飞行力学中的最优化问题

郑本武

目　录

第一章　无条件极值的变分问题

§1—1　引　言

在微积分教程里。我们研究过函数

$$y = f(x)$$

的极值问题。其必要条件是函数y对自变量x的一阶导数为零：

$$\frac{dy}{dx} = 0\ 。$$

在飞机的飞行性能计算中。我们利用这个原理求出了飞机的最大升阻比。如果飞机的阻力系数表为：

$$C_x = C_{x0} + AC_y^2$$

则利用关系式

min

$$\frac{\partial}{\partial C_y}\left(\frac{C_x}{C_y}\right) = 0 \quad 及 \quad \frac{\partial^2 (C_x / C_y)}{\partial C_y^2} = 2A > 0\ 。$$

求得：

$$\left(\frac{C_y}{C_x}\right)_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{AC_{x0}}}\ 。$$

变分法是研究更为复杂的一类变量—称之为泛函的极值问题。设变量J，对于某一类函数{x(t)}的每一个函数x(t)。都有一确定的值与之对应。则称J为依赖于函数x(t)的泛函。记为

$y=f(x)$

$$J = J[x(t)]$$

或简记为J。简单地说。泛函J是函数x(t)的函数。凡变量值是由一个或多个函数的选取而确定的。这个变量就叫泛函。函数的值是由自变量的选取而定的。而泛函的值是由函数的选取而定的。因此他们之

间是有区别的。为了便于理解变分的命题和泛函的含意，我们将从历史上有名的三个变分命题讲起。

1．最速降线问题

设A、B两点不在同一铅垂线上。在连结A、B两点的曲线族中，选取一条曲线，使质点受重力作用在不考虑摩擦情况下，从A点到B点自由下滑所需时间最短。（见图1－1）

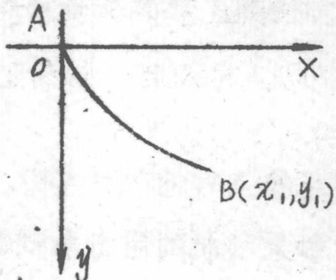

图 1－1

如选A点为坐标原点，水平线为x轴，铅垂线为y轴，并设质点的初速度为零，则根据力学可知，质点运动的速度等于

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}$$

$\frac{1}{2}mv^2=mgy$

$v^2=2gy \quad v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}$

S为曲线从A点算起的弧长，而弧长的元素为

$$ds=(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+y'^2}\,dx\ 。$$

从而可求出质点从A（O，O）滑动至B（x_1，y_1）所需的总时间T为：

$$T=\int_0^T dt=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx;\quad (1-1)$$

两端点是固定不动的：

$$y(0)=0\ ,$$

$$y(x_1)=y_1\ 。$$

当函数y(x)给定时，就可积分式（1－1）获得T值。对于不同的y＝y(x)，T也不同，所以T是y(x)的函数，即泛函J＝T。

显而易见。最快的路线决不是连结A B两点的直线段。虽然A B两点间的直线段为路程最短。因沿直线运动时。运动速度的增长是比较慢的。如果我们取一条由A起下降得较 陡的路程。虽然路线是加长了。但在路径相当大的一部分中。质点的运动速度较大。故所需的总时间反而减小。

最速降线问题是约翰．伯努利在1 6 9 6年以公开信的形式提出来的。曾引起了广泛的注意。后来由其兄弟雅可比·伯努利。牛顿。罗比达等人的工作。得到了较完善的解答。由结果可知。最速降线就是圆滚线（见2 1页）。

2．短程线问题

求曲面φ（x，y，z）＝0（图1－2）上所给两点（A(x_1，y_1，z_1)，（B（x_2，y_2，z_2））间长度最短的曲线。这个最短曲线叫做短程线。从图1－2可以看出。A和B两点间的长度为

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx \qquad (1-2)$$

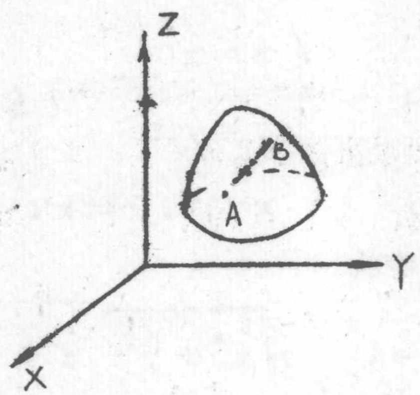

图 1－2

其中 $y=y(x)$，$Z=Z(x)$ 应满足φ（x，y，z）＝0这个条件。也就是说连结A、B两点的曲线段必须处在曲面φ（x，y，z）＝0上。

如果φ（x，y，z）＝0是球面方程。则连结A、B两点的曲线段就处在该方程所决定的球面上。在曲面φ（x，y，z）＝0上连结A、B两点的曲线是非常之多的。我们的变分命题是选取一对y(x)， z(x)，使泛函J＝L最小。

这个命题与最速降线问题的主要不同之点是，在最速降线的问题中，对y(x)的选取设有规定任何条件，故属于无条件极值问题；而短程线的y(x)，z(x)的选取，限制在曲面φ（x，y，z）＝0上的，是属于条件极值问题。这个问题已经在1697年为约翰·伯努利所解决。但解这一类问题的普遍理论，为后来的欧拉（1744），拉格朗日所解决。

3．等周问题

给定一条定长曲线l，求其所围面积为最大的曲线形状。远在希腊古时就已经知道是一个圆周（图1－3）。但它的变分问题直到十八世纪才被欧拉所解决。

设曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$$

$$x(t_1) = x(t_2),\quad y(t_1) = y(t_2)。$$

则曲线的长

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

而曲线所围的面积为（根据格林定理）

$$S = \iint dxdy = \frac{1}{2}\oint_c (xdy - ydx)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt 。$$

图 1－3

因此，所谓等周问题就是在约束条件

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=常数 \qquad (1-3)$$

下求泛函

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x\dot{y}-y\dot{x})\,dt \qquad (1-4)$$

的最大值的问题。

以上三个历史上有名的变分命题都是17世纪末提出来的。又都是18世纪上半叶解决的。解决过程中。欧拉和拉格朗日创立了现在大家都熟知的变分法。这个变分法后来广泛地用在数学、物理以及力学的各个方面。如：古典几何学、动力学、弹性理论、光学、电磁理论以及流体力学等领域。对力学的发展起了很重要的作用。随着航空与宇航的事业的发展。变分法在航空与宇航中的应用也已盛行。如在应用空气动力学中。用以研究飞机和导弹的部件的最佳外形。在飞行力学中。研究飞机、导弹和宇宙飞船的最优轨迹。以及空气动力学中的有限元解法。也用到变分原理。

§1－2　泛函的变分

在研究函数的极值问题时。微分或导数起很大的作用。在研究泛函的极值时。变分起着类似的作用。下面用类比的方法介绍泛函的变分及其相关的概念。

1．函数的定义和泛函的定义

函数的定义　如果对于宗量（自变量）x的某一变域中的每一个x值。y有一值与之对应。或即数y对应于数x的关系成立。则我们称变量y是宗量x的函数。即$y=y(x)$。

泛函的定义　如果对于某一类函数｛$y(x)$｝中每一函数$y(x)$，J有一值与之对应。或即数J对应于函数$y(x)$的关系式成立。　则我们称变量J是函数$y(x)$（自变函数）的泛函。即$J = J[y(x)]$。

2．函数宗量的微分和泛函宗量的变分

函数$y(x)$的宗量为x。x又称为函数$y(x)$的自变量。如果Δx表示为变量x相对于　x_1时的增量，即

$$\Delta x = x - x_1 。$$

如果x是自变量，则x的微分就是它的增量，即

$$dx = \Delta x 。$$

泛函$J[y(x)]$的宗量为$y(x)$，$y(x)$又称为泛函$J[y(x)]$的自变函数。泛函$J[y(x)]$的宗量$y(x)$相对于$y_1(x)$的增量或变分$\delta y(x)$是指两个函数间的差，即

$$\delta y(x) = y(x) - y_1(x) 。\qquad (2-1)$$

3．函数的连续性和泛函的连续性

函数的连续性　如果对于自变量x的微小改变，有函数$y(x)$的微小改变跟它相对应，则就说函数$y(x)$是连续的。亦即：

如果对于一个任给的正数ε，可以找到一个δ，当$|x - x_1| < \delta$时，能使$|y(x) - y(x_1)| < \varepsilon$，就说$y(x)$在$x = x_1$处连续。

泛函的连续性　若对于$y(x)$的微小变化，有泛函$J[y(x)]$的微小变化跟它相对应，就说泛函$J[y(x)]$是连续的。

接近度　“微小变化”一词意味着$y(x)$曲线与$y_1(x)$曲线相接近的，其接近的程度如何？需引进“接近度”的概念加以描述。

(1)　零阶接近度　当函数$y(x)$与$y_1(x)$在定义域中的一切x值，

它们之差的模很小：

$$|y(x)-y_1(x)|<\delta$$

即这两条曲线的纵坐标在每一点上都相接近。如图2－1所示。则曲线$y=y(x)$与曲线$y=y_1(x)$有零阶接近度。

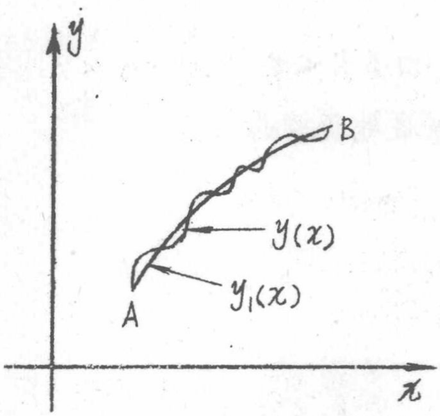

图 2－1

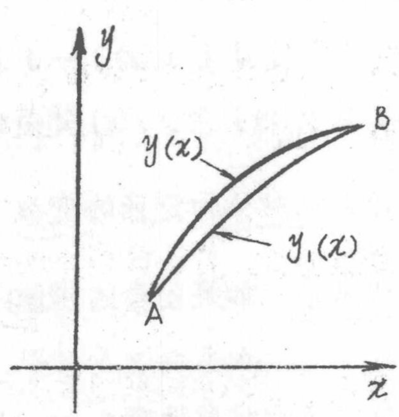

图 2－2

(2) 一阶接近度 当$|y(x)-y_1(x)|$和$|y'(x)-y_1'(x)|$都很小时。曲线$y=y(x)$和$y=y_1(x)$有一阶接近度。如图2－2所示。因此具有一阶接近度的两条曲线。也必然具有零阶接近度的。而图2－1所示的两条曲线是零阶接近的。但它们的切线方向并不接近。

(3) k阶接近度 当

$$y(x)-y_1(x),$$

$$y'(x)-y_1'(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x)$$

诸差的模都很小时。曲线$y=y(x)$和$y=y_1(x)$ 有k阶的接近度。同样它们也具有任何较低阶的接近度。

现在我们把泛函的连续性说得更准确些。如果对于任给的一个正

数ε。可以找到这样的δ，当

$$|y(x)-y_1(x)|<\delta,\quad |y'(x)-y_1'(x)|<\delta,\ \cdots\cdots$$
$$|y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x)|<\delta$$

时，就有

$$|J[y(x)]-J[y_1(x)]|<\varepsilon$$

就说泛函 $J[y(x)]$ 在 $y_1(x)$ 处是K阶接近地连续的。

4．函数的微分和泛函的变分

函数的微分　如果函数的增量

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$$

可以表为线性项和非线性项之和

$$\Delta y=A(x)\Delta x+\beta(x,\Delta x)\cdot\Delta x\ 。$$

其中 $A(x)$ 和 Δx 无关，$\beta(x,\Delta x)$ 则和 Δx 有关，而且当 $\Delta x\to 0$ 时，$\beta(x,\Delta x)\to 0$，则称 $y(x)$ 是可微的。根据导数的定义，

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[A(x)+\beta(x,\Delta x)]=A(x)\ 。$$

故函数的微分为

$$dy=y'(x)dx=A(x)dx\ 。$$

所以函数的微分是函数增量的主部。这个主部对自变量的微分 dx 来说是线性的。

另外，函数的微分还可以这样来定义，设α为一小参数，把 $y(x+\alpha\Delta x)$ 对α求导，得

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}y(x+\alpha\Delta x)=y'(x+\alpha\Delta x)\Delta x$$

当$\alpha\to 0$时，　　即$\left.\frac{\partial(y,\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=\delta y$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}y(x+\alpha\Delta x)\Big|_{\alpha=0}$$

$$=y'(x)\Delta x=dy \qquad (2-2)$$

泛函的变分　对于宗量$y(x)$的变分$\delta y(x)$所引起的泛函的增量，定义为

$$\Delta J=J[y(x)+\delta y(x)]-J[y(x)] \qquad (2-3)$$

同样也可以展开为线性泛函项和非线性泛函项之和的形式：

$$\Delta J=L[y(x),\ \delta y(x)]+\gamma[y(x),\ \delta y(x)] \qquad (2-4)$$

其中右端第一项是关于$\delta y(x)$的线性连续函数，而第二项是关于$\delta y(x)$的高阶无穷小量。那么我们就把第一项叫做泛函的变分，记为

$$\delta J=L[y(x),\ \delta y(x)] \qquad (2-5)$$

这就是说，泛函的变分就是泛函增量的线性主部。好象函数的微分就是函数的线性主部一样。例如，泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}y^2(x)\,dx$$

$$\Delta J=\int_{x_1}^{x_2}[y(x)+\delta y(x)]^2dx-\int_{x_1}^{x_2}y^2(x)dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}[2y(x)\delta y(x)]dx+\int_{x_1}^{x_2}\delta^2y(x)dx$$

因此，该泛函的变分为

$$\delta J=L[y(x),\ \delta y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}2y(x)\delta y(x)dx$$

故δJ是$\delta y(x)$的线性函数。所以δJ与$\delta y(x)$之间的关系也满足以下两个条件：

(1) $L[y(x),\ C\delta y(x)] = CL[y(x),\ \delta y(x)]$

(2) $L[y(x),\ \delta y_1(x)+\delta y_2(x)]$

$$= L[y(x),\ \delta y_1(x)] + L[y(x),\ \delta y_2(x)]\ 。 \qquad (2-6)$$

其中C是任意常数。而第二项为

$$\gamma[y(x),\ \delta y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \delta^2 y(x)\,dx\ 。$$

$\gamma[y(x)。\delta y]$是δy的高阶无穷小量。当$\delta y\to 0$时$\gamma[y(x),\ \delta y]$比δy先趋近于0。（δy是$\delta y(x)$的简写）。

下面我们用与式（2－2）类似的方法定义泛函的变分式（2－5）。设α是一个小量。则泛函的变分为：

$\varphi(\alpha)$ $J[y(x,\alpha)]$

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial\alpha} J[y(x)+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}$$

这是拉格朗日的泛函变分定义。

由式（2－3）和式（2－4）可得：

$$J[y(x)+\alpha\delta y] = J[y(x)] + L[y(x),\ \alpha\delta y] + \gamma[y(x),\ \alpha\delta y] \qquad (2-7)$$

由于 $L[y(x)+\alpha\delta y] = \alpha L[y(x),\ \delta y]$

以及$J[y(x)]$与α无关，故有

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} J[y(x)+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0} = L[y(x),\ \delta y] + \frac{\partial}{\partial\alpha}\gamma(y(x),\ \alpha\delta y)\Big|_{\alpha=0}$$

由于$\gamma[y(x),\ \alpha\delta y]$是$\alpha\delta y$的高阶小量所以

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\gamma\left[y(x),\ \alpha\delta y\right]\Big|_{\alpha=0}=0\ ,$$

得
$$\frac{\partial}{\partial \alpha}J\left[y(x)+\alpha\delta y\right]\Big|_{\alpha=0}$$
$$=L\left[y(x),\ \delta y\right] \qquad (2-8)$$

与式（2－5）比较，可得

$$\underline{\delta J=\frac{\partial}{\partial \alpha}J\left[y(x)+\alpha\delta y\right]\Big|_{\alpha=0}} \qquad (2-9)$$

例　求泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2} y^2(x)dx$$

的变分。根据式（2－9），该泛函变分为

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial \alpha}J\left[y(x)+\alpha\delta y\right]\Big|_{\alpha=0}$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(y(x)+\alpha\delta y\right)^2\Big|_{\alpha=0}dx$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}2y(x)\delta y\,dx$$

5．极大值极小值问题

函数的极值　让我们先复习一下函数的极值。如果函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的附近的任意点上的增量

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)\geqslant 0$$

那就说，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极小值。函数的增量

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)\leqslant 0$$

那就说。函数$f(x)$在点x_0处有极大值。当函数$y=f(x)$可微时，函数在x_0处有极值的必要条件是

$$f'(x_0)=0$$

参照函数极值的定义。可以给出泛函$J[y(x)]$极值的定义。

定义　如果泛函$J[y(x)]$在曲线$y=y_0(x)$的领域内，其增量

$$\Delta J=J[y(x)]-J[y_0(x)]\geqslant 0$$

或

$$\Delta J=J[y(x)]-J[y_0(x)]\leqslant 0,$$

小　大

则称泛函$J[y(x)]$在曲线$y=y_0(x)$上达到极大值或极小值。如果泛函$J[y(x)]$可微。则在$y=y_0(x)$上的变分为零。即

$$\checkmark\quad \delta J[y_0(x),\ \delta y]=0\quad 。\qquad (2-10)$$

证明　对于任意给定的δy，$J[y_0(x)+\alpha\delta y]$是变量α的函数。我们记之为$\varphi(\alpha)$。根据假设可知。函数$\varphi(\alpha)$在$\alpha=0$时达到极值，所以它的导数在$\alpha=0$时应等于零，即

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\varphi(\alpha)\Big|_{\alpha=0}=0\quad 。$$

故

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J[y_0(x)+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}=0\quad 。$$

根据式（2－9）的定义，得

$$\delta J[y_0(x),\ \delta y]=\frac{\partial}{\partial\alpha}J[y_0(x)+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}$$

$$=L[y_0(x),\ \delta y]=0$$

$$(2-11)$$

在这里所说的泛函在$y=y_0(x)$上达到极大值（或极小值），都是相对极值。即是曲线$y=y_0(x)$与互相接近的许多曲线$y=y(x)$相比较的结果而言的。如果曲线$y=y_0(x)$与互相接近的一切曲线$y=$