数理哲学导论

〔英〕罗素著

晏成书译

商务印书馆

1982年·北京

目　录

序　　言

这本书原本是想作为一个“导论”，而不是想对它所处理的问题作一个详尽的讨论。有些结果直到现在为止只是对于精通逻辑符号的人才可以应用，但是将它们用一种给初学者最少困难的方式陈述出来，这一点似乎还是可望作到的。关于那些仍然受到严重怀疑的问题，我们已经作了最大的努力以避免武断，在某种程度上这种努力支配了我们所要讨论的题目的选择。数理逻辑的初始部分比起它稍后的部分来没有那样明确地为人知道，但是这些部分至少和后面的部分具有同样的哲学兴趣。在以下诸章中所陈述的许多东西称之为“哲学”是不适当的，尽管它们所涉及的问题包含在哲学中如此之久，以致关于它们还不曾有令人满意的科学存在。例如，无穷与连续的性质就是这样，在早日它们属于哲学，现在却归在数学中。在这个领域中所获得的许多确定的科学结果在严格的意义上或许不能认为是包含在数理哲学中。在知识的边境上有一些问题，关于这些问题至今还不曾得到比较确定的结论，人们很自然地期望数理哲学来处理这些问题。可是，除非我们认识了数学原理中比较科学的部分，对于这些问题的探讨很可能难获结果。所以一本讨论这些部分的书可以自称是一本数理哲学**导论**，虽则，除非它越出了它的范围，它很难声称它所处理的是哲学的一部分。就某些接触到本书的人看来，它所处理的一部分知识似乎取消了许多传统哲学，甚至于很大一部分流行于今日的哲学。然而也就是这种情形以及它与尚未解决的问题的关联，数理逻辑与哲学有关。因为这个原因和题目固有的重要性，将数理

逻辑的主要结果在一种既不需要数学知识，也不需要运用数学符号的能力的形式中简单地叙述出来，或许有用。虽然在这里和别处一样，从进一步研究的观点看，方法比结果更重要，但是这种方法在下面这么一本书的框架中不能很好地加以说明。希望一些读者能感到足够的兴趣，继续方法的研究，正是由于方法，数理逻辑可以有助于传统哲学问题的探讨，但是这个题目我们在下面不打算讨论。

B. 罗素

编 者 注

着重分别数理哲学与数学之哲学,认为这本书在现在的丛书* vii
中没有地位的人们可以参看作者自己在序言中关于这一点的声明。作者在那里提议:对哲学的领域作一番调整,将类、连续、无穷这样一些问题从哲学中转移到数学中,以便看出下面的定义和讨论对于"传统哲学"的关系,这个提议不必大家都赞同。但是即便哲学家们不能同意将这些范畴的评论贬低到任何特殊的科学中,无论如何,有一点很重要,就是,这些概念在数学中占据了极其重要的地位,哲学家们应该知道数学科学所赋与它们的精确意义。在另一方面,如果有些数学家觉得这些定义和讨论似乎是一种简单事物的雕琢和小题大做,我们最好从哲学那面提醒他们,这里和别处没有两样,表面的单纯可以隐藏复杂。不论对于哲学家还是数学家,或者如本书的作者那样一身二任的人,这种复杂问题的解决是他们的任务。

* 本书原来收在 J. H. Muirhead 所编的哲学丛书中。——译者

第一章　自然数串 1

数学这门学问当我们从它的最熟悉的部分开始时，可以沿着两个相反的方向进行。比较熟悉的方向是构造的，趋向于渐增的复杂，如：从整数到分数，实数，复数；从加法和乘法到微分与积分，以至更高等的数学。至于另一方向对于我们比较生疏，它是由分析我们所肯定的基本概念和命题，而进入愈来愈高的抽象和逻辑的单纯；取这种方向，我们不问从我们开始所肯定的东西能定义或推演出什么，却追问我们的出发点能从什么更普遍的概念与原理定义或推演出来。研究进行的方向不同是数理哲学的特点，就是这个特点使数理哲学与普通数学大异其趣。但是我们必须了解这区别不在主题内容，而在研究者的思想状况。早期希腊几何学家从埃及人陆地测量的经验规则，得到了能证明这些规则的普遍命题，并且由这些普遍命题达到欧几里得的公理与公设，按照上面的解释，他们确是从事于数理哲学；但如我们在欧几里得几何中所见，一旦达到公理与公设，它们的演绎的运用却属于普通意义的数 2
学。总之，数学与数理哲学之间的区分取决于激发研究的兴趣上，和研究所达到的阶段上；而不在研究所涉及的命题。

这个区别我们还可以另一种方式叙述。在数学中最明显易知的概念，从逻辑上来说，并不是初始的概念；从逻辑演绎的观点看，它们是出现在中途某处的概念。就如最易见的物体是那些既不甚远，也不很近，既不过大，也不太小的物体；同样，最易把握领会的概念是那些既不过于复杂，也不十分简单（我们用逻辑意义上所谓的“简单”）的概念。并且正如我们需要两种工具，望远镜和显微

镜，以扩大我们的视力一样；我们需要两种工具以扩张我们的逻辑能力：一个能引导我们进到高等数学；一个能带领我们追溯我们在数学中所习用、假定的概念和命题的逻辑基础。由于分析我们的普通的数学概念，追究它们的逻辑基础，我们将发现我们获得了新的见识，新的能力，并且由于在这番探讨后，采取新的前进路线，我们可以获得一种方法以达到完全崭新的数学题材。

本书的目的是简单地、不用专门技巧地解释数理哲学，凡初步讨论所难解说的、不确定的或困难的部分，不予涉及。欲求详尽的研讨，可见«数学原理»(«Principia Mathematica»)一书[①]。本书的讨论只想作为一个引论。

对于今日受过初等教育的人，数学最明显的出发点就是整数串，

$$1, 2, 3, 4\cdots \text{等等。}$$

3 或许只有稍具数学知识的人才会想到：整数是从 0 而不是从 1 开始的，但是这一点知识程度我们是要假定的，我们要以如下的数串：

$$0, 1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots$$

作为我们的出发点。此后当我们谈到"自然数串"时，我们所指的就是这一串数。

仅仅在文明的高级阶段上，我们方能以这一串数作为我们的起点。发现一对鸡、两昼夜都是数 2 的实例，一定需要很多年代，其中所包含的抽象程度确实不易达到。至于 1 是一个数的发现，也必定很困难。说到 0，这更是晚近加入的，希腊人和罗马人没有这个数字。假使我们曾经从事于早期的数理哲学的研究，我们必得从比自然数串不那么抽象的东西入手，而以自然数串作为在我

① Cambridge University Press, vol. i., 1910; vol. ii., 1911; vol. iii., 1913. Whitehead and Russell 著。

们追溯的探讨中所达到的一个阶段。反之，当我们对数学的逻辑基础逐渐熟悉时，我们可以追溯到比现在所达到的更远的地方，那时我们的出发点将是在分析中比自然数还较后的一个阶段。但是在目前，自然数似乎代表数学中最易知、最熟悉的东西。

我们对于自然数虽是熟悉，却并没有了解。什么是“数”，什么是“0”，什么是“1”，很少人严格解释过，更不用说下定义。不难看出，任何0以外的自然数能够从0开始，由重复地加1得到，但是何谓“加1”，何谓“重复地”，它们的意义是什么，我们必须加以定义。这些问题可并不容易解决。直到最近，人们都相信算术的基本概念中至少有一些由于过于简单和基本而不能定义。因为所有被定义的概念是借助于其它概念来定义的，显然，为了有一个作定义的起点，人类知识必须接受一些易明的，没有定义的概念，以此为满足。至于是否必须有**不能**定义的概念，这一点还不清楚：可能 4
在作定义时，我们由一个定义追溯到在前的一个定义，一直下去，无论我们后退多远，我们总还可以走得更远。另一方面也可能当分析进行得够远时，我们能够达到一些概念，它们实在是简单，因此在逻辑上不容下一种分析的定义。这个问题我们不必解决；为了我们的目的，只须注意，由于人类能力有限，我们所知道的定义必须从某些概念开始，这些概念虽则或许不是永远不能定义，但在当前还不曾定义。

所有传统的纯粹数学，包括解析几何在内，全可以看作是有关自然数的命题所组成。这也就是说，其中的概念可以用自然数来定义，其中的命题可以从自然数的性质推演得出。——当然，在每种情形下，还得加上一些纯逻辑的概念和命题。

很早以前就有人猜测，所有传统的纯粹数学或许都能从自然数推导出来，但是这一点的真正发现，却是非常近的事。从前，毕达哥拉斯相信，不仅数学，就是其它各种事理都能从数演绎出来，

在把数学“算术化”时，他发现一个极严重的困难，那就是不可通约量，特别是正方形的边与对角线不可通约性的存在。如果正方形边长一寸，那么对角线的寸数是 2 的平方根，可是这似乎根本不是一个数。这样引起来的问题只是在我们的时代才被解决，并且只是借助于把算术归约到逻辑才得以完全解决，这一点我们将在以下诸章中阐明。至于现在，我们姑且承认数学的算术化。虽然这是一个非常重要的功绩，但是我们不拟详论。

5 在把所有传统的纯粹数学归约到自然数的理论后，逻辑分析中的下一步骤是将这理论本身归约到最小一组前提和未定义的概念，而这理论即从它们演绎出来。这件工作为皮亚诺(Peano)所完成。他证明：除加上一些纯逻辑的概念和命题外，整个自然数的理论能够从三个基本概念和五个基本命题演绎得出。这三个概念和五个命题因而似乎可以代替全部传统的纯粹数学，假使它们能由其它的概念和命题来定义或证明，全部纯粹数学也能。如果我们可以用重量这个词，那么它们的逻辑“重量”等于从自然数的理论演绎出来的整个科学系列；所以假若引用的纯粹逻辑工具没有谬误，那么如果五个基本命题的真实性得到保证，整个系列的真实性也得以肯定。对数学进行分析的工作由于皮亚诺的研究而大获便利。

皮亚诺算术中的三个基本概念是：

0，数，后继。

他以“后继”（successor）指在自然次序中一数的次一数。也就是说，0 的后继是 1，1 的后继是 2，如此类推。至于他所谓“数”乃是指所有自然数所构成的类(class)①。他没有假定我们知道这类中所有的分子，仅假定当我们说这个或那个是一个数时，我们知道

① 在本章中我们用“数”这个字限于这种意义(按，即指包括 0 在内的自然数全体——译者)，以后我们将在更一般的意义上使用这个字。

我们何所指，正如我们不知道所有的个别的人，而当我们说"琼斯是一个人"时，我们知道我们何所指一样。

皮亚诺所肯定的五个基本命题是：

(1) 0 是一个数。

(2) 任何数的后继是一个数。

(3) 没有两个数有相同的后继。

(4) 0 不是任何数的后继。 6

(5) 任何性质，如果 0 有此性质；又如果任一数有此性质，它的后继必定也有此性质；那么所有的数都有此性质。

五个基本命题中的最后一个是数学归纳法原则。关于数学归纳法，以下将详细论述；现在我们提到它，只是因为它出现在皮亚诺的算术分析中。

我们且略加考虑从这三个概念和五个命题如何得出关于自然数的理论。首先，我们定义 1 为"0 的后继"、2 为"1 的后继"，如是继续下去。显然，我们可以用这些定义达到我们想要得到的任何的数，因为，由于(2)，我们所达到的每一个数有一个后继，并且，由于(3)，这个数不可能是任何已经定义的数，因如不然，两个不同的数会有相同的后继；又因为(4)，在这一串后继中，没有一个我们所得到的数会是 0。从而一串后继给与我们一串连续无尽的新数。由于(5)，所有的数都属于这一串数中，这一串数就是从 0 开始，由一个继续一个的后继所构成；这点其实应该分为两点来说明：因为我们知道，(a) 0 属于这一串数，又(b)假如一数 n 属于这一串数，它的后继也是如此，依据数学归纳法，每个数都属于这一串数。

如果我们希望定义两数之和，那么取任一数 m，我们定义 $m+0$ 为 m，$m+(n+1)$为 $m+n$ 的后继。由于(5)，不论 n 为何数，这就是 m 与 n 之和的定义。同样，我们能够定义任何两数之积。读者可以很容易地使自己确信，任何普通的初等算术命题都

能为这五个前提所证明，如有任何困难，可参看皮亚诺书中的证明。

现在我们要越过皮亚诺的研究而进入弗芮格(Frege)的探讨，
7 这是件必然的事，我们且思考其所以为必然的理由。我们已知皮亚诺将数学“算术化”做到最后完善的地步，弗芮格则第一个成功地将数学“逻辑化”。他的前辈们证明了一些算术概念对于数学是充分的，他再将这些算术概念归约到逻辑。本章中我们不预备实际陈述弗芮格的数和个别的数的定义，但是我们将说出一些理由，为什么皮亚诺的研究不如它看起来那样的根本，或者简单地说，不够彻底，以致还要有人作进一步的研究。

第一，皮亚诺的三个基本概念——就是“0”，“数”和“后继”——能容许无数不同的解释，所有这些解释都能满足那五个基本命题。下面我们列举几个例子。

(1) 令“0”指100，而“数”指自然数串中100以上的数。依这种解释，所有我们的基本命题，即使是第四个，都可满足。因为：虽则100是99的后继，然而99却不是一个我们当前所谓的“数”。显然，任何其它的数都可以代替这个例子中的100。

(2) 使“0”具通常的意义，而令“数”指我们通常所谓的“偶数”并且令一数的“后继”指由这数加2所得的数。于是“1”将为数二所代替，“2”将为数四所代替，如此等等。“数”串现在成为

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8, \cdots$$

所有皮亚诺的五个前提仍可满足。

(3) 令“0”指数一，“数”指如下的集合

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}\ \cdots$$

而所谓一个数的“后继”所指的就是一个数的“一半”。对于这样的一串数，所有皮亚诺的五个公理仍真。

很明显，这样的例子可能有无穷多。事实上，给定任一串

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

只要它是无尽的，不包含重复，有一个首项，并且没有一项不能从 8
首项通过有穷的步骤达到，那么我们就有一个项的集合适合皮亚诺的公理。这一点的形式证明虽然稍长，却很容易了解。我们可令“0”指 x_0，“数”指项的整个集合，并且使 x_n 的“后继”指 x_{n+1}。那么

(1) “0 是一个数”，就是说，x_0 是这个集合的分子。

(2) “任何数的后继是一个数”，即：在这个集合中任取一项 x_n，x_{n+1} 也属于这个集合，也是这个集合的一分子。

(3) “没有两个数有相同的后继”，即，如果 x_m 与 x_n 是这个集合中两个不同的分子，则 x_{m+1} 与 x_{n+1} 不同；这个结果是从在这个集合中没有重复这个假设得出的。

(4) “0 不是任何数的后继”，即：在这个集合中没有一项在 x_0 的前面。

(5) 至于皮亚诺的第五公理现在成为：任何性质，如果 x_0 有此性质，又如果 x_n 有此性质，x_{n+1} 必定也有，那么所有的 x 都有这性质。

这些性质一个一个与数的性质相对应。

如象以下形式的一串

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

在其中有一个首项，每一项有一个后继(因此没有末项)，没有重复，而且每一项可以由出发点在一有穷的步骤内达到，这样的一串叫做一个序级（progression)。序级在数学原理中具有非常的重要性。如我们适才所见，每一个序级都适合皮亚诺的五个公理。相反，也可证明：凡适合皮亚诺公理的每一个串都是一个序级。因此这五个公理可用来定义序级的类：所谓“序级”就是“那些适合这五

个公理的串”。任何序级都可以作为纯粹数学的基础:我们可以称
呼它的首项为“0”,项的整个集合为“数”，序级中一项的次一项为
9 此项的“后继”,这样的序级不必是数组成的，它可由空间的点,时
间的瞬间或者任何取之不尽的项所组成。每个不同的序级导致传统的纯粹数学所有命题的不同解释；所有这些可能的解释同样真。

在皮亚诺的系统中,关于他的基本概念的这些不同解释,我们无以区别。它假定了我们已经知道“0”的意义,而不会假定这个符号指 100,或者克利奥佩特拉的方尖碑(埃及古代两个方尖碑之一,今在伦敦——译者),或者任何它可能指称的东西。

“0”、“数”与“后继”不能用皮亚诺的五个公理去定义，而必须单独地了解,这一点非常重要。我们需要的是,我们的数不仅适合数学公式,并且能在恰当的方式中应用于普通的事物。若在一个系统中，“1”指 100，“2”指 101，如此类推，这样的系统对于纯粹数学可能完全合适,但是不能适合日常生活。我们有十个手指,两个眼睛和一个鼻子,我们需要“0”“数”与“后继”所具有的意义，能给我们的手指,眼睛,鼻子适当的定量,适当的数目。关于我们用“1”与“2”等所指的东西的知识,虽说不够明白或清晰，可是我们已经具有，我们在算术中数的用法必须符合这种知识。由皮亚诺的方法,我们不能保证这种相符的情形,如果我们采取他的方法，我们只能说:“我们知道‘0’、‘数’与‘后继’的意义是什么，然而我们不能用别的更简单的概念解释它们”。在必需时这么说是十分合法的,并且在**某些**地方我们都必需这么说,就是:“我们知道我们已有的概念的意义是什么，然而我们不能用其它更简单的概念来解释这种意义”。但是,数理哲学的目的是尽可能将这种说法推后，尽可能寻求更简单的概念以解释我们已有的概念。由于算术的逻辑理论,我们确实能将这种说法延搁一段很长的时间,确实能追溯到

一些更简单的概念。

或许有人提出，我们不能定义“0”、“数”与“后继”，也不必假定我们知道这些概念的意义，不必令它们与通常的意义相符；反之，我们可以让它们代表任何能适合皮亚诺公理的三个概念。如此，10
它们将是既未定义，也没有一个确定意义的概念：它们将是“变项”，是我们对之作某种假设——就是在五个公理中陈述的种种——但此外别无规定的概念。如果我们采取这个计划，我们的定理将不再是关于确定的项的集合，所谓“自然数”的定理，而是关于一切项的集合的定理，只要这些项的集合具有某种性质。这种方法并不荒谬，它提供一种推广，对于某种目的，确有价值。但从两个观点看来，这种方法未能为算术奠定一个适当的基础。第一，它不能使我们知道是否确有适合皮亚诺公理的项的集合；它甚至没有略略提示任何方法，以发现是否有这样的项的集合。第二，如我们已经说过的，我们需要我们的数能计数通常的事物，也就是要求我们的数不仅具有某种形式的性质，还应该具有一种**确定**的意义。这种确定的意义须以算术的逻辑理论来定义。

11

第二章 数的定义

"什么是一个数？"这个问题人们常常想到，但只是在我们这个时代才得到正确的解答。这个解答为弗芮格于一八八四年在他的《算术基础》(Grundlagen der Arithmetik)① 一书中所给出。虽然这本书十分简短，并不难，并且非常重要，可是它几乎不曾引起注意，其中所包含的数的定义事实上也是一向不为人所知，直到一九〇一年才为本书作者所发现。

在试作数的定义时，首先须将我们研究的第一步辨析明白。许多哲学家尝试作出数的定义，实际上却去定义为许多事物所形成的复合(plurality)，这是件完全不相干的事。"数"是一切数的特性，正如"人"是所有人的特性一样。许多事物所形成的复合并非是数的一例，而是某个特殊的数的实例。譬如三个人的一组是数3的实例，而数3又是数的一例；但是三人组并不是数的一例。这点似乎很浅近，不值一提；然而已经显示出，哲学家中，除了极少数的例外，这点对于他们确实是很微妙，不易想到的。

一个特殊的数和一个含有这个数目的聚合(collection)决不相
12 同：数3决不同于布朗、琼斯、鲁宾逊组成的三人组。数3是一切三个一组所共有的东西，它使它们与别的聚合不同。一个数表示出某些聚合，或者明确一点说，含有那个数目的聚合的特性。

在这里我们要作一个规定，此后我们将不再说一个"聚合"，而以一个"类"(class)或者有时以一个"集合"(set)来代替。和这些词

① 相同的然而是更充分的解答，更详细的发展，见他的《算术的基本定律》(Grundgesetze der Arithmetik)一书第一卷，该书一八九三年出版。