图，网絡和算法

上

M.N.S.SMAMY
K.THULASIRMAN 著

上海科技大学数学系高等数学教研室

一九八三年八月

译者的话

本书译者分工如下：1～6章　朱鼎相，7～11，14章叶秀明，12，13，14章朱幼霞。

限于译者水平，错误一定不少，恳请读者指正。

译者

1983年6月

前　　言

在过去20年里，图论作为组合数学的一个分支，在科学家和工程技术人员中，越来越普及了。它起源于解决令人弗解的谜和趣味游戏，例如Königsberg桥问题和Hamilton游戏。现在，在研究由很多个大型复什系统所组成的问题中，为了认识和解决这些问题，图论已经成为人们有力的工具。这并不奇怪，因为，图论可把大的系统分成很多小系统来研究；一个集合对象间的二元关系，能够用图方便地表示；并且，描述一个系统的同时，也描述了其中不同子系统之间的关系。另外，在研究数学的一些其它分支，如群论和矩阵论，也要用到图论。每当图论的应用开辟一个新的领域，就需要导入和研究一些新概念，或需要深入研究一些已知的概念，这种需要又反过来活跃了图论中有关理论的研究。理论和应用不断地相互促进，使数学的这个分支迅速发展。

已经出版的几本书，讨论图论的分析，设计，计数，算法，和应用。在本书中，我们试图用一种统一的方法讨论图论，并讨论它在电网络中的应用，以及若干图算法的理论基础。在我们研究本书的涉及范围和内容以前，将简短地说明，图论在以下我们感兴趣的三个方面是有用处的，即电网络，运筹学和计算机科学。这三方面的应用与图论之间已经产生了相互有利的影响，并取得很多成就。

著名数学家Euler，在解决Könisberg桥的问题中，为图论奠了基础。然而，直到1847年，第一个把图论应用到物理中去是Kirchhoff，为了研究在电网络中的应用，他发展了树的理论。对于网络的研究，Kirchhoff定律起着至关重要的作用。这些定律，确定了在一个电网络中电压变量之间以及电流变量之间的关系。

对于给定的电网络，这些关系不依赖于所用元件的性质，而依赖于这些元件连接的方法。换句话说，依赖于网络图。事实上，一个网络图的回路和割集，完全确定了描述Kirchhoff电压和电流定律的方程。那末问题在于，是否网络的每个回路和每个割集对于确定这些方程都是必须的呢。这个问题和其它有关问题的答案，需要深入研究一个图的回路，割集，和树的性质。这说明了在电网络研究中，图论作为重要的分析工具所起的作用。在网络理论中很多重要的发现，主要是图论方面的发现。这些成果已经对图论作出了有价值的贡献。

运输网络和通讯网络能方便地用图来表示。所以，图论方法对于运筹学工作者所涉及的诸如流，最短通路或者在研究这些网络中所提出的可靠网络设计问题是有用的。这方面的研究，对图论在最近20年中的迅速发展，起了重要推动作用。

由Ford和Fulkerson发展起来的网络流理论，曾解决了某些组合论的问题，并且对图论中许多重要的定理，作出了新的证明。流守恒的Kirchhoff定律（类似于电网络中Kirchhoff电流定律），在网络流理论的发展中，再一次起着核心的作用。近几年中，人们对设计具有指定性质的通讯网络方面有很大兴趣。这个问题，经常归结为构造一个极值图（即有最小或最大边数的图）的问题，而这个图有一个拓扑参数具有指定的值。这方面的研究，已经取得了某些重要成果。这类问题，在图论中称为极值问题。

图论在计算机科学中的应用日益广泛。对计算机科学家来说，为了表达思想，图论成为他们方便的语言。其中图论的很多结果，对他们所涉及的问题有着直接关系。在称为编码最优问题中，图论

论

得到了广泛的应用。早些时候不知道的很多图论概念，在这些研究中发展了。图论除了作为研究问题的工具以外，对计算机科学家来说，它有着另一个重要的吸引力。计算机科学的两件主要事情是：设计有效算法，和研究它们的复什性。图论（一般，组合论）为设什如此的算法，提供了许多方法。新近，计算机科学家对一些问题，已经找到了有效的图论算法，并指出了在另一些问题中，"有效"的算法很可能是不存在的。这的确是计算机科学对图论的一个有意义的贡献。

前面的讨论，突出了图论在工程和科学中所起的作用，这也说明了它在大学课程中显得越来越重要。在开始学习图论的任何应用以前，不必要一定懂得图论的概念和结果的详细知识。当然，各种概念的完整知识和用来研究这些概念的熟练技巧对于扩大图论新的应用将是非常有用的；否则，是困难的。这对数学很多其它分支，像复变理论，矩阵论，或在系统工程研究中重要的变换理论也是对的。

本书是对数学，电气工程，和计算机科学的学生而讲的，像它书名所意味的，分成三部分：图论，电网络，和图的算法。

第I部分（1—10章）讨论图论，目的在于对图论的基本概念和一些结果给予全面介绍。内容包括：树，Hamilton图和Euler图，有向图，图的矩阵，可平面性，连通性，匹配和着色。另外还介绍了拟阵初步，其中引进了Minty自对偶公理系统，这系统在图的回路和割集之间呈现明显的对偶性。还引进了弧色引理，greedy算法，以及它与拟阵的密切关系。一些研究电网络理论的科学家，近几年来，已经对拟阵发生兴趣，因为利用拟阵更能解决

他们所遇到的问题。而对于数学家，存在许多使图论概念一般化的拟阵问题。对于计算机科学家，存在设计拟阵算法的问题。

第Ⅱ部分（11－13章）讨论电网络理论。第11章，讨论图的主分划及其在网络分析的混合变量法中的应用，以及电阻网络无增益性的图论证明。第12章，讨论电阻网络理论的几个结果，以及实现回路矩阵和割集矩阵的一个方法。这一章最后叙述了网络函数的拓扑公式，这些公式从一个图的矩阵性质中（已在第Ⅰ部分中表示）容易推得。在第Ⅱ部分，还讨论了Tellegen定理及其在网络灵敏度计算中的应用。这个定理本质上是图论性质的，但如此一个重要的定理，很多年来没有被人重视，令人惊奇。

第Ⅲ部分讨论图的算法，分成二章，第14章关于图的算法分析，第15章是图的最优化问题的算法。主要内容是：设计的基础理论，正确性的证明和几个图的算法分析。其中还包括下列算法：流图可约性，支配，最短通路，匹配，最优二分搜索树，网络流，和最优枝形图（Optimum Branchings）等这些算法。另外包括：二分图匹配算法的Hopcroft和Karp分析，以及Ford－Fulkerson标号算法的Edmonds和Karp分析。在本部分，我们还将看到，计算机科学家对图论作出的几个重要贡献。

本书没有讨论NP——完全问题，这个课题超出了本书的范围。

如果具备了接近大学毕业的数学程度，学习本书第Ⅰ和第Ⅲ部分几乎没有困难。在学习第Ⅱ部分时，我们假定学生已对电网络分析有所了解。

对于不同的对象，可以酌情选学本书的内容，建议如下：

1．“图论”的内容，对于数学，电气工程，计算机科学的学

生可学1—10章及15.7节。计算机科学的学生，第6章几节可省略；但14.3及14.4节中关于深探法（DFS）内容应包括在内。

2．“图和电网络”内容。对于电气工程的毕业生可学1—7章及11—13章，省略3.2，5.6，5.8节。

3．“算法图论”的内容。对数学，电气工程，和计算机科学的学生，可学第Ⅲ部分，以及与第Ⅰ部分相应于各个专业的有关内容。计算机科学的学生，对14.5，14.6节，包括算法的每一步，都要精心搞透，这将有助于程序图可约性和支配算法的讨论。

作者在加拿大Concordia大学，对数学和电气工程的学生，教本书的“图论”部分，对毕业班的电气工程学生，教“图和电网络”部分。第2位作者（K. Thulasiraman）在印度技术学院（位于马都拉斯）教本书的后面部分。

第2位作者还曾选用第Ⅰ部分的一些章节，用作新课程“组合论和图论”的内容，以及选用第Ⅲ部分的一些章节，用作新课程“设计和算法分析”的内容。在印度技术学院，他为计算机科学的毕业生上这两门课。

我们对美国北达科他州立大学的P. K. Rajan博士和印度技术学院的R. Jayakumar先生表示衷心感谢，他们读了本书手稿的主要部分，指出几个遗漏和错误，提出了很多帮助我们改进的建议。我们也感谢印度技术学院的V. G. K. Mutri教授和C. R. Muthukrishnan教授，加拿大Concordia大学的Ramachandran教授与I. Roytman博士，美国北达科他州立大学的K. Sankara Rao博士，印度技术学院（位于孟买）的H. Narayanman博士，印度技术学院（位于马都拉斯）以前的学生，A. Mohan先生与P.

Narendran先生，他们分别阅读了手稿的不同部分，并提出了宝贵的意见。印度马德里大学的S. A. Choudum博士，对于图论中的一些问题，提供了引人注目的比较简单的证明；印度技术学院的V. V. Bapeswara博士，容许用他尚未出版著作的部分内容；加拿大McGill大学的V. Chvatal教授，日本东京技术学院的G. Kishi教授，美国斯坦福大学的L. Lovasz教授（匈牙利），R. E. Tarjan教授，及K. R. Rarthasarathy教授和他的一些毕业生，对本书提出了宝贵的意见和建议。

K. Thulasiraman愉快地回忆起与引导他研究的V. G. K. Murti教授的合作，能与如此难得的一位导师在一起，是值得庆幸的。

我们感谢加拿大Concordia大学的大力支持。K. Thulasiraman希望感谢印度技术学院和加拿大Concordia大学对他的支持与鼓励，使他才有可能成为本书的著作者之一。

我们还感谢我们的妻子，Leela Swamy和Santha Thulasiraman，以及我们的孩子们。在我们努力工作的整个期间，她（他）们能理解和支持我们的工作。

最后，我们还要感谢Gloria Miller和Kamala Ramachandran，他们出色地打印了手稿。

M. N. S. Swamy

K. Thulasiraman

Montreal, Canada

（蒙特雷尔）（加拿大）

Madras India

（马都拉斯）（印度）

1980. 9.

目　录

6章 图的矩阵

9章 复盖和染色

10章 拟阵

第一章
基本概念

本章，以介绍图论中几个基本概念作为我们学习的开始，并将得到涉及这些概念的几个结果。在具体说明这些概念，以及在得到几个结果的过程中，也会使读者学会某些技巧，而这些技巧常用于图论的定理证明中。

1.1 一些基本定义

一个图 $G=(V, E)$ 由二个集合组成：以顶点为元素的有限集 V，及以边为元素的有限集 E，每条边是与一对顶点关联，假使一个图 G 的边与一对有序点关联，则 G 称为有向图。否则 G 称为无向图。在本书的第四章讨论无向图。

我们用符号 v_1，v_2，v_3，…表示一个图的顶点，符号 e_1，e_2，e_3，…表示一个图的边，用一条边 e_ℓ 联结顶点 v_i 与 v_j，这二顶点称为 e_ℓ 的端点。其时，边 e_ℓ 用 $e_\ell=(v_i, v_j)$ 表示。

注意：当 E 的元素不相同时，在 E 中可以超过一条边有相同一对端点。有同一对端点的所有边称为平行边。而且，一条边的端点不需要是不相同的。假使 $e_\ell=(v_i, v_i)$，则边 e_ℓ 称为在顶点 v_i 的一个自圈。一个图 G 是 n 阶的，假使它的顶点的集合有 n 个元素。

没有边的一个图称为空图（empty graph），没有顶点（因此无边）的一个图称为零图（null graph）。

在图形上，一个图能由一个图形来表示，在这图形里，顶点是由点或小圈表示，一条边用联结这二个点的线段表示，这二个点是线段的端点。

例如，假使

$$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

及

$$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

使得

$$e_1=(v_1, v_2),$$

$$e_2=(v_1, v_4),$$

$$e_3=(v_5, v_6),$$

$$e_4=(v_1, v_2),$$

$$e_5=(v_3, v_3),$$

则图 $G=(V, E)$ 在图1.1所示，在这图里，e_1 及 e_4 是平行边，e_5 是一自圈。

一条边说成是在它的端点是关联的。二个顶点是邻接的，假使它们是某条边的端点。假使二条边有公共的端点，则这些边说成是邻接的。

例如，在图1.1中，边 e_1 是与 v_1 及 v_2 关联；v_1 及 v_4 是二个相邻接的顶点，而 e_1 及 e_2 是二条相邻接的边。

与顶点 v_i 的关联的边数称为顶点的度，用 $d(v_i)$ 表示，有时，一顶点度数也称为它的价（valemcy）。度数为1的一个顶点称为悬挂点，仅与悬挂点关联的边称为悬挂边，度数为0的顶点称为孤立点，由定义，在顶点 v_i 的一自圈对 v_i 的度数贡献2，$\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示在G中的最小度数和最大度数。

在图1.1的G中

$$d(v_1)=3,$$

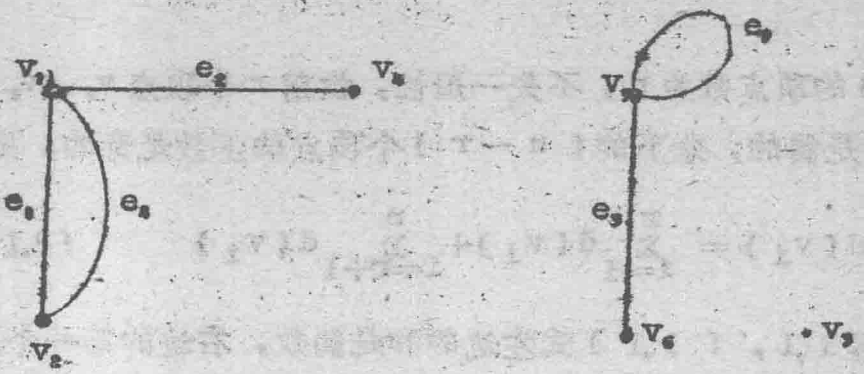

图1.1　图$G=(V, E)$。$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$;

$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

$d(v_2)=2$,

$d(v_3)=0$,

$d(v_4)=1$,

$d(v_5)=3$,

$d(v_6)=1$。

注意：v_3是孤立点，v_4及v_6是悬挂点，e_2是一悬挂边。能够验证G的所有顶点的度数和等于10，边数等于5。因此G的顶点的度数和等于G的边数和的二倍，故是一偶数。可以进一步验证，在G中奇度数的顶点数也是偶数。这些有趣的结果不是对图1.1特别有的。事实上，它们对所有图是真的，如下面定理所述。

定理1.1　一个图G的顶点的度数和等于$2m$，其中m是G的边数。

证明：

由于每条边关联二个顶点，它对G的度数和贡献2。因此，所有的边一起，对G的度数和，贡献$2m$。　#

定理1.2　在任何图中，奇度数的顶点数是偶数。

证明：

设图G的顶点数为n，不失一般性，设前r个顶点v_1，v_2，…，v_r的度数是偶的，余下的（n－r）个顶点的度数是奇的，则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{i=1}^{r} d(v_i) + \sum_{i=r+1}^{n} d(v_i) \qquad (1.1)$$

由定理1.1，（1.1）式左边的和是偶数，右边的第一个和式也是偶数，因为在这和式里每一项是偶数，因此右边的第二个和式应是偶数。由于在右边第二个和式中每项是奇数在这和式中，存在偶数项是必要的，换言之，奇度数的顶点数，（n－r）应是偶数。

#

1.2　子图和补（complement）

考察一图G＝（V，E）。假使V'与E'分别是V及E的子集，使得一条边（v_i，v_j）是在E'中，仅假使v_i及v_j是在V'中，则称G'＝（V'，E'）是G的子图。假使E'是E的一真子集，或V'是V的一真子集，则G'将称为G的一真子图。假使一图G的全部顶点出现在G的一子图G'里，则G'称为G的一生成子图。

例如，考察在图1.2a所示的图G，在图1.2b所示的图G'是G的子图。它的顶点集{v_1，v_2，v_3，v_4}。事实上，它是G的一真子图。在图1.2c所示的图G''是G的一生成子图。

在一子图里，一些顶点可以是孤立点。例如，在图1.2d所示的图G'''，是带有一个孤立点的G的一子图。

假定G的一子图G'＝（V'，E'）没有孤立点。则由子图的定义能够看到，在V'中每个顶点，是E'中某条边的端点。所以在这种情