數學——它的內容方法和意義

（第一册）

宋甫鶴編譯

技術叢書出版社

數學——它的內容方法和意義

宋甫鶴編譯

技術叢書出版社

俄文原版序

數學在古時起源於日常生活，而發展結果已成龐大系統包括廣泛多端的部門。和他種科學一樣，數學也是反映環繞吾人即物質世界所遵循的定律，它對人類支配自然及求得關於自然的知識皆是極有力的工具。但是數學特有它的高度的抽象性，換言之，數學較新的分支不易爲非專材的人所接近。數學的這種抽象性在古時就已產生一些唯心主義的觀念，把數學看成是與物質世界獨立而無關的。

在編寫本卷時，各位作者心目中皆保持一個目標，就是使足夠廣大一圈的蘇聯知識份子得以認識數學的各分支，認識它們內容及方法，它們所賴以建立的基礎，以及它們曾沿以發展的種種途徑。

對於讀者要求的必需預備知識，其最低限度是很少的，我們只假定讀者具有高中數學程度。但是各卷之間却有相當差別，這一卷所含的材料會比另一卷的難些。若讀者是初次要認識高等數學的要素，則他去讀前面的幾章將會得益，但要想完全了解後面的部份，則讀者必需先已研讀若干相關的教科書。這部書總起來要想爲讀者透徹了解，唯有他先已知道數學分解的一些應用；也就是說，他已學過微分和積分學。對於這樣的讀者，即教授數學及工程的教師們，特別要緊的是去研讀引進數學新支的各章。

自然，要想在一本書的限度裏把數學研究的豐富內容窮盡舉出，即使只涉及最基本的結果也是不可能的；因此，本書在材料方面作某種度程的自由選擇乃不可避免的。但就一般來講，本書將對數學的現况，數學的起源及其未來可能的發展，爲讀者提供一個概念。由於這個原因，本書對即些已熟悉書中大部份材料之事實的人也是有用，在某程度言本書也是爲他們而寫的。本書或能幫助人撤消視界的狹仄，而我們的一些青年數學家常不免犯此毛病。

本書的各章是分別由各個作者來寫的，他們的名字見於目錄中。但此書整體說來是一項合作的成果。它的總計劃，它的材料的選擇，各章遞次之屬稿皆曾經過通盤的討論，根據意見的交換再加以改進。從蘇聯各大城市來的數學家也曾作有組織的討論，他們得有機會對本書的原稿提供許多有價值的

議論 。他們的意見和提示皆供作者們參考應用 。

有些章的作者對其他各章的最後定稿也曾直接參加一份：第二章的引論部份主要是由得龍（ B. N. Delone ）所寫；而法得夫（D. K. Faddeev）對於第四章及第二十章的製作皆曾盡力。

又各章有時除作者外還有別的人的分工：第十四章的第四節是由康脫若維（ L. V. Kantorovic ）寫的，第六章第六節是由拉辛斯卡（ O. A. Ladyženskaja）寫的，第十章第五節是由波斯尼可夫（A. G. Postnikov）所寫；又第五章的文字曾有歐林尼克（ O. A. Oleinik ）的加工及第十一章有普若荷夫的加工 。

第一，二，七及十七各章中的若干節是由查加勒（ V. A. Zalgaller ）所寫；正文定稿的最後編輯工作是由查加勒及維登斯基（V. S. Videnskii）所擔任，並有若高金亞（ T. V. Rogozkinaja ）及林諾瓦亞（A. P. Leonovaja）的合作 。

大部份的插圖是由辛金（ E. P. Senkin ）製作的 。

莫斯科　　　　　　　　　　　　編輯部
1956

目 錄

第一部份

第二部份

第三章　解析幾何

第一章　數學概說

欲把一門科學介紹清楚，必須縷述這整個科學的主要性質，如果忽略了這點而專講細節，則不論講的怎樣詳細，也不能予人以完整的概念．本章的目的在把數學的主要性質作一概括的敍述及檢討．由於我們根據初等數學及科學發展史已可對數學的特性作一些一般性的結論，所以本章裏用不着介紹近年來各種數學理論發展的詳細情形．

第一節　數學的特性

1. 抽象，證明，應用　．一個人只要稍具數學常識，就不難覺察數學的某些特性，如抽象性、精確性、邏輯謹嚴性、結論的不可辯駁性、以及應用範圍的異常廣大性。

我們很容易看出數學的抽象性：我們用抽象的數進行運算，而不管在每一種運算裏，這些數到底是與甚麼事物相關．在小學裏，學生背的乘法表是用抽象的數乘抽象的數，而不是用兒童的人數乘蘋果的個數，或者是用蘋果數乘每個蘋果的價錢．

同樣地，在幾何裏，我們討論直線而不討論絲線或棉線，前者是抽象的線，後者是具體的線；而幾何直線的觀念，除了向一方面延長以外，是把其他的性質拋掉而抽象得來的．更廣泛地說，一個幾何形，乃自實物的性質中抽象得來，只剩下空間的形狀及維度等．

像這類的抽象，就是整個數學的一個徵性．整數與幾何形體的觀念只不過是數學裏最早與最初等的兩個觀念罷了．繼它們之後，還有更多的數學觀念．諸如複數、函數、積分、微分、泛函數、n 維空

間馴至無限維空間等都是的．這些抽象名詞，一個又一個地堆積起來其寬泛抽象已達極高的程度，以致顯明地已與人們的日常生活完全脫了節，而一般塵世中的人對它們所知道的只有不可思議而已．

當然，實際情形並非如此，n 維空間的觀念雖然無疑地極爲抽象，可是它依然有完全眞實的內容，而這內容還不怎樣難於瞭解．在本書裏，我們要把上述種種抽象觀念的具體內容強調並講明白，俾讀者相信它們不論是在本源上或在應用上都與實際生活有關．

不過，抽象並不是數學專有的性質，每一門科學都有這種性質，甚至所有的心智活動也不例外．因此，單只數學觀念的抽象性尙不足以界說數學的特性．

數學的抽象性有三個特徵．第一，它們首要討論的是量的關係與空間的形式，而這些都是從事物所有的其他性質中抽象得來的．第二，數學的抽象性，其發生是一連串的，抽象的程度越來越深，所達的抽象境界遠比其他的科學深遠．關於這兩個特徵，我們在後面要用數與形的基本觀念詳細解釋．第三個特徵是顯而易見的，即數學的活動幾乎完全限於各種抽象觀念及它們彼此關係的領域裏．自然科學家經常要把他們發明的理論或得到的結果用試驗去印證，數學家則只做論證與計算的工作．

我們不否認數學家常使用模型與物理模擬來幫助他們發現定理或方法，並且也常求助於種種完全具體的例子；這些例子常常就是一個數學理論的實際起源，並爲發現定理的媒介．但是凡能成爲數學上的定理者，沒有一個不是曾經經過嚴格的邏輯論證的．假如某幾何家說他新發現了一個幾何定理而只用模型去證明它，則沒有一個數學家會承認這定理已經得到證明．我們都知道，在中學裏，幾何須有證明；其實，在整個數學裏都是這樣．我們可以極其精確地去量成千成萬的等腰三角形的二底角，可是這樣的辦法絕對不能作爲“等腰三角形二底角相等”定理的數學證明．數學家們要這結果必須係導自幾何的基本觀念．由於現在的幾何是從一個嚴格的基礎上發展出來的，所以這些基本觀念都精確地陳述在幾何的公設裏．這在數學的其他科目，情形也是一樣．對於數學家而言，他們證明一個定埋，即是用邏輯的論

證，從這定理內諸觀念的基本性質來推出這定理。這樣一來，不僅數學觀念，而且還有數學方法，全部是抽象的與理論性的。

數學結果的特異之處是其邏輯的高度嚴格性；數學論證的嚴密足使其無懈可擊，並且足以說服任何懂得它的人。在高中數學裏，大家大概已經知道數學證明的嚴密及其服人的力量。事實上，數學眞理是完全無可辯駁的典型。人們常說："清楚的像二加二等於四一樣"，這話是不無道理的。這裏的二加二等於四的關係就是無可辯駁的寫照

不過，數學的嚴格性並不是絕對的。它的嚴格只出現在一個連續發展的過程中。而數學原理尙未定型，它有它的生命，它甚至還可以成爲科學爭論的主題。

最後的分析顯示，數學的活力在於它的觀念與結果，儘管極其抽象，却是源自實際的世界，並在工程上、其他科學上、及日常生活的事物上有廣大的用途。我們在後文將可看到這點。認淸這一點乃瞭解數學最要緊的先決條件。

數學的另一個特性是它具有非常廣大的用途。首先，在工業上、在私人及社會生活裏，我們幾乎時時刻刻都在用數學的種種觀念及結果，只不過沒有意識到在用它們而已。例如，我們用運算去計算日常費用與用幾何去計算公寓面積都是。當然，現在看起來，計算這類問題的規則很簡單；不過我們要知道，在遠古的時候，像這類的計算已算是當時最最進步的成就。

其次，如果沒有數學，就沒有今日的工藝。我們可以說，大概沒有一種技術程序不是經過或繁或簡的數學計算而完成的。此外，數學在新工藝的發展上，也佔有很重要的地位。

最後，每一種科學都多多少少地用到數學　我們都知道，精確科學裏的力學、天文學、與物理學，範圍再廣些還可包括化學，這幾門科學，都是用公式來表示它們的定律，並廣泛地使用數學作爲發展它們定理的工具。如果沒有數學，這幾門科學可說不可能有任何進步。因此，很久以來，力學、天文學、與物理學上的需求對於數學的發展一直具有直接而決定的影響。

數學在其他的科學上雖然沒有上面所說的那麼重要，但它仍有重

要的應用．在研究像生物學或社會學的複雜現象時，數學方法所扮演角色就不像它在物理學裏的重要．不過我們必須記住數學的應用，在所有的情形下，尤其是事物現象特別複雜時，如果我們不漫無目的地玩弄數學公式，則只有當具體的現象已成爲一個精深理論的主題時，數學的應用才有意義．幾乎所有的科學、從力學到政治經濟，都以種種方式用到數學．

下面講幾個數學在精確科學上與工程技藝上應用的傑出例子．

海王星是太陽系裏的一個外圍行星，發現於1846年，它就是根據數學計算而發現的．原來，天文家亞丹姆斯與賴維利耶二人在分析天王星運行的某些不規律的情形以後，認爲它所以發生這些不規律的現象，是因爲受另外一個行星吸引的緣故．賴維利耶根據力學定律算出這行星應在的方位，把計算的結果通知一個天文觀察者，這人在賴維利耶指稱的方向發現了這顆海王星．這一發現，不只是力學與天文學的勝利，特別是哥白尼學說的勝利，而且也是數學推求及計算力量的勝利．

另一樁事情是電磁波的發現，這事也一樣地動人心目．英國的物理家麥克士威爾歸納人們由試驗而建立的電磁現象定律，並予以推廣演出若干足以表示這些定律的方程式．他用純粹的數學方法從這些方程式裏推得電磁波可能存在，並且一定是以光的速度傳播出去．根據這一結果，他乃提出了著名的光之電磁說．此說後來在很多方面都有廣泛而深入的發展．還有，他的這個結果導引人們去探尋純出自電源的電磁波（例如出自振動電荷的）．這種電磁波實際是由德國的物理家赫芝首先發現的．此後不久，麥抱夫發現了激勵、發射、及接收電磁波振動的方法，使它能用在種種不同的地方，從而奠定了整個無線電技術的基礎．無線電在現在是盡人可有的，可是它的發明，純數學演繹的結果却佔有重要的地位．

科學就像這樣的，從觀察（例如磁針受通電導線的吸引而偏轉），而歸納推廣，而衍出理論，而形成定律，而表示爲數學的式子．從這些定律裏再演繹出新的結果．最後把理論付諸實用，而實用的結果轉又產生新的刺激促使發展新的理論．

數學上最引人注意的事情是：有些最抽象的構造，起自數學本身而非源自自然科學或工藝需要的直接刺激，但後來却有很大的用途．例如，虛數最初起源於代數，它在實際世界上的意義經過很長的一段時間還不能爲人瞭解，而它的名字叫虛數或想像的數也正說明這一事實．但是自從在1800年左右，數學家們給它一個幾何的解釋（參閱第四章第三節）以後，它乃根深蒂固地躋身在數學裏，衍生出廣博的複變數（即形如 $x+y\sqrt{-1}$ 的變數）之函數論．這個由虛變數形成的虛函數，不但一點也不虛，而且還是求解工藝技術的一種很實用的工具．譬如，朱可夫斯基的關於飛機機翼昇力的基本結果就是藉這函數論證出來的．又複變數函數論在求解堤壩下面滲水問題時也非常有用，現在世界各國紛紛都在興建大的水力發電廠，這當然是一個很重要的實際問題．

另一個同等重要的例子是非歐幾何*．這幾何是從歐幾里得時代起，前後歷經兩千年，爲證明一個純數學的問題——平行公設——而產生．勞巴柴夫斯基是這新幾何的創立人．他小心地給它起個名字爲想像的幾何．這是因爲他看不出這幾何在現實世界裏有任何意義．不過，他相信人們遲早會找出它的意義來．他的這種幾何對於大部份的數學家不只是想像的，而且甚至是荒謬而不可想像的．然而，他的觀念却成爲幾何的一種新的發展基礎，產生了種種不同的非歐幾里得空間的理論，而這些觀念後來還成爲一般相對論（相對論裏的數學是四維空間的非歐幾何）的基礎．數學的抽象構造，就像這樣的，最初似乎是不可理解，最後則成爲導出物理學裏一個最重要理論的有力工具．同樣地，在現在的原子理論裏，在所謂量子力學裏，都曾用到很多並且很抽象的數學觀念與理論，例如無限維度空間就是其中的一個．

我們用不着再多舉例子，因爲上面的幾個例子已足夠說明數學如何廣泛地應用於日常生活與工程及科學上．在數學自身內產生的理論甚至能在精確科學及工藝的重大問題裏找到用處．這是數學除了抽象

---

*我們在此僅提出這個例子而不作進一步的說明．讀者欲知其詳，可參閱第十七章

與結果嚴格恰切外的另一特性.

2. 數學的基本性質 . 前面講數學的特性時,只指出它外在的特點,沒有觸及數學的本質.下面我們要講數學的本質.欲說明此點,至少要先回答下列幾個問題:

這些抽象的數學觀念反映的是什麼?換句話說,什麼是數學的實在主題?

爲甚麼數學裏的抽象結果看起來是這樣地令人信服,而其中的原始觀念又是這樣地明顯?換句話說,數學方法是建立在甚麼基礎上?

數學旣是極端的抽象,爲什麼它不曾空自遊戲抽象,反而有如此大的應用範圍?換句話說,數學之具有如此重大意義究當如何解釋?

最後,是什麼力量促使數學朝向更遠大的方向發展,使它的抽象性與它的廣大應用性相結合?使數學繼續成長的根基又是什麼?

欲回答這些問題,我們須對數學的內容,方法,意義,與發展有一個概念;也就是說,須瞭解它的本質.

唯心論者與形而上學家在企圖回答這些基本問題時,不僅他們自已攪得糊裏糊塗的,而且還將表作裏,把數學完全曲解了.唯心論者鑒於數學的極端抽象性與數學結果的說服力量,乃假想數學是源自純粹的思想.

實際上,數學一點也不支持唯心論者或形而上學家的這種想法.關於這點,在我們回答前列數學本質的問題以後,當可了然.欲對這些問題作一初步的說明,我們只討論算術與初等幾何的基礎便已足夠.下面就開始討論此諸問題.

第二節 算術

1. 整數的觀念 . 數(這裏,我們只講正整數)的觀念,我們現在雖然已很清楚,可是它的形成却很慢很慢.此點可由直到現在差不多仍未開化的若干種族的計數方式獲知.這些民族,有的對於比二

或三大的數到現在仍還沒有名字；有的可以稍微多數幾個數，可是超過了幾個以後，他們就只能說“很多”或者說“數不清”．現在有如此多的字都各有其清晰的名字，乃是各民族逐漸積攢而形成的．

起先，這些民族雖然能夠以他們的方式去判斷日常生活裏遇到的一組組東西的多少．可是他們却沒有數的觀念；也就是說，他們不知道數是什麼．照我們的推論，他們意識中的數一定就是成組東西的一個與其不可分的性質，他們雖可直接覺察到，但却無法清楚地分辨出來．我們現在都不太習慣於數數以至於不能想像他們所處的情況，不過我們仍可以瞭解這情形*.

進到次一較高的階段時，數已成爲一組組東西的性質，但仍沒有從這組東西裏分別出來成爲一種**抽象的數**，或成爲一種不與具體東西相關聯的普通的數．這可從有些民族對於數的命名情形明顯地看出來．例如“手”表示五，“整人”表示二十．這裏的五不是抽象的五而是說“像一隻手上的手指一樣多”，二十則是“像一個人所有的手指與足趾一樣多”.有一種與這情形完全相似的情形，就是有些民族沒有“黑”、“硬”、“圓”一類的觀念．例如，如果他們說一件東西是黑的，他們就把它與一隻烏鴉比較；假如他們說有五個東西，他們就直接把東西與一隻手比較．這樣一來，有時候就發生把不同名字的數用在不同東西上的情事，有些數用以數人，另一些數用以數船等等，直到多到十種不同的數．在這裏，他們並沒有抽象的數，只有一種用在某些東西上的稱呼．又有些民族，可說對於數目沒有單獨的名字；比方說，雖然他們能夠說“三個人”或“在三個地方”或“三個甚麼”，可是他們就沒有“三”這個字．

同樣地，我們常說這東西或那東西是黑的，但是却極少單獨說

---

*事實上，每一組東西，不論它是一群羊或是一堆木柴，都一律存在，具體而複雜，我們可以立刻由感官覺察出來．至於區別一組東西內部的個別性質及相互關係，則是意識分析的結果．原始人類的思想尙不及此，他們只把東西當作一個整體．同樣的、一個沒有研究過音樂的人聽到音樂時分辨不出它的詳細的旋律音調等特質．可是一個音樂家却能很容易地分析一個複雜的交響樂曲．

"黑",後者是一個更抽象的觀念*.

一個集合裏東西的數目是這集合的一種性質,但是這數目本身,這個**抽象數**,則是由具體集合裏抽象得來的性質而單獨去考慮它的結果,就如同我們說"黑"或"硬"一樣.正如說黑是所有煤炭色東西公有的性質一般,"五"這個數則是凡包含的東西與一隻手上手指一樣多的集合所公有的性質.在這樣的情形下,說兩個數相等是由簡單的比較而得:我們從一個集合裏取出一件東西,屈一個手指;再取一件,再屈一個;直到取完為止.推廣來說,我們可以把兩個集合裏的東西一一相配,根本不用數,便能知道一個集合裏的東西是不是比另外一個集合裏的多.例如,客人分別入席後,主人就可以知道安排的座位夠不夠,而不必數來客的人數與座位的個數.

如此,我們就可以給數下一個定義如下:每一個個別的數如"二"、"五"等都是事物集合的性質,這性質為一切能彼此一一對應的集合所共有;對於事物不能一一對應的集合,這性質互異.為發現這種性質並把它們區別清楚,也就是說,為要形成數的確定的觀念而予它們以像"六"、"十"等名字,我們必須比較很多很多的事物集合.人們像這樣地不知經過多少代,也不知道把這種比較的辦法重複了多少億萬次,然後才從其中發現了數以及數之間的關係.

2. 整數與整數之關係 .數之運算繼數之觀念而生,它係起自反映具體事物間的關係.這種關係有時甚至可從某些數的特別名稱看出.例如,美洲的某些印第安人說二十六是:"我在兩個十的上面放上一個六";這顯然是計算具體事物方法的反映.數之加法相當於把兩個集合或多個集合放在一起或結合在一起.同樣地,我們也不難瞭

---

*我們把東西的性質形成觀念的過程(例如關於東西的顏色或集合裏東西的數目)可分三個步驟,不過我們不能把各個步驟分的太明顯.第一個步驟是把主體的東西直接與別的東西比較以定義它的性質;例如,像烏鴉一般黑,或與一隻手的手指一樣多.第二個步驟裏,出現了形容字;例如黑的石頭或五棵樹.第三個步驟,把性質從東西裏抽象出來而可能單獨存在;例如"黑"或抽象數"五"

解減法、乘法與除法的具體意義．尤其是乘法，它的產生似乎顯係起自計算相同集合的習慣，也就是說，數東西時，兩個一數，或三個一數等．

人們在計數的過程裏，不僅發現並積聚起來數與數的關係，例如二加三等於五等，而且還逐漸地建立起來一些一般性的法則或定律．根據實際的經驗，人們發現加得的和不因加數次序先後而變更，而計數一個集合裏東西的個數時，數的結果不因那一個先數或那一個後數而不同．這一事實反映在**序數**與**基數**，在基本上可等而為一．（原數為第一，第二，第三等等而基數為一，二，三等等．）．這樣一來，數的出現不是各自獨立的，而是彼此相關的．

有些數的名字及寫法是用其他的數表示的．例如二十表示二（乘）十；在法文裏，八十是**四個二十**，九十是**四個二十又十**；羅馬數字Ⅷ與Ⅸ分別表示 $8=5+3$ 與 $9=10-1$ ．

一般而言，產生的數不止是分別的數，而且是一系具有相互關係與規律的數．

算術裏所探討的恰就是具有相互關係及規律的數系*．個別的抽象數自己孤立起來並沒有什麼顯見的性質，而且一般而言，對它也沒有甚麼可討論的．例如，假使我們問“六”這個數的性質，我們說 $6=5+1$ ，$6=3\cdot 2$ ，及6是30的因數等．這裏的6總是與別的數關聯着．事實上，一個數的一切性質恰正是它與其他的數的關係†．因此，我們可以說每一個算術運算都是決定數與數之間的聯繫或關係；所以算術裏所探討的是數與數之間的關係．但這些關係是事物集合實

---

*算術一詞的意義是**計算的藝術**這字得自希臘的形容字 arithmetic ．後者則是得自名詞 arithmos ，意思是數．這形容字所形容的可了解為名詞 techne（藝術或技術），但在此却略去未寫出來．

†此點可自最普通的思考獲知．任一**抽象**，如果離開它的具體基礎（正如數是從具體事物集合裏抽象得來的），則其本身即無意義；這抽象只能存在於它與其他觀念的關係裏．這些關係已隱含在任何關於此抽象的敍述裏，隱含在對此抽象所下的最不完全的定義裏．如果沒有這些關係，抽象即缺乏內容與意義，亦即，它根本不存在．抽象數之觀念，其內容是寓於數系的法則及相互的關係裏．

際的量之關係的抽象寫照，所以我們可以說算術是一門以抽象的方式來討論實際的量之關係的科學，亦即討論純關係的科學．算術並不是如唯心論者所認爲的出自純粹的思想，而是眞實事物的某些性質的反映．算術是從世世代代的長期實際經驗裏產生出來的．

3．數之記號． 當人類的社會生活變的更廣更複雜時，就遇到更廣泛的問題．人們不僅需要知道一個集合裏事物的數目並把這數目告訴別人——此項需要業已導致形成數之觀念及數之命名，而且還需要學習如何去計數逐漸增大的各種集合，如獸群裏獸的頭數、交換東西的個數、距預定日期的天數等等，並把計數的結果告訴別人．這情形絕對須要改進數的名字與數的記號．

人們顯然是從開始書寫時就開始畫數的記號．創用數的記號在算術發展上佔有重要的地位．再說，它也是走向數學符號與數學公式的第一步 第二步是創用算術運算符號及以字母來表示未知數，這是很遲很遲的事。

猶如其他的抽象觀念一樣，數的觀念也沒有直接的形像；它不能陳列出來，而只能孕育在思想裏．但思想是由語言形成的，所以如果沒有名字，就沒有觀念．記號也是名字，不過它不是口說的而是書寫的名字，寫出來以後，以可見的像的形式進入到思想裏．例如，假如我說“七”，你們怎麼想法？你們或者不至於想到由七件東西或七件其他的事物形成的集合，而只想到“7”這個記號；這裏的7就是抽象數“七”的一種有形的構造．再說，18273這個數說出來要比寫出來難的多，而且如果用任何事物集合來作它的圖像，則這圖像全然不能明確．就這樣地又經過了一段時間，才由記號產生了一些大數的

---

*於此，有一點值得說明，就是數的觀念費了這樣長久的時間，歷經種種的困難才建立起來，爲什麼現在連一個小孩子都可以不費多少氣力就能熟悉？頭一個原因當然是小孩子經常聽大人說數．看大人用數，耳濡目染，再加上大人的教導，所以能很快地熟習它．第二個原因是數的名字與記號已經創造出來，小孩子一生坐下來就有了，他們先學着認識它們的外形，然後再熟練它們的意義，當然不費多少心力．這第二個原因，記號已經發展出來，是我們要特別提請大家注意的．