

飞行力学中的最优化问题

郑本武

V212
1018

V212
1018-6

目 录



第一章 无条件极值的变分问题	1
§ 1-1 引 言	1
§ 1-2 泛函的变分	5
§ 1-3 欧拉方程	13
一 端点固定的情况	13
二 端点可变的情况	21
§ 1-4 含多个未知函数的泛函	27
一 端点固定的情况	27
二 端点可变的情况	30
§ 1-5 含有较高阶导函数的泛函	37
一 固定边界问题	37
二 可动边界问题	39
§ 1-6 泛函的二次变分 极值的充分条件	42
一 雅可比条件	44
二 勒让得条件	47
第二章 条件极值的变分问题	53
§ 2-1 $\Phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')$ = 0 型的约束	54
§ 2-2 等周问题	59
§ 2-3 混合型泛函的极值问题 Bolza 问题	64
§ 2-4 变分问题的变换	66
一 将拉格朗日问题化为迈耶问题	67



二	含有高阶导数的问题	6 7
三	含有不等式约束问题	6 8
四	迈耶问题	6 9
第三章	变分法在飞行力学中的应用	7 3
§ 3-1	超音速流中二元机翼的最小型阻问题	7 3
一	给定翼剖面面积	7 5
二	给定外形轮廓线的惯性矩	7 7
§ 3-2	火箭在真空中飞行的最优弹道	8 0
§ 3-3	飞机在垂直平面内的最佳轨迹	9 0
§ 3-4	飞机最佳上升轨迹的近似分析	9 7
第四章	动态规划	1 0 5
§ 4-1	离散型动态规划	1 0 6
§ 4-2	连续型动态规划	1 1 4
§ 4-3	用动态规划求飞机最快上升问题	1 1 8
一	解析解法	1 1 9
二	数字解法	1 2 1
第五章	最大值原理	1 2 9
§ 5-1	预备知识	1 2 9
一	状态向量和状态方程	1 2 9
二	容许控制	1 3 0
三	泛函 J	1 3 1
四	共轭组	1 3 2
五	哈密顿函数与正则方程	1 3 4

§ 5-2	终点时间固定具有自由右端条件的最大极原理	1 3 6
一、	最优控制向量 $u^*(t)$ 没有受约束的情况	1 3 8
二、	最优控制向量 $u^*(t)$ 受约束的情况	1 3 8
§ 5-3	状态变量右端受限制的情况	1 4 2
§ 5-4	终点时刻不固定的情况	1 4 9
§ 5-5	变分法与最大值原理	1 5 1
一、	利用变分法推导最大值原理	1 5 2
二、	利用最大值原理推导欧拉方程	1 5 5
§ 5-6	动态规划与最大值原理	1 5 6
第六章	用最大值原理解最优控制问题	1 6 0
§ 6-1	飞机的最快上升问题	1 6 0
§ 6-2	宇宙飞船在月球上软着陆问题	1 6 2
§ 6-3	具有复数根的二阶线性系统的快速控制问题	1 6 7
一、	无阻尼情况 ($\zeta = 0$)	1 6 8
二、	欠阻尼情况 ($1 > \zeta > 0$)	1 7 0
三、	负阻尼情况 ($-1 < \zeta < 0$)	1 7 5
§ 6-4	线性系统二次型性能指标的最优控制	1 7 6
一、	用转移矩阵求解两点边值问题	1 7 8
二、	用后退积分法求解两点边值问题	1 8 0
三、	用动态规划求解两点边值问题	1 8 3
四、	$T \rightarrow \infty$ 时的定常系统的反馈增益	1 8 5
第七章	最优控制问题的计算方法	1 9 3
§ 7-1	引言	1 9 3
一、	梯度和二阶导数矩阵	1 9 4

二 函数的凸性	1 9 8
§ 7 - 2 一维寻查方法	2 0 2
一 迭代法	2 0 2
二 牛顿法	2 0 4
三 二次插值法	2 0 6
§ 7 - 3 梯度法	2 0 7
一 用梯度法求函数的极值问题	2 0 7
二 用梯度法求解最优控制问题	2 1 0
三 有约束控制的梯度法	2 1 4
四 状态变量右端受约束情况及代价函数法	2 1 6
§ 7 - 4 二阶梯度法	2 1 6
一 用二阶梯度法求解函数的极值	2 1 7
二 用二阶梯度法求解最优控制问题	2 1 9
§ 7 - 5 共轭方向法	2 2 4
一 用共轭方向法求解函数的极值	2 2 4
二 用共轭方向法求解最优控制问题	2 3 3

第一章 无条件极值的变分问题

§ 1-1 引言

在微积分教程里。我们研究过函数

$$y = f(x)$$

的极值问题。其必要条件是函数 y 对自变量 x 的一阶导数为零：

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

在飞机的飞行性能计算中。我们利用这个原理求出了飞机的最大升阻比。如果飞机的阻力系数表为：

$$C_x = C_{x0} + A C_y^2$$

则利用关系式

$$\frac{\partial}{\partial C_y} \left(\frac{C_x}{C_y} \right) = 0 \quad \text{及} \quad \frac{\partial^2 (C_x / C_y)}{\partial C_y^2} = 2A > 0$$

求得：

$$\left(\frac{C_y}{C_x} \right)_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{A C_{x0}}}$$

变分法是研究更为复杂的一类变量——称之为泛函的极值问题。设变量 J ，对于某一类函数 $\{x(t)\}$ 的每一个函数 $x(t)$ ，都有一确定的值与之对应。则称 J 为依赖于函数 $x(t)$ 的泛函。记为

$$J = J(x(t))$$

或简记为 J 。简单地说。泛函 J 是函数 $x(t)$ 的函数。凡变量值是由一个或多个函数的选取而确定的。这个变量就叫泛函。函数的值是由自变量的选取而定的。而泛函的值是由函数的选取而定的。因此他们之

间是有区别的。为了便于理解变分的命题和泛函的含意，我们将从历史上有名的三个变分命题讲起。

1. 最速降线问题

设A、B两点不在同一铅垂线上。在连结A、B两点的曲线族中，选取一条曲线，使质点受重力作用在不考虑摩擦情况下，从A点到B点自由下滑所需时间最短。（见图1-1）

如选A点为坐标原点。水平线为x轴，铅垂线为y轴，并设质点的初速度为零，则根据力学可知：质点的速度等于

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= mgy \\ v^2 &= 2gy \quad v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy} \end{aligned}$$

S为曲线从A点算起的弧长，而弧长的元素为

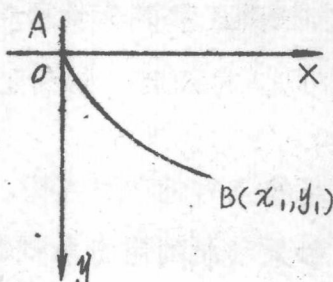


图 1-1

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

从而可求出质点从A(0, 0)滑动至B(x₁, y₁)所需的总时间T为：

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx; \quad (1-1)$$

两端点是固定不动的：

$$y(0) = 0,$$

$$y(x_1) = y_1.$$

当函数y(x)给定时，就可积分式(1-1)获得T值。对于不同的y = y(x)，T也不同，所以T是y(x)的函数，即泛函J = T。

显而易见。最快的路线决不是连结 A B 两点的直线段。虽然 A B 两点间的直线段为路程最短。因沿直线运动时。运动速度的增长是比较慢的。如果我们取一条由 A 起下降得较陡的路程。虽然路线是加长了。但在路径相当大的一部分中。质点的运动速度较大。故所需的总时间反而减小。

最速降线问题是约翰·伯努利在 1696 年以公开信的形式提出来的。曾引起了广泛的注意。后来由其兄弟雅可比·伯努利。牛顿。罗比达等人的工作。得到了较完善的解答。由结果可知。最速降线就是圆滚线（见 21 页）。

2. 短程线问题

求曲面 $\varphi(x, y, z) = 0$ (图 1-2) 上所给两点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 间长度最短的曲线。这个最短曲线叫做短程线。从图 1-2 可以看出。A 和 B 两点间的长度为

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx \quad (1-2)$$

其中 $y = y(x)$, $z = z(x)$ 应满足 $\varphi(x, y, z) = 0$ 这个条件。也就是说连结 A、B 两点的曲线段必须处在曲面 $\varphi(x, y, z) = 0$ 上。

如果 $\varphi(x, y, z) = 0$ 是球面方程。则连结 A、B 两点的曲线段就处在该方程所决定的球面上。在曲面 $\varphi(x, y, z) = 0$ 上连结 A、B 两点的曲线是非常之多的。我们的变分命题是选取一对 $y(x)$ 。

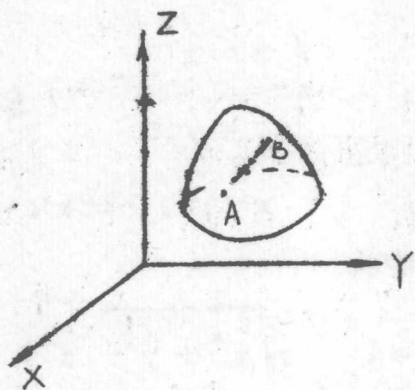


图 1-2

$z(x)$ 。使泛函 $J = L$ 最小。

这个命题与最速降线问题的主要不同之点是，在最速降线的问题中，对 $y(x)$ 的选取设有规定任何条件，故属于无条件极值问题；而短程线的 $y(x)$ ， $z(x)$ 的选取，限制在曲面 $\varphi(x, y, z) = 0$ 上的，是属于条件极值问题。这个问题已经在 1697 年为约翰·伯努利所解决。但解这一类问题的普遍理论，为后来的欧拉 (1744)、拉格朗日所解决。

3. 等周问题

给定一条定长曲线 l 。求其所围面积为最大的曲线形状。远在希腊古时就已经知道是一个圆周 (图 1-3)。但它的变分问题直到十八世纪才被欧拉所解决。

设曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

$$x(t_1) = x(t_2), \quad y(t_1) = y(t_2).$$

则曲线的长

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

而曲线所围的面积为 (根据格林定理)

$$S = \iint dx dy = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x \dot{y} - y \dot{x}) dt.$$

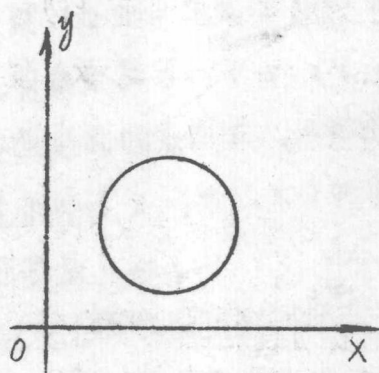


图 1-3

因此，所谓等周问题就是在约束条件

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \text{常数} \quad (1-3)$$

下求泛函

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x \dot{y} - y \dot{x}) dt \quad (1-4)$$

的最大值的问题。

以上三个历史上有名的变分命题都是17世纪末提出来的。又都是18世纪上半叶解决的。解决过程中，欧拉和拉格朗日创立了现在大家都熟知的变分法。这个变分法后来广泛地用在数学、物理以及力学的各个方面。如：古典几何学、动力学、弹性理论、光学、电磁理论以及流体力学等领域。对力学的发展起了很重要的作用。随着航空与宇航的事业的发展，变分法在航空与宇航中的应用也已盛行。如：应用空气动力学中，用以研究飞机和导弹的部件的最佳外形。在飞行力学中，研究飞机、导弹和宇宙飞船的最优轨迹。以及空气动力学中的有限元解法，也用到变分原理。

§ 1-2 泛函的变分

在研究函数的极值问题时，微分或导数起很大的作用。在研究泛函的极值时，变分起着类似的作用。下面用类比的方法介绍泛函的变分及其相关的概念。

1. 函数的定义和泛函的定义

函数的定义 如果对于宗量（自变量） x 的某一变域中的每一个 x 值， y 有一值与之对应。或即数 y 对应于数 x 的关系成立，则我们称变量 y 是宗量 x 的函数。即 $y = y(x)$ 。

泛函的定义 如果对于某一类函数 $\{y(x)\}$ 中每一函数 $y(x)$ ， J 有一值与之对应，或即数 J 对应于函数 $y(x)$ 的关系式成立，则我们称变量 J 是函数 $y(x)$ (自变函数) 的泛函。即 $J = J[y(x)]$ 。

2. 函数宗量的微分和泛函宗量的变分

函数 $y(x)$ 的宗量为 x ， x 又称为函数 $y(x)$ 的自变量。如果 Δx 表示为变量 x 相对于 x_1 时的增量，即

$$\Delta x = x - x_1。$$

如果 x 是自变量，则 x 的微分就是它的增量，即

$$dx = \Delta x。$$

泛函 $J[y(x)]$ 的宗量为 $y(x)$ ， $y(x)$ 又称为泛函 $J[y(x)]$ 的自变函数。泛函 $J[y(x)]$ 的宗量 $y(x)$ 相对于 $y_1(x)$ 的增量或变分 $\delta y(x)$ 是指两个函数间的差，即

$$\delta y(x) = y(x) - y_1(x)。 \quad (2-1)$$

3. 函数的连续性和泛函的连续性

函数的连续性 如果对于自变量 x 的微小改变，有函数 $y(x)$ 的微小改变跟它相对应，则就说函数 $y(x)$ 是连续的。亦即：

如果对于一个任给的正数 ε ，可以找到一个 δ ，当 $|x - x_1| < \delta$ 时，能使 $|y(x) - y(x_1)| < \varepsilon$ ，就说 $y(x)$ 在 $x = x_1$ 处连续。

泛函的连续性 若对于 $y(x)$ 的微小变化，有泛函 $J[y(x)]$ 的微小变化跟它相对应，就说泛函 $J[y(x)]$ 是连续的。

接近度 “微小变化”一词意味着 $y(x)$ 曲线与 $y_1(x)$ 曲线相接近的，其接近的程度如何？需引进“接近度”的概念加以描述。

(1) 零阶接近度 当函数 $y(x)$ 与 $y_1(x)$ 在定义域中的一切 x 值，

它们之差的模很小,

$$|y(x) - y_1(x)| < \delta$$

即这两条曲线的纵坐标在每一点上都相接近。如图 2-1 所示。则曲线 $y = y(x)$ 与曲线 $y = y_1(x)$ 有零阶接近度。

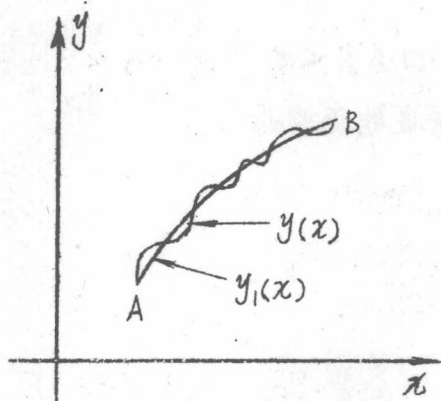


图 2-1

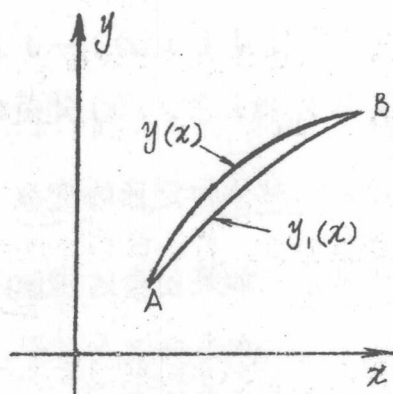


图 2-2

(2) 一阶接近度 当 $|y(x) - y_1(x)|$ 和 $|y'(x) - y_1'(x)|$ 都很小时, 曲线 $y = y(x)$ 和 $y = y_1(x)$ 有一阶接近度。如图 2-2 所示。因此具有一阶接近度的两条曲线, 也必然具有零阶接近度的。而图 2-1 所示的两条曲线是零阶接近的, 但它们的切线方向并不接近。

(3) k 阶接近度 当

$$y(x) - y_1(x),$$

$$y'(x) - y_1'(x),$$

.....

$$y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)$$

诸差的模都很小时, 曲线 $y = y(x)$ 和 $y = y_1(x)$ 有 k 阶的接近度。同样它们也具有任何较低阶的接近度。

现在我们把泛函的连续性说得更准确些。如果对于任给的一个正

数 ε 。可以找到这样的 δ ，当

$$\begin{aligned} |y(x) - y_1(x)| < \delta, \quad |y'(x) - y_1'(x)| < \delta, \quad \dots\dots \\ |y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)| < \delta. \end{aligned}$$

时，就有

$$|J(y(x)) - J(y_1(x))| < \varepsilon$$

就说泛函 $J(y(x))$ 在 $y_1(x)$ 处是 K 阶接近地连续的。

4. 函数的微分和泛函的变分

函数的微分 如果函数的增量

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$$

可以表为线性项和非线性项之和

$$\Delta y = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x) \cdot \Delta x.$$

其中 $A(x)$ 和 Δx 无关， $\beta(x, \Delta x)$ 则和 Δx 有关，而且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时， $\beta(x, \Delta x) \rightarrow 0$ ，则称 $y(x)$ 是可微的。根据导数的定义，

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [A(x) \\ &\quad + \beta(x, \Delta x)] = A(x). \end{aligned}$$

故函数的微分为

$$dy = y'(x)dx = A(x)dx.$$

所以函数的微分是函数增量的主部，⁽¹⁾ 这个主部对自变量的微分 dx 来说是线性的。⁽²⁾

另外，函数的微分还可以这样来定义，设 α 为一小参数，把 $y(x + \alpha \Delta x)$ 对 α 求导，得

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x + \alpha \Delta x) = y'(x + \alpha \Delta x) \Delta x$$

当 $\alpha \rightarrow 0$ 时,

即 $\frac{\partial(y, x)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \delta y$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x + \alpha \Delta x) \Big|_{\alpha=0}$$

$$= y'(x) \Delta x = dy \quad (2-2)$$

泛函的变分 对于宗量 $y(x)$ 的变分 $\delta y(x)$ 所引起的泛函的增量定义为

$$\Delta J = J[y(x) + \delta y(x)] - J[y(x)] \quad (2-3)$$

同样也可以展开为线性泛函项和非线性泛函项之和的形式:

$$\Delta J = L[y(x), \delta y(x)] + \gamma[y(x), \delta y(x)] \quad (2-4)$$

其中右端第一项是关于 $\delta y(x)$ 的线性连续函数。而第二项是关于 $\delta y(x)$ 的高阶无穷小量。那么我们就把第一项叫做泛函的变分, 记为

$$\delta J = L[y(x), \delta y(x)] \quad (2-5)$$

这就是说, 泛函的变分就是泛函增量的线性主部。好象函数的微分就是函数的线性主部一样。例如, 泛函

$$J = \int_{x_1}^{x_2} y^2(x) dx$$

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{x_1}^{x_2} [y(x) + \delta y(x)]^2 dx - \int_{x_1}^{x_2} y^2(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} [2y(x)\delta y(x)] dx + \int_{x_1}^{x_2} \delta^2 y(x) dx \end{aligned}$$

因此, 该泛函的变分为

$$\delta J = L[y(x), \delta y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} 2y(x)\delta y(x) dx$$

故 δJ 是 $\delta y(x)$ 的线性函数。所以 δJ 与 $\delta y(x)$ 之间的关系也满足以下两个条件:

$$(1) \quad L\{y(x), C \delta y(x)\} = C L\{y(x), \delta y(x)\}$$

$$(2) \quad L\{y(x), \delta y_1(x) + \delta y_2(x)\} \\ = L\{y(x), \delta y_1(x)\} + L\{y(x), \delta y_2(x)\} \quad (2-6)$$

其中 C 是任意常数。而第二项为

$$\gamma\{y(x), \delta y(x)\} = \int_{x_1}^x \delta^2 y(x) dx \quad .$$

$\gamma\{y(x), \delta y\}$ 是 δy 的高阶无穷小量。当 $\delta y \rightarrow 0$ 时 $\gamma\{y(x), \delta y\}$ 比 δy 先趋近于 0。 (δy 是 $\delta y(x)$ 的简写)。

下面我们用与式 (2-2) 类似的方法定义泛函的变分式 (2-5)。设 α 是一个小量。则泛函的变分为：

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J\{y(x) + \alpha \delta y\} \Big|_{\alpha=0}$$

这是拉格朗日的泛函变分定义。

由式 (2-3) 和式 (2-4) 可得：

$$J\{y(x) + \alpha \delta y\} = J\{y(x)\} \\ + L\{y(x), \alpha \delta y\} + \gamma\{y(x), \alpha \delta y\} \quad (2-7)$$

由于 $L\{y(x), \alpha \delta y\} = \alpha L\{y(x), \delta y\}$

以及 $J\{y(x)\}$ 与 α 无关，故有

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J\{y(x) + \alpha \delta y\} \Big|_{\alpha=0} = L\{y(x), \delta y\} \\ + \frac{\partial}{\partial \alpha} \gamma\{y(x), \alpha \delta y\} \Big|_{\alpha=0}$$

由于 $\gamma\{y(x), \alpha \delta y\}$ 是 $\alpha \delta y$ 的高阶小量，所以

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \gamma(y(x), \alpha \delta y) \Big|_{\alpha=0} = 0,$$

得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} J(y(x) + \alpha \delta y) \Big|_{\alpha=0} \\ = L(y(x), \delta y) \end{aligned} \quad (2-8)$$

与式(2-5)比较, 可得

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J(y(x) + \alpha \delta y) \Big|_{\alpha=0} \quad (2-9)$$

例 求泛函

$$J = \int_{x_1}^{x_2} y^2(x) dx$$

的变分。根据式(2-9), 该泛函变分为

$$\begin{aligned} \delta J &= \frac{\partial}{\partial \alpha} J(y(x) + \alpha \delta y) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (y(x) + \alpha \delta y)^2 \Big|_{\alpha=0} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} 2y(x) \delta y dx \end{aligned}$$

5. 极大值极小值问题

函数的极值 让我们先复习一下函数的极值。如果函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 的附近的任意点上的增量

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \geq 0$$

那就说, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极小值。函数的增量

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \leq 0$$

那就说。函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极大值。当函数 $y = f(x)$ 可微时，函数在 x_0 处有极值的必要条件是

$$f'(x_0) = 0$$

参照函数极值的定义。可以给出泛函 $J(y(x))$ 极值的定义。

定义 如果泛函 $J(y(x))$ 在曲线 $y = y_0(x)$ 的领域内，其增量

$$\Delta J = J(y(x)) - J(y_0(x)) \geq 0$$

或

$$\Delta J = J(y(x)) - J(y_0(x)) \leq 0,$$

则称泛函 $J(y(x))$ 在曲线 $y = y_0(x)$ 上达到极大值或极小值。如果泛函 $J(y(x))$ 可微，则在 $y = y_0(x)$ 上的变分为零，即

$$\delta J(y_0(x), \delta y) = 0 \quad (2-10)$$

证明 对于任意给定的 δy ， $J(y_0(x) + \alpha \delta y)$ 是变量 α 的函数。我们记之为 $\varphi(\alpha)$ 。根据假设可知，函数 $\varphi(\alpha)$ 在 $\alpha = 0$ 时达到极值，所以它的导数在 $\alpha = 0$ 时应等于零，即

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi(\alpha) \right|_{\alpha=0} = 0.$$

故

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J(y_0(x) + \alpha \delta y) \right|_{\alpha=0} = 0.$$

根据式 (2-9) 的定义，得

$$\begin{aligned} \delta J(y_0(x), \delta y) &= \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J(y_0(x) + \alpha \delta y) \right|_{\alpha=0} \\ &= L(y_0(x), \delta y) = 0 \end{aligned}$$

(2-11)

在这里所说的泛函在 $y = y_0(x)$ 上达到极大值（或极小值），都是相对极值。即是曲线 $y = y_0(x)$ 与互相接近的许多曲线 $y = y(x)$ 相比较的结果而言的。如果曲线 $y = y_0(x)$ 与互相接近的一切曲线 $y =$