划的基本教材。我们力求将线性规划、凸规划与几何规划中所出现的基本概念收集在讲义中并作适当的统一处理。本讲义的重点在于线性规划与几何规划的叙述上，但是为了避免读者在阅读本讲义时，由于预备知识的不足而去查阅很多书，所以我们用了相当大的篇幅来叙述这些预备知识。已具有预备知识的读者可以直接阅读线性规划与几何规划的具体内容。

任何一本书都不可能完全适用于各种类型的读者，本讲义更是如此，主要是适于初学者的入门学习。对于想学习基本理论的读者来说本讲义提供了进一步学习和研研究的基础，对于着重于实用的读者来说，本讲义提供了基本算法与程序，对于这种读者，在阅读本讲义时，勿须将每一定理或命题的证明细节都弄明白，只要知道大意或直观解释以及结论就足够了。

本讲义内容共分四部分。第一部分是叙述基本知识；第二部分是叙述线性规划；第三部分是叙述最优性理论；第四部分是叙述几何规划。

本讲义主要取材于下述几个蓝本。

〔1〕Aoki. M., “Introduction to Optimization Techniques” (1971)

〔2〕Brogan. W. L., “Modern Control Theory” (1974)

〔3〕Timothy. L. K., Bona. B. E., “State Space Aanalysis: an introduction” (1968)

〔4〕Bazaraa. M. S., Shetty. C. M., “Nonlinear Programming—Theory and Algorithms” (1979)

〔5〕Luenberger. D. G., “Introduction to Linear and Nonlinear Programming” (1973)

〔6〕Gass. “Linear programming” (1964)

〔7〕Collatz. L., Wetterling. W., “Optimization Problems” (1975)

〔8〕Gillett. B., “Introduction to Operations Research” (1976)

〔9〕Duffin. R. J., Peterso. E. L., “Geometric Programming—Theory and application” (1967)

由于我们的水平很低，肯定有很多错误和不当之处，望读者批评指正。

编　者

符　号　表

$S=\{x \mid p(x)\}$	满足性质 $p(x)$ 的所有元素 x 的集合 S
$S=\{x^1, x^2, \cdots\cdots, x^k\}$	元素为 $x^1, x^2, \cdots, x^k$ 的集合 S
$x \in S$	x 是 S 的一个元素，或 x 属于 S
$x \notin S$	x 不是 S 的元素，或 x 不属于 S
$S_1 \subset S_2$	S_1 是 S_2 的子集
$S_1 \cup S_2$	S_1 和 S_2 的并集
$S_1 \cap S_2$	S_1 和 S_2 的交集
E_n	n 维欧氏空间
R	实数集
N	自然数集
$S^{\perp}$	子空间 S 的正交补空间
$S^C=\{x \mid x \notin S\}$	S 的补集
S^*	S 的极锥
$H(S)$	S 的凸包
$\mathrm{cl} S$	S 的闭包
$\mathrm{int}\ S$	S 的内部
∂S	S 的边界
H	超平面
$N_\varepsilon(x)$	点 x 的 ε 邻域
$p \Rightarrow q$	如果 p，那么 $q\cdots$，或如果 $p\cdots$，那么 q
$\Leftrightarrow$ 或 iff	当且仅当
$\varnothing$	空集
$\forall$	对任意一个，或对所有的
$\forall_S$	对 S 中任意一个。
$\exists$	存在
$\exists_S$	在 S 中存在
&	和
$\overline{\exists}$	唯一存在
A^T	A（矩阵或矢量）的转置
$\rightarrow$	趋向于，或趋近于
* *	证明或例题的结束
$\varphi: M_1 \rightarrow M_2$	φ 为 M_1 到 M_2 中的映射
$f: S \rightarrow R$	f 为定义在 S 上的实值函数，S 为 f 的定义域，$f(S) \subset R$ 为 f 的值域
sup	上确界
inf	下确界

opt	求优值
max	求最大值
min	求最小值
(LP)	线性规划
(DLP)	对偶线性规划
$p \vee q$	p 或 q 至少其一成立
$p \wedge q$	p 和 q 同时成立
$S(\alpha)$	（超）等值面
S_α	下方集
$S(\alpha)_t$	（超）切平面
dim	维数
$r(A)$	矩阵 A 的秩

目　　录

第一部分 基本知识

这部分内容包括最优化问题中常用的表示方法、基本定义、线性代数、凸性的某些结论，以及实分析中的一些基本概念。关于更详细地，系统地叙述，可参看许多这方面的教科书。除中文外，还可参看 Werner H. Greub (1963)，Claude Berge (1963)，Berge Ghouila—Houri (1965)，Buck (1965)，Flet (1966)，Cullen (1972) 和 Williaml. Brogan (1974) 等人的著作。

第一章　緣 性 代 数

1·1　E_n 中的矢量

n 维 Euclid 空间 E_n 是一种特殊的集合。因此，我们在介绍 E_n 中的矢量之前，首先说明一下集合及其表示法。

一个集合就是一些元素或对象的全体。可用许多方法表示一个集合，比如指出集合中包含的元素，或指出集合中元素必须满足的性质等。例如 $S=\{1, 2, 3, 4\}$ 表示由元素 1，2，3，4 组成的集合 S。这个集合也可表示成 $S=\{x: 1\leqslant x\leqslant 4,\ x \text{ 为整数}\}$。如果 x 是集合 S 中的一个元素，那么记为，$x\in S$，并说 x 属于 S。如果 x 不是集合 S 的元素，那么记为 $x\notin S$，并说 x 不属于 S。通常我们用大写英文字母表示集合，如 S，M，N，…不含任何元素的集合称为空集，用 $\varnothing$ 表示。

已知两个集合 S_1 和 S_2，如果集合 S 定义为

$$S=\{x\,|\,(x\in S_1)\vee(x\in S_2)\}$$

那么集合 S 称为 S_1 与 S_2 的并集，用 $S_1\cup S_2$ 表示，即 $S=S_1\cup S_2$。如果集合 S 定义为

$$S=\{x\,|\,(x\in S_1)\wedge(x\in S_2)\},$$

则集合 S 称为 S_1 与 S_2 的交集，用 $S_1\cap S_2$ 表示。如果 S_1 中的每个元素均属于 S_2，则集合 S_1 称为 S_2 的子集，以 $S_1\subset S_2$ 或 $S_2\supset S_1$ 示之。如果 $S_1\subset S_2$，同时 $S_2\subset S_1$，则称集合 S_1 与 S_2 相等，以 $S_1=S_2$ 示之。

n 个变量 $x_1, x_2,\cdots, x_n$ 的实值函数（即 n 元函数）$f(x_1, x_2,\cdots, x_n)$ 记为 $f(x)$ 其中

$$x=(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)^T$$

是 n 维 Euclid 空间 E_n 中的一个（列）矢量，或说 x 是 E_n 中的一个点，记为 $x\in E_n$ $x_j\in R$，$j=1, 2,\cdots, n$，称为 x 的第 j 个分量。

1·1·1　内积、模和距离

$\forall\,(x\&y)\in E_n$，我们把双线性函数

$$x^Ty=\sum_{j=1}^{n}x_jy_j$$

定义为矢量 x 和 y 的内积，以 $\langle x, y\rangle$ 示之。显然

$$\langle x,\ y\rangle=x^Ty=y^Tx=\langle y,\ x\rangle$$

易知

$$\langle x,\ x\rangle=\sum_{j=1}^{n}x_j^2\geqslant 0$$

且有

$$x=0 \Longleftrightarrow \langle x, x\rangle=0$$

因此，可把内积的平方根作为矢量的长度或模（范数），在我们这里，就把 $\langle x, x\rangle^{1/2}$ 称为 x 的长度或模（范数），也称为 Euclid 模（范数），记为 $\|x\|=\langle x, x\rangle^{1/2}$。

E_n 中任二矢量 x 与 y 之间的距离定义一个实值函数

$$d(x, y)=\|x-y\|=\langle x-y, x-y\rangle^{1/2}$$

由此可见，矢量 x 的长度可看成点 x 与原点之间的距离。

1·1·2 线性子空间

我们经常在 E_n 中一种特殊子集上求实值函数 $f(x)$ 的最优值（即最大值或最小值），这个集就是下面要讨论的线性子空间。

设 $S \subset E_n$ 是非空子集，如果 S 满足条件

(*a*) $$\forall (x \& y) \in S \Longrightarrow x+y \in S.$$

(*b*) $$(\forall x \in S) \& (\forall \alpha \in R) \Longrightarrow \alpha x \in S.$$

那么称 S 是 E_n 中的线性子空间。由 (*b*) 知，若 $x \in S$，则 $-x \in S$。由 (*a*) 知，$0=x+(-x) \in S$。因此，任一线性子空间必包括原点。

我们以 $S=\{x^j\}_{1:K}=\{x^1, x^2, \cdots, x^K\}$ 表示 S 中的有限多个矢量，如果存在一组不全为零的实数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_K$，使

$$\sum_{j=1}^{K} \alpha_j x^j=0$$

则称这组矢量 $\{x^j\}_{1:K}$ 是线性相关的，否则称 $\{x^j\}_{1:K}$ 是线性无关的。

设 $S \subset E_n$ 为一线性子空间，$\{x^j\}_{1:K} \subset S$，若 $\forall x \in S$，至少存在一组实数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_K$，使得

$$x=\sum_{j=1}^{K} \alpha_j x^j$$

则说矢量组 $\{x^j\}_{1:K}$ 可以张成线性子空间 S，而 $\{x^j\}_{1:K}$ 称 S 的一个生成矢量集，或张成矢量集。显然，对于任何非空的线性子空间其生成矢量集不是唯一的。若矢量组 $\{x^j\}_{1:K}$ 张成线性子空间 S，且线性无关，则 $\{x^j\}_{1:K}$ 为 S 的一组基，其中 *k* 称为子空间 S 的维数，记为 $\dim S=k$。

对于线性子空间 S 中的每个矢量x，在一组确定的基 $\{x_j\}_{1:K}$ 下，其分解式是唯一的。即存在唯一的一组实数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_K$，使得

$$x=\sum_{j=1}^{K} \alpha_j x^j$$

的表达式是唯一的，其中 α_j 称为 x 在基 $\{x^j\}_{1:K}$ 下的第 *j* 个座标。关于子空间基的改变有下述引理。

1·1·3 引 理

设 $\{x^j\}_{1:K}$ 为线性子空间 S 的一组基，$y \in S$ 且

$$y=\sum_{j=1}^{K}\alpha_j x^j \tag{1·1}$$

如果对于某一 i，$\alpha_i\neq0$，则用 y 替换 x^i 所得到的新的矢量组

$$x^1,\ x^2,\cdots,\ x^{i-1},\ y,\ x^{i+1},\cdots,\ x^K \tag{1·2}$$

仍为 S 的一组基。

证 明

显然矢量组（1·2）能张成线性子空间 S，只须证明（1.2）是线性无关的。设

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{K}\lambda_j x^j+\lambda y=0$$

将（1·1）代替上式中的 y，得

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{K}(\lambda_j+\lambda\alpha_j)x^j+\lambda\alpha_i x^i=$$

因 $\{x^j\}_{1:K}$ 是线性无关的，所以有

$$\lambda_j+\lambda\alpha_j=0,\ \ j\neq i.$$

$$\lambda\alpha_i=0,\ \ j=i.$$

因 $\alpha_i\neq0$，所以 $\lambda=0$，由此可得 $\lambda_j=0$，$j\neq i$。故矢量组（1·2）是线性无关的，因为 S 的一组基。 **

1·1·4 *Cauchy—Scharz* 不等式

$\forall(x\&y)\in E_i$ 有

$$\langle x,\ y\rangle^2\leqslant\langle x,\ x\rangle\langle y,\ y\rangle \tag{1·3}$$

证 明

$\forall\alpha\in R$ 有

$$0\leqslant\langle\alpha x+y,\ \alpha x+y\rangle$$

即
$$0\leqslant\alpha^2\langle x,\ x\rangle+2\alpha\langle x,\ y\rangle+\langle y,\ y\rangle$$

上式右边是关于 α 的二次三项式，且对任意 α 总是非负的，所以必有

$$\langle x,\ y\rangle^2-\langle x,\ x\rangle\langle y,\ y\rangle\leqslant0$$

移项即得（1·3）式。 **

Cauchy—Schwarz 不等式等号成立 iff x&y 是线性相关的。

1·1·5 线性流形

如果已知一个线性子空间 $S\subset E$，我们就可以在 E_n 中对它作个平移。设 $x^\circ\in E_n$ 是任一个固定矢量，对每一 $x\in S$，我们都作出一个新的矢量 $x^\circ+x$，这就得到一个新的子集，以 $x^\circ+S$ 示之，这个子集称为 E_n 中的一个线性流形。它还可表示成

$$x^\circ+S=\{y\mid y=x^\circ+x,\ x\in S\}$$

上述定义等价于下面两条中的每一条：

（a）如果一个集合 S_1，通过平移（$S_1 - x^1$，$x^1 \in E_n$ 为一固定矢量）后，能够成为一个线性子空间。

（b）$\forall (x \& y) \in S_1$ 和 $\forall \alpha \in R$ 有 $\alpha x + (1-\alpha) y \in S_1$。

例如，在 E_2 中，过原点直线上的所有点构成 E_2 中的一个线性子空间。当我们把这条直线平行移动时，就得到一系列的线性流形。如图 1•1 所示。注意，对于不同的固定点 x°。可得同样的线性流形。

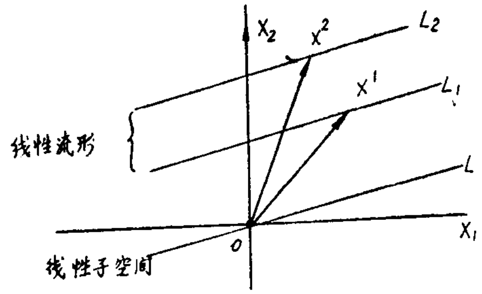

图 1·1. 线性子空间与线性流形

1.2 二 次 型

为了确定一个函数在驻点附近的性质，就必须研究函数在驻点附近的 Taylor 展开式中二次项的性质，即二次型的性质。我们首先介绍双线性函数的含义。

1·2·1 双线性函数

设 E&F 为线性空间，如果映射

$$\Phi : E \times F \longrightarrow R$$

满足条件

$$\Phi(\lambda x^1 + \mu x^2,\ y) = \lambda \Phi(x^1,\ y) + \mu \Phi(x^2,\ y)$$

$$x^1,\ x^2 \in E,\ y \in F,\ \lambda,\ \mu \in R,$$

&

$$\Phi(x,\ \lambda y^1 + \mu y^2) = \lambda \Phi(x,\ y^1) + \mu \Phi(x,\ y^2)$$

$$x \in E,\ y^1,\ y^2 \in F,\ \lambda,\ \mu \in R,$$

则称 Φ 是定义于 $E \times F$ 上的一个双线性函数。也就是说，如果函数 $\Phi(x, y)$ 对每个固定的 $y \in F$，$\Phi(x, y)$ 是 $x \in E$ 的线性函数，反之，对每个固定的 $x \in E$，$\Phi(x, y)$是 $y \in F$ 的线性函数，那么 $\Phi(x, y)$，是 x，y 的双线性函数。

1·2·2 二次型的定义

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，$x \in E_m$，$y \in E_n$，令

$$\Phi(x,\ y) = \langle x,\ Ay \rangle = \\ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

显然，$\Phi(x, y)$ 是 x 和 y 的双线性函数。如果 $m = n \& x = y \in E_n$，那么这时的双线性函数称为二次型。即，若 A 是 $n \times n$ 方阵，$x \in E_n$，那么

$$Q(x) = \Phi(x,\ x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^T A x$$

称为二次型。

1·2·3 斜对称阵的二次型

由于任一二次型 x^TAx 均为一个数值函数，即 $x^TAx\in R$，所以对于斜对称阵 $A(A=-A^T)$ 来说，其二次型满足关系

$$x^TAx=(x^TAx)^T=x^TA^Tx=-x^TAx$$

因此

$$x^TAx=0.$$

由此可得结论，任何斜对称阵的二次型恒等于零。

任一方阵 A 总可分解成

$$A=(A+A^T)/2+(A-A^T)/2$$

易证，$(A+A^T)/2$ 是对称阵，$(A-A^T)/2$ 是斜对称阵。因此，

$$x^TAx=x^T\left(\frac{A+A^T}{2}\right)x+x^T\left(\frac{A-A^T}{2}\right)x$$

$$=x^T\left(\frac{A+A^T}{2}\right)x.$$

由此可知，任一方阵的二次型恒等于一个相应的对称阵的二次型。而任一方阵均可表示为对称阵与斜对称阵之和，所以，在二次型的讨论中，我们总是研究对称阵的情况。

1·2·4 二次型的分类

设 A 是 $n\times n$ 对称阵，若 $\forall E_n x\wedge x\neq 0$ 有 $x^TAx>0$，则称 A 为正定阵，称 x^TAx 为正定二次型。若 $\forall E_n x$ 有 $x^TAx\geqslant 0$，则称 A 为正半定阵，x^TAx 为正半定二次型。反之，若 $\forall E_n x\wedge x\neq 0$ 有 $x^TAx<0$，则称 A 为负定阵，x^TAx 为负定二次型。若 $\forall E_n x$ 有 $x^TAx\leqslant 0$，则称 A 为负半定阵，x^TAx 为负半定二次型。

1.3 矢量的正交与共轭

1·3·1 正交矢量

若 $x\in E_n$ 与 $y\in E_n$ 的内积为零，即 $\langle x, y\rangle=0$，则称矢量 x 与 y 正交，记为，$x\perp y$。若矢量组 $\{x^j\}_{1:K}$ 满足

$$\langle x^i, x^j\rangle=0,\ i\neq j.$$

则称矢量 $x^1, x^2, \cdots, x^K$ 相互正交。若矢量 x 与线性子空间 S 中每个矢量正交，即 $\forall y\in S$，有 $x\perp y$。则称 x 正交于线性子空间 S，记为 $x\perp S$。

1·3·2 *Gram—Schmidt* 正交化法

对线性无关量组 $\{x^j\}_{1:m}\subset E_n$，$m\leqslant n$，作适当的线性组合，总能形成 m 个相互正交的标准化矢量，$u^1, u^2, \cdots, u^m$，即 $u^i\perp u^j$，$i\neq j$，$\|u^j\|=1$，$i, j\in\{1, 2, \cdots, m\}$。同时 $\{x^j\}_{1:m}$ 与 $\{u^j\}_{1:m}$ 张成同样的线性子空间。用 Gram—Schmidt 正交化法可实现这一点。具体作如下：

令 $u^1=x^1/\langle x^1, x^1\rangle^{1/2}$，$u^2$ 选作 x^2 与 u^1 的线性组合，使 $\langle u^1, u^2\rangle=0$，$\langle u^2, u^2\rangle=1$。类似地，把 x^j 看成是 $u^1, u^2, \cdots, u^j$ 的线性组合，以正交性和标准化为条件来确定其系数。计算分为两步进行：

第1步 由已知矢量 $x^1, x^2, \cdots, x^m$ 形成相互正交矢量 $y^1, y^2, \cdots, y^m$，

首先，令 $y^1=x^1$，然后，对于 $j=2, 3, \cdots, m$，依次执行：从 x^j 中减去 x^j 在 $y^1, y^2, \cdots, y^{j-1}$ 上的分量（即 $y^1, y^2, \cdots, y^{j-1}$ 的线性组合），将其差作为 y^j。也就是首先令

$$y^1=x^1,$$

然后依次作

$$y^j=x^j-\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\langle x^j, y^i\rangle}{\langle y^i, y^i\rangle}y^i, \tag{1·4}$$

$$j=2, 3, \cdots, m$$

用数学归纳法可以证明：$y^1, y^2, \cdots, y^m$ 是相互正交的，读者可以对 $m=2$ 时的情形进行证明。

第2步 对 $y^1, y^2, \cdots, y^m$ 进行标准化，令

$$u^j=y^j/\langle y^j, y^j\rangle^{1/2} \tag{1·5}$$

$$j=1, 2, \cdots, m$$

上述标准正交化法称为 Gram—Schmidt 正交化法。

例 由 $x^1=(1, 0, 1)^T$，$x^2=(-1, 2, 1)^T$ 和 $x^3=(0, 1, 2)^T$ 求出一组标准化正交矢量。

易证，x^1, x^2, x^3 是线性无关的，因此可用 Gram—Schmidt 正交化法。作法如下：

第1步

$$y^1=x^1=(1, 0, 1)^T$$

$$y^2=x^2-\frac{\langle x^2, y^1\rangle}{\langle y^1, y^1\rangle}y^1=x^2=(-1, 2, 1)^T$$

$$y^3=x^3-\frac{\langle x^3, y^1\rangle}{\langle y^1, y^1\rangle}y^1-\frac{\langle x^3, y^2\rangle}{\langle y^2, y^2\rangle}y^2$$

$$=(-1/3, -1/3, 1/3)^T.$$

第2步

$$u^1=\frac{y^1}{\|y^1\|}=\frac{y^1}{\langle y^1, y^1\rangle^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T$$

$$u^2=\frac{y^2}{\|y^2\|}=\frac{y^2}{\langle y^2, y^2\rangle^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)^T$$

$$u^3=\frac{y^3}{\|y^3\|}=\frac{y^3}{\langle y^3, y^3\rangle^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)^T$$

于是，u^1，u^2，u^3 是 E_3 中的一组标准化正交基。

设 $\{x^j\}_{1:n}$ 为 E_n 中一组标准化正交基，则有

$$\langle x^i,\ x^j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

令 $x\in E_n$ 在 $\{x^j\}_{1:n}$ 基下的座标为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，即

$$x=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x^j$$

作 x^i 与 x 的内积

$$\begin{aligned}\langle x,\ x^i\rangle&=\langle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x^j,\ x^i\rangle\\&=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\langle x^j,\ x^i\rangle\\&=\alpha_i.\end{aligned}$$

因此，对于确定的一组标准化正交基，任一矢量 x 的第 j 个座标 α_j 可以用内积来表达，即 $\alpha_j=\langle x,\ x^j\rangle$。

1·3·3 矢量空间的分解

现在我们来研究欧氏空间 E_n 关于线性子空间的分解。设 $S_1\&S_2\subset E_n$ 是两个线性子空间，若 $\forall x\in E_n$ 有

$$x=x^1+x^2,\ x^1\in S_1,\ x^2\in S_2. \tag{1·6}$$

则称 E^n 为 S_1 与 S_2 的（线性）和，记为 $S_1+S_2=E_n$。一般说来，$\forall x\in E_n$，其分解式不一定是唯一的。但是，如果 $\forall x\in E_n$，$\exists(x^1\in S^1\&x^2\in S_2)$，使得 $x=x^1+x^2$，则称上述 S_1 与 S_2 的和为直接和，记为 $E_n=S_1\oplus S_2$。

易知，S_1+S_2 为直接和 iff

$$S_1\cap S_2=\{0\}$$

和

$$\dim E_n=\dim S_1+\dim S_2.$$

若将 E_n 分解为两个（或多个）线性子空间的直接和，$E_n=S_1\oplus S_2$（或 $\Sigma_\oplus S_j$），即 $\forall x\in E_n$，$x=x^1+x^2$，$x^1\in S_1$，$x^2\in S_2$，（或 $x=\Sigma x^j$，$x^j\in S_j$），则称 x^1 为 x 在 S_1 上的投影，称 x^2 为 x 在 S_2 上的投影（或称 x^j 为 x 在 S_j 上的投影）。

1·3·4 正交投影

设 $S\subset E_n$ 是 m 维线性子空间，$m<n$，那么，$(\forall x\in E_n)(\exists u\in S)$ 使 $\forall y\in S$ 有

$$\langle x-u,\ y\rangle=0. \tag{1·7}$$

这里的 u 称为 x 在 S 上的正交投影。注意，(1·7) 式对每一个 $y\in S$ 均成立，所以 $(x-u)\perp S$。也就是说，u 为 x 在 S 上的正交投影 iff $(x-u)\perp S$。见图 1·2。应注意，对于确定的 x，存在唯一的正交投影 u，反之，对于同一投影 u，可有无穷多个矢量 x 与

之对应。

与线性子空间 S 正交的所有矢量的集合形成一个 $(n-m)$ 维线性子空间，这个子空间称为 S 的正交补空间，记为 $S^{\perp}$，即

$$S^{\perp}=\{z \mid z\perp S,\ z\in E_n\}.$$

显然，与 $S^{\perp}$ 正交的所有矢量的集合是线性子空间 S，即 $(S^{\perp})^{\perp}=S$。同时，若 $S\subset E_n$ 是线性子空间，则 $S^{\perp}\subset E_n$ 也是线性子空间，且 E_n 为 S 与 $S^{\perp}$ 的直接和，$E=S\oplus S^{\perp}$。也就是说，$\forall x\in E_n$ 可唯一地分解成

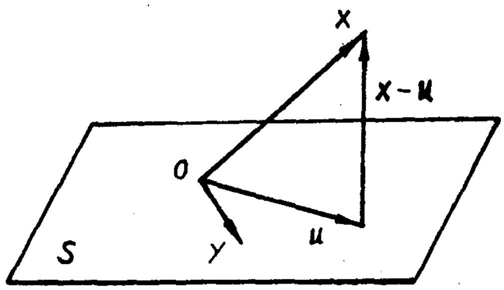

图 1·2.

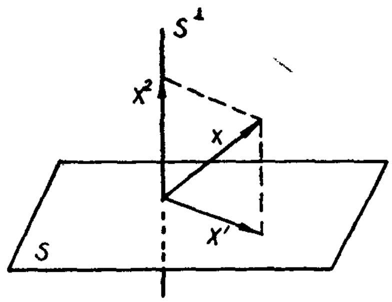

图 1·3.

$$x=x^1+x^2$$

$$x^1\in S,\ x^2\in S^{\perp}.$$

如图 1·3 所示。根据这个分解，易证

$$\|x\|^2=\|x^1\|^2+\|x^2\|^2.$$

1·3·5 命 题

设 $S\subset E_n$ 为线性子空间，如果 $(\forall x^\circ\in E_n)$ $(\exists z\in S)$ 使 $\forall y\in S$ 有

$$\|x^\circ-z\|\leqslant\|x^\circ-y\|$$

那么，$(x^\circ-z)\perp S$.

证 明

用反证法证明。假定 $x^\circ-z$ 不正交于 S，那么 $\exists u\in S$ 使 $\langle x^\circ-z,\ u\rangle=\delta\neq0$。不失一般性，可设 $\|u\|=1$。因为

$$\begin{aligned}\|x^\circ-z-\delta u\|^2&=\|x^\circ-z\|^2-\langle x^\circ-z,\ \delta u\rangle\\&\quad-\langle\delta u,\ x^\circ-z\rangle+\delta^2\\&=\|x^\circ-z\|^2-\delta^2<\|x^\circ-z\|^2\end{aligned}$$

显然，上不等式与题设矛盾，故证得

$$(x^\circ-z)\perp S.$$

1·3·6 Q——共轭矢量 $**$

设 Q 是 $n\times n$ 对称正定阵，若 x，$y\in E_n$，满足

$$x^TQy=0$$

则说 x 与 y 是 Q——正交，或 Q——共轭，或 x 与 y 关于 Q 共轭等。前面所说的正交性，是 Q 为单位阵 I 时的特殊情形。如果矢量组 $\{x^j\}_{1:K}$ 满足

$$(x^i)^TQx^j=0,\quad i\neq j,\ i,\ j\in\{1,\cdots,k\},$$

则说 $\{x^j\}_{1:K}$ 是相互 Q——共轭的。

如果 $\{x^j\}_{1:n}\subset E_n$ 是一组线性无关矢量，那么，用类似于 Gram—Schmidt 正交化方法可将 $\{x^j\}_{1:n}$ 化为 n 个彼此 Q——共轭的矢量 u^1，$u^2,\cdots$，u^n，算法如下：

令

$$u^1=x^1,$$

$$u^2=x^2+\alpha_{21}u^1$$

选择系数 α_{21}，使 u^1 与 u^2——共轭。于是，

$$0=(u^2)^TQu^1=\langle u^2,\ Qu^1\rangle$$

$$=\langle x^2,\ Qu^1\rangle+\alpha_{21}\langle u^1,\ Qu^1\rangle$$

由此可得

$$\alpha_{21}=-\langle x^2,\ Qu^1\rangle/\langle u^1,\ Qu^1\rangle$$

依此递推，假定由 x^1，$x^2,\cdots$，x^K，已构成Q——共轭矢量 u^1，$u^2,\cdots$，u^K，那么，令

$$u^{K+1}=x^{K+1}+\sum_{j=1}^{K}\alpha_{K,j}u^j,$$

将上式两边分别与 Qu^i，$i=1,\ 2,\cdots,\ k$，作内积，得

$$0=\langle u^{k+1},\ Qu^i\rangle$$

$$=\langle x^{K+3},\ Qu^i\rangle+\alpha_{Ki}\langle u^i,\ Qu^i\rangle$$

$$\alpha_{Ki}=-\langle x^{K+1},\ Qu^i\rangle/\langle u^i,\ Qu^i\rangle$$

$$i=1,\ 2,\cdots,\ k$$

$$k=2,\ 3,\cdots,\ n.$$

可用归纳法证明，这样构成的矢量组 u^1，$u^2,\cdots$，u^n 是相互 Q——共轭的。

1.4 两个特殊子空间

1·4·1 域空间与零空间

设 $A=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 矩阵，由

$$y=Ax$$

定义了一个线性映射 $\varphi: E_n \to E_m$，即 $M(\varphi)=A$ 表示映射 φ 的矩阵为 A，为简单起见，我们将 φ 与 A 视为一同。我们称集合 $\{y \mid Ax=y,\ x\in E_n\}$ 为 A 的域空间，记为 $R(A)$，即

$$R(A)=\{y \mid Ax=y,\ x\in E_n\}.$$

设 $a^j\in E_m$，$j=1, 2, \cdots, n$，为 A 的第 j 列，那么，

$$A=[a^1, a^2, \cdots, a^n],$$

并且 $(\forall y\in R(A))$ $(\exists x\in E_n)$ 使

$$\begin{aligned} y=Ax&=[a^1, a^2, \cdots, a^n](x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \\ &=\sum_{j=1}^{n} x_j a^j \end{aligned}$$

由此可见，$R(A)$ 可视为由 $a^1, a^2, \cdots, a^n$ 所张成的 E_m 中的一个子空间。

由满足 $Ax=0$ 的 $x\in E_n$ 所形成的集合称为 A 的零空间，记为 $N(A)$，即

$$N(A)=\{x \mid Ax=0,\ x\in E\ \}$$

易证 $R(A)\subset E_m$ 和 $N(A)\subset E_n$ 均为线性子空间。

由矢量的正交性，可知 $R(A)$ 与 $N(A)$ 之间有下面命题所述的关系。

1·4·2 命 题

设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则

$$(R(A))^{\perp}=N(A^T)$$

证 明

设 $z\in R(A)$，由域空间定义可知，$\exists x\in E_n$，使 $z=Ax$，因此，$\forall y\in N(A^T)$ 有

$$\begin{aligned} \langle y, z\rangle &= y^T z = y^T A x \\ &= (A^T y)^T x \\ &= 0 \end{aligned}$$

由于上式对任意 $z\in R(A)$ 均成立，故 $y\perp R(A)$，即 $y\in R(A))^{\perp}$。因此

$$N(A^T)\subset (R(A))^{\perp}$$

$\forall z\in (R(A))^{\perp}$，由正交补空间定义可知，$\forall x\in E_n$ 有 $\langle z, Ax\rangle=0$。即

$$z^T A x=(A^T z)^T x=0$$

由于 x 的任意性得 $A^T z=0$，故

$$z\in N(A^T)$$

所以

$$(R(A))^{\perp}\subset N(\ (A^T).$$

由上述可得