现代物理学丛书

# 统计物理学进展

郝柏林　于　渌　等编著

科学出版社

1981

现代物理学丛书

# 统计物理学进展

郝柏林　于　渌　等编著

科学出版社

1981

# 第一章　统计微扰论的生成泛函

郝　柏　林

（中国科学院理论物理研究所）

本章主要是为后面涉及重正化群和闭路格林函数的各章作一些准备，介绍若干量子场论知识，例如微扰论级数的生成泛函、连续积分表示、圈图展开、Callan-Symanzik 方程，复合算子的重正化等等．这些内容在基本粒子和场论工作者中均已为人所共知，而一部分统计物理和固体理论工作者则尚不甚熟悉，但在今后工作中可能经常遇到．

统计和场论的相通之处在于无穷多自由度．无穷多自由度带来的问题在统计中表现得更为单纯．统计虽然免去了量子化、相对论协变性、旋量和狄拉克矩阵等等场论中必须考虑的原则和细节，但许多困难（例如微扰论级数的发散）仍然存在．想方设法把无穷多自由度约化为少量自由度来描述，在突变点附近甚至归结为一、两个自由度，这本来是热力学和统计物理学的基本精神．但是宏观系统中无穷多自由度的涨落背景是无法完全消除的，它们有时还起着决定作用．这是统计问题不同于力学或动力系统的根本之点，这就使统计更接近于量子场论．在一定意义上说，统计物理学是一种涨落场论，在处理非平衡问题时更是这样．当然，量子性在不少统计问题中也直接表现出来．因此，场论方法在统计物理学中的广泛应用，决不仅只是基于两者数学形式的类似，还有一些更为深刻的物理原因．

还应说明一点，本章的叙述比较形式，有许多技术性的推导，并集中介绍了一些必要的基本概念和辅助知识，内容比书中以后各章所引用的要稍多．

# 第一章 统计微扰论的生成泛函

郝 柏 林
（中国科学院理论物理研究所）

本章主要是为后面涉及重正化群和闭路格林函数的各章作一些准备，介绍若干量子场论知识，例如微扰论级数的生成泛函、连续积分表示、圈图展开、Callan-Symanzik 方程，复合算子的重正化等等．这些内容在基本粒子和场论工作者中均已为人所共知，而一部分统计物理和固体理论工作者则尚不甚熟悉，但在今后工作中可能经常遇到．

统计和场论的相通之处在于无穷多自由度．无穷多自由度带来的问题在统计中表现得更为单纯．统计虽然免去了量子化、相对论协变性、旋量和狄拉克矩阵等等场论中必须考虑的原则和细节，但许多困难（例如微扰论级数的发散）仍然存在．想方设法把无穷多自由度约化为少量自由度来描述，在突变点附近甚至归结为一、两个自由度，这本来是热力学和统计物理学的基本精神．但是宏观系统中无穷多自由度的涨落背景是无法完全消除的，它们有时还起着决定作用．这是统计问题不同于力学或动力系统的根本之点，这就使统计更接近于量子场论．在一定意义上说，统计物理学是一种涨落场论，在处理非平衡问题时更是这样．当然，量子性在不少统计问题中也直接表现出来．因此，场论方法在统计物理学中的广泛应用，决不仅只是基于两者数学形式的类似，还有一些更为深刻的物理原因．

还应说明一点，本章的叙述比较形式，有许多技术性的推导，并集中介绍了一些必要的基本概念和辅助知识，内容比书中以后各章所引用的要稍多．

## §1.1 数学准备

描述无穷多自由度要使用泛函、变分导数、连续积分等概念。但作为入门，并不需要从现代数学的抽象形式开始。我们在这里采取了一种便于推导许多工作公式的实用观点，把泛函关系看作多元函数的极限情况。在叙述中不追求数学的严格性，但指出若干可供进一步查询的文献。

### 1.1.1 数、函数和泛函

对易经典数就是普通数域上的元素。实数域 R 和复数域 C 是大家熟知的，它们是无穷维的代数。有限维的域也是常见的，电子计算机中保存的数就是一例。反对易经典数是 Grassman 代数的元素，由于本书中用不到，以后不再详述(可参看[1]和[2])。

对易和反对易本身都是经典性质。"量子"性表现在对易或反对易时出现的非零补充项上。如果某个有限维或无穷维代数的任何两个元素 $a$ 和 $b$ 满足

$$ab-\eta ba=0,$$

则它们是经典的对易 ($\eta=+1$) 或反对易 ($\eta=-1$) 数。反之，如果对于某些 $a$ 和 $b$，

$$ab-\eta ba\neq 0,$$

则它们是"量子"数。

在有限线段 $(0, L)$ 上取离散点 $0, 1, \cdots, n$，令第 $i$ 点对应变量 $\varphi_i$，定义多元函数

$$F(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n),$$

取 $n\to\infty$ 极限时，离散指标 $i$ 成为连续变量 $x$，变量 $\varphi_i$ 成为场 $\varphi(x)$，多元函数 $F$ 成为函数 $\varphi(x)$ 的泛函

$$F(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)\xrightarrow{n\to\infty}F[\varphi(x)], \quad (0\leqslant x\leqslant L)$$

当然，对于不同区间如 $(-\infty, \infty)$，$(0, \infty)$ 上的 $\varphi(x)$，都可以这



样引入泛函。

多元解析函数的马克劳林级数

$$F(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{i_1}\cdots \times\sum_{i_m}\left(\frac{\partial^m F}{\partial\varphi_{i_1}\cdots\partial\varphi_{i_m}}\right)_0\varphi_{i_1}\cdots\varphi_{i_m},$$

取 $n\to\infty$ 极限，成为解析泛函：

$$F[\varphi]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int\cdots\int dx_1\cdots dx_m F^{(m)}(x_1, \cdots, x_m) \times\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_m).$$

如果 $\varphi(x)$ 是经典对易场，则系数 $F^{(m)}$ 是普通的对称函数；如果 $\varphi(x)$ 是无穷维 Grassman 代数的元素，则 $F^{(m)}$ 是完全反对称的函数。$F^{(m)}$ 可以通过泛函 $F[\varphi]$ 的变分导数来表示，这将在后面介绍。

上面取极限过程中作了下列几种"代换"，这是有普遍意义的。

(1) 离散指标 $i$ 成为连续变量 $x$；

(2) 变量 $\varphi_i$ 成为场 $\varphi(x)$；

(3) 常数成为函数；

(4) 函数成为泛函；

(5) 对离散指标的求和，换成对连续变量的求积。这里回避了测度问题，在最常见的情形下应有

$$\frac{1}{V}\sum_i\to\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dx,$$

其中 $V$ 是体积，$d$ 是空间维数。

由于我们经常要和泛函打交道，为了避免书写大量高维积分，必须简化记法。

首先，省去积分符号，对两次重复出现的自变量自动求积分。这是矩阵运算中省去求和符号，并对两次重复出现的角标自动求和("爱因斯坦规则")这一规定的推广。有时还把自变量简化为数

字.

其次,只要不引起误解,自变量也省去不写. 这是广义的矩阵记法.

最后,在对易场(玻色子)情形下,有时把算子(矩阵)的书写顺序也打乱归并.

例 1

$$\int J(x)\varphi(x)dx = J(1)\varphi(1) = J\varphi.$$

例 2

$$\frac{1}{2}\int dx_1dx_2\varphi(x_1)K(x_1, x_2)\varphi(x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\varphi(1)K(1,2)\varphi(2) = \frac{1}{2}K\varphi^2.$$

例 3 前面解析泛函的展开式可简化为

$$F[\varphi] = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}F^{(m)}(1, 2, \cdots, m)\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(m)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}F^{(m)}\varphi^m.$$

这种记法形式上与普通函数相同.以后将看到,这样作好处很多: 便于微分,不必区分坐标表示与动量表示,自动给出对称项数目等. 但必须注意,在必要时应写明自变量名字和保持正确顺序.

关于本小节的内容还可以参看[2—5].

### 1.1.2 变分导数

我们只讨论对易场情况. 对泛函的变分导数可以作为多元函数偏导数的极限引入. 多元函数自变量作无限小改变时, 函数增量的线性部分为

$$dF = F(\varphi_1 + d\varphi_1, \cdots, \varphi_n + d\varphi_n) - F(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) = \sum_i A_i d\varphi_i.$$

定义偏导数

$$A_i = \frac{\partial F}{\partial \varphi_i}.$$

同样,泛函增量的线性部分为

$$\delta F[\varphi] = F[\varphi + \delta\varphi] - F[\varphi] = \int A[\varphi, x]\delta\varphi(x)dx,$$

定义变分导数

$$A[\varphi, x] = \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)},$$

它是 $\varphi$ 的泛函,又可能是 $x$ 的函数.如同偏导数记号 $\frac{\partial F}{\partial \varphi_i}$ 的分子、分母不能分开一样,变分导数 $\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)}$ 也是不能拆开的记号.

实际计算变分导数时,可以利用如下的定义:

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi[x]} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(F[\varphi(u) + \varepsilon\delta(x-u)] - F[\varphi(u)]\right).$$

变分导数具有与普通导数相似的性质:

(1) 与 $\varphi(x)$ 无关的任意函数 $f(x)$, $g(x)$ 起普通导数中常数的作用,例如

$$\frac{\delta f(x)}{\delta\varphi(y)} = 0,$$

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\{fF[\varphi] + gG[\varphi]\} = f\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)} + g\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi(x)},$$

$$\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(y)} = \delta(x-y) \qquad \left(有时简记为 \frac{\delta\varphi}{\delta\varphi} = 1\right).$$

(2) 泛函乘积的变分导数

$$\frac{\delta}{\delta\varphi}\{F[\varphi]G[\varphi]\} = \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi}G[\varphi] + F[\varphi]\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi}.$$

(3) 复合泛函的变分导数

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}F[G[\varphi]] = \int\frac{\delta F[G]}{\delta G[\varphi(y)]}\frac{\delta G[\varphi(y)]}{\delta\varphi(x)}dy,$$

或者按上一小节中的约定，简记为

$$\frac{\delta F[G[\varphi]]}{\delta\varphi}=\frac{\delta F}{\delta G}\frac{\delta G}{\delta\varphi}.$$

(4) 多元泛函的偏变分导数

多元泛函 $F[\varphi,\psi]$ 的增量

$$\delta F=\int\left\{\frac{\delta F}{\delta\varphi(x)}\delta\varphi(x)+\frac{\delta F}{\delta\psi(x)}\delta\psi(x)\right\}dx$$

中出现偏变分导数 $\frac{\delta F}{\delta\varphi}$ 和 $\frac{\delta F}{\delta\psi}$.

下面举几个变分导数的实例.

例 1 指数泛函

$$Z[J]=\exp\left(\int dxJ(x)\varphi(x)\right)=e^{J\varphi}$$

的变分导数可简记为

$$\frac{\delta Z}{\delta J}=\varphi e^{J\varphi},$$

形式上与普通导数相同，写全了就是

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}=\varphi(x)\exp\left(\int dx\,J(x)\varphi(x)\right).$$

再提醒一下，我们这里讨论的是对易场 $\varphi(x)$.

例 2 泛函平移算子

普通一元函数的平移算子

$$f(x+T)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{n!}\frac{d^nf}{dx}=e^{T\frac{d}{dx}}f(x),$$

推广到多元函数是

$$F(\varphi_1+T_1,\cdots,\varphi_n+T_n)=e^{\sum_i T_i\frac{\delta}{\delta\varphi_i}}F(\varphi_1,\cdots,\varphi_n),$$

取 $n\to\infty$ 极限成为

$$F[\varphi+T]=e^{T\frac{\delta}{\delta\varphi}}F[\varphi],$$

其中

$$T\frac{\delta}{\delta\varphi}=\int T(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}dx.$$

例 3 解析泛函

$$Z[J]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}G^{(n)}J^n$$

的变分导数

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}G^{(n+1)}J^n,$$

如果不采用简化记法，就要经过 $\delta$ 函数的积分和变量代换才能求出。这个例子清楚表明，变分导数 $\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}=A[J,x]$ 不仅是 $J$ 的泛函，而且是 $x$ 的函数，

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_nG^{(n+1)}(x,x_1,\cdots,x_n)\times J(x_1)\cdots J(x_n).$$

类似地，可以定义高阶变分导数，特别是

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=\left.\frac{\delta^nZ[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J(x_i)=0}.$$

例 4 作为练习，可以推出以下微分公式

$$\left[\frac{\delta}{\delta J(y)},J(x_1)\cdots J(x_n)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\delta(y-x_i)J(x_1)\cdots\hat{J}(x_i)\cdots J(x_n),$$

$\hat{J}(x_i)$ 上的帽子“∧”表示乘积中缺这一因子，以及

$$\left[\frac{\delta^2}{\delta J^2},J^2\right]=2+4J\frac{\delta}{\delta J},$$

$$\left[\frac{\delta^4}{\delta J^4},J^2\right]=12\frac{\delta^2}{\delta J^2}+8J\frac{\delta^3}{\delta J^3},$$

$$\left[\left[\frac{\delta^4}{\delta J^4}, J^2\right], J^2\right] = 24 + 96J\frac{\delta}{\delta J} + 48J\frac{\delta^2}{\delta J^2}$$

等等．这些式子中出现的数字系数指明写全自变量后应有的对称化项数．例如上面第一式是

$$\left[\frac{\delta^2}{\delta J(1)\delta J(2)}, J(3)J(4)\right] = \delta_{13}\delta_{24} + \delta_{14}\delta_{23} + J(3)\frac{\delta}{\delta J(1)}$$

$$+ J(3)\frac{\delta}{\delta J(2)} + J(4)\frac{\delta}{\delta J(1)} + J(4)\frac{\delta}{\delta J(2)}.$$

这些都是简单的算子公式．下面讨论一些更普遍的算子公式．

### 1.1.3 若干算子公式

算子函数通常用级数定义．指数函数

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n \tag{1.1}$$

具有相当普遍的意义，因为许多更一般的算子函数 $f(A)$ 都可以通过积分变换

$$f(A) = \int f_\tau e^{\tau A} d\tau$$

($\tau$ 是实或复参数)由指数函数表示．因此，对于算子指数函数的讨论，往往成为处理一般算子函数的手段．算子对数函数也是通过级数定义的：

$$\ln A = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}(A - I)^n, \tag{1.2}$$

它的适用范围当然窄得多．注意，除非 $AB = BA$，即可以同时对角化，下式

$$\ln AB = \ln A + \ln B \tag{1.3}$$

一般是不成立的． 线性算子可以看作无穷维矩阵． 这也是从有限、离散情形向无穷、连续情形的推广．这时仍然可以引入算子的迹、行列式以及对它们的微分导数概念．

**算子的迹**　把有限维矩阵迹的定义

$$\mathrm{Tr}A = \sum_i A_{ii} = \sum_i \lambda_i$$

推广到无穷维，只须把对本征值 $\lambda_i$ 的求和理解成包含对连续本征值求积．具有绝对收敛迹的算子

$$\mathrm{Tr}A = \sum_i \lambda_i \leqslant \sum_i |\lambda_i| < \infty, \tag{1.4}$$

它构成特殊的一类 $\mathscr{F}_T$——迹类 (trace-class，俄文中有时称 ядерный) 算子． 关于迹类算子以及与之有密切关系的 Schmidt 类 (或 Hilbert-Schmidt 类 $\mathscr{F}_S$)算子的性质可参看[6]．

只要算子 $A$ 作用在实或复线性空间上，或者说无穷维矩阵 $A$ 的元素属于 **R** 或 **C**，普通阵迹下的循环对称性如

$$\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA) = \mathrm{Tr}(CAB),$$
$$\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}(PAP^{-1})$$

等都成立．这些关系不成立的一例见[7]．

**算子的行列式**　用以下关系定义：

$$\det A = \exp(\mathrm{Tr}\ln A), \tag{1.5}$$

或

$$\ln\det A = \mathrm{Tr}\ln A. \tag{1.6}$$

注意，前面(1.3)式虽不能普遍成立，但取迹后又是对的，即

$$\mathrm{Tr}\ln(AB) = \mathrm{Tr}\ln A + \mathrm{Tr}\ln B, \tag{1.7}$$

因此

$$\det(AB) = \det A\cdot\det B. \tag{1.8}$$

对于无限小算子 $X$ 有

$$\det(I + X) = I + \mathrm{Tr}X. \tag{1.9}$$

把此式用于非奇异算子 $A$ 的无限小增量 $\delta A$，得

$$\det(A + \delta A) = \det[A(I + A^{-1}\delta A)]$$
$$= \det A\cdot(I + \mathrm{Tr}A^{-1}\delta A),$$

即

$$\delta\det A = \det A\cdot\mathrm{Tr}(A^{-1}\delta A), \tag{1.10}$$

故得对 $A$ 中参数 $\tau$ 的微分公式

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\det A=\det A\cdot\mathrm{Tr}\left(A^{-1}\frac{\partial A}{\partial\tau}\right),\tag{1.11}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\det A=\mathrm{Tr}\left(A^{-1}\frac{\partial A}{\partial\tau}\right),\tag{1.12}$$

或利用(1.6)式,得

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathrm{Tr}\ln A=\mathrm{Tr}\left(A^{-1}\frac{\partial A}{\partial\tau}\right).\tag{1.13}$$

以后会经常用到各种算子对易关系．首先看一个多重对易子的二项式公式：

$$C_N=[\cdots[[A,\underbrace{B]B],\cdots B]}_{N\text{个}}=\sum_{M=0}^{N}(-1)^M C_M^N B^M A B^{N-M},\tag{1.14}$$

式中 $C_M^N$ 是二项式系数．此式可用归纳法简单地证明，此处从略．$C_N$ 可以看成是用递归方式定义的：

$$\begin{aligned}&C_0=A,\\&C_N=[C_{N-1},B].\end{aligned}\tag{1.15}$$

利用(1.14)式可推得对易关系

$$[A,e^B]=e^B\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N!}C_N,\tag{1.16}$$

或根据(1.15)式引入 $N=0$ 项,写成

$$Ae^B=e^B\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}C_N,\tag{1.17}$$

$$e^{-B}Ae^B=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}C_N,\tag{1.18}$$

等等．由(1.14)式推(1.16)式时,只须注意在二重求和中变一次求和顺序．通常由于算子 $A$, $B$ 的具体性质,使得



$$C_N=0,\ \text{当}\ N\geqslant K,$$

因此(1.16—1.18)式中只剩有限项．我们看一个重要的具体例子，即所谓 Baker-Campbell-Hausdorff 公式．

如果算子 $A$ 与 $B$ 不对易,算子函数 $\exp(A+B)$ 不能简单地分解为 $e^A$ 和 $e^B$ 的乘积，只能引入另一个算子 $K(\tau)$ 或 $K'(\tau)$，写成

$$e^{\tau(A+B)}=e^{\tau B}K(\tau)e^{\tau A}=e^{\tau A}K'(\tau)e^{\tau B},\tag{1.19}$$

具体用哪种形式，取决于算子函数的作用对象是 $A$ 还是 $B$ 的本征函数．如果在(1.19)式中令 $A$ 与 $B$ 互换,可由 $K$ 得 $K'$,故以后只讨论 $K$．

为了求得算子 $K$ 的具体形式，将(1.19)式对 $\tau$ 微分,可得算子微分方程

$$\frac{\partial}{\partial\tau}K=e^{-\tau B}Ae^{\tau B}K-KA,\tag{1.20}$$

或另一等价形式

$$\frac{\partial}{\partial\tau}K=Ke^{\tau A}Be^{-\tau A}-BK.$$

究竟用哪一种形式，视方便而定．我们只讨论前一个式子．初始条件直接由(1.19)式看出是：

$$K(0)=1.$$

利用(1.17)式,把定 $K$ 的方程写成

$$\frac{\partial}{\partial\tau}K=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(\tau)^N}{N!}C_NK-KA,\tag{1.21}$$

它的求解依赖于 $A$ 和 $B$ 的具体性质，即 $C_N$ 到那一级之后都等于零．我们只给出两种简单情形下的最终结果．

第一种情形，$C_1=[A,B]$ 是经典数,当 $N\geqslant 2$ 时全部 $C_N=0$，这时有

$$e^{\tau(A+B)}=e^{\tau B}e^{\tau A}e^{-\frac{\tau^2}{2}[B,A]}=e^{-\frac{\tau^2}{2}[A,B]}e^{\tau A}e^{\tau B},\tag{1.22}$$

其实因子 $K$ 或 $K'$ 是经典数,因而位置可前可后．上面这种写法比较便于记忆：$[B,A]$ 的顺序与 $e^{\tau B}$ 和 $e^{\tau A}$ 的顺序一致．这个式子

还可以写成

$$e^{2\tau A+2\tau B}=e^{\tau B}e^{2\tau A}e^{\tau B}. \tag{1.23}$$

第二种情形，$[B,[B,A]]$ 和 $[[B,A],A]$ 两种对易子都是经典数，更高阶的对易子全部为零。这时

$$e^{\tau(A+B)}=f(\tau)e^{\tau B}e^{\tau A}e^{-\frac{\tau^2}{2}[B,A]}, \tag{1.24}$$

其中经典量

$$f(\tau)=\exp\left\{\frac{\tau^3}{3}\left([[B,A],A]+\frac{1}{2}[B,[B,A]]\right)\right\};$$

或者

$$e^{\tau(A+B)}=f'(\tau)e^{\tau A}e^{\tau B}e^{-\frac{\tau^2}{2}[A,B]}, \tag{1.25}$$

其中经典量

$$f'(\tau)=\exp\left\{\frac{\tau^3}{3}\left([[A,B],B]+\frac{1}{2}[A,[A,B]]\right)\right\}.$$

当然，$f$ 或 $f'$ 的位置任意，而其它因子都是算子。

这类算子公式很多，可以参看[8—10]及其所引文献。

最后，我们讨论一下算子指数函数的微分和含算子的微分方程。如果算子 $A$ 不依赖于参数 $\tau$，则

$$\frac{d}{d\tau}e^{A\tau}=Ae^{A\tau}=e^{A\tau}A \tag{1.26}$$

总是成立的，我们推导 (1.20) 式时已利用了这一点。但是当 $A$ 与 $\tau$ 有关时，一般说来

$$\frac{d}{d\tau}e^{A(\tau)}\neq\frac{dA}{d\tau}e^{A(\tau)} \text{ 或 } e^{A(\tau)}\frac{dA}{d\tau},$$

只有 $\left[A,\frac{dA}{d\tau}\right]=0$ 时，上式才能成立。普遍成立的公式是

$$\frac{d}{d\tau}e^{A(\tau)}=\int_0^1 d\lambda e^{(1-\lambda)A(\tau)}\frac{dA(\tau)}{d\tau}e^{\lambda A(\tau)}, \tag{1.27}$$

或令 $\lambda\to 1-\lambda$，写成

$$\frac{d}{d\tau}e^{A(\tau)}=\int_0^1 d\lambda e^{\lambda A(\tau)}\frac{dA(\tau)}{d\tau}e^{(1-\lambda)A(\tau)}.$$



此式可以证明如下：造一个算子

$$Q(\lambda)=e^{-\lambda A}e^{\lambda(A+\delta A)},$$

$A$ 与 $\lambda$ 无关，故可用(1.26)式，求得 $Q(\lambda)$ 满足的微分方程

$$\frac{dQ(\lambda)}{d\lambda}=e^{-\lambda A}\delta Ae^{\lambda A}Q(\lambda),$$

$$Q(0)=1.$$

写成积分形式

$$Q(\lambda)=1+\int_0^\lambda e^{-\mu A}\delta Ae^{\mu A}Q(\mu)d\mu,$$

迭代求解，只保留 $\delta A$ 的一次项，得

$$Q(\lambda)=1+\int_0^\lambda e^{-\mu A}\delta Ae^{\mu A}d\mu.$$

由 $Q(\lambda)$ 的定义知

$$e^{\lambda(A+\delta A)}=e^{\lambda A}+\int_0^\lambda e^{(\lambda-\mu)A}\delta Ae^{\mu A}d\mu,$$

造比值

$$\frac{e^{\lambda(A+\delta A)}-e^{\lambda A}}{\delta\tau}=\int_0^\lambda e^{(\lambda-\mu)A}\frac{\delta A}{\delta\tau}e^{\mu A}d\mu,$$

取 $\delta A\to 0$, $\delta\tau\to 0$, 并令 $\lambda=1$, 得(1.27)式。证毕。

由于自变量不同的算子 $A(t)$ 可能不对易，一阶微分方程

$$i\frac{dF(t)}{dt}=A(t)F(t),\quad F(0)=1 \tag{1.28}$$

的形式积分不是

$$F(t)=\exp\left(-i\int_0^t A(\tau)d\tau\right),$$

而是

$$F(t)=T\left\{\exp\left(-i\int_0^t A(\tau)d\tau\right)\right\}, \tag{1.29}$$

其中 $T$ 是对 $t$ 的编序算子：在 $T$ 作用下的各个相乘因子，自变量大者应放到左面。这个式子的推导，要把(1.28)式化为积分方程，再逐次迭代求解。如果要直接验证 (1.29) 式的正确性，可利用

(1.27)式和$T$算子的定义，这里都略去不讲。

与此类似，算子微分方程

$$i\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}=[H(t),\rho(t)],\quad \rho(t_0)=\rho_0 \tag{1.30}$$

的形式解应写为

$$\rho(t)=S(t,t_0)\rho_0 S(t_0,t), \tag{1.31}$$

其中

$$S(t,t_0)=T\exp\left(-i\int_{t_0}^{t}H(\tau)d\tau\right). \tag{1.32}$$

量子统计中密度矩阵$\rho$就满足形如(1.30)式的刘维方程。

如果场量$\varphi$可以写成$\varphi=a+b$，而$a$和$b$是1.1.1节中说明的"量子"数，则可以定义两个或多个场量的正规乘积$N(\varphi_1\cdots\varphi_n)$，其中各项里都利用对易关系把一切$b$换到一切$a$的左面。编序乘积$T(\varphi_1\varphi_2)$和正规乘积$N(\varphi_1\varphi_2)$的差是由对易关系决定的，通常是一个经典数，称为两个场量的"收缩"[4]。

$$T(\varphi_1\varphi_2)-N(\varphi_1\varphi_2)=\overline{\varphi_1\varphi_2},$$

这个式子可以推广到$\varphi$的任意解析泛函$F[\varphi]$。我们不作推导，只在此写出这个紧致的推广形式[22]，以备后面引用。

$$TF[\varphi]=N(e^{\Delta}F[\varphi]), \tag{1.33}$$

其中

$$\Delta=\frac{1}{2}\int dx_1dx_2 D(x_1,x_2)\frac{\delta}{\delta\varphi(x_1)}\frac{\delta}{\delta\varphi(x_2)},$$

$D(x_1,x_2)$是场$\varphi$的传播子，基本上就是场量的"收缩"。

### 1.1.4 连续积分

连续积分，或称"对一切路径的积分"、"泛函积分"等，是比较便于处理无穷多自由度问题的一种数学形式，本书中要稍加引用。有关连续积分的文献很多[11-16]，我们只简略给出一些有关公式。

按照前面几节的精神，我们把连续积分看成多元函数多重积



分的极限：

$$I=\int[d\varphi]\Phi[\varphi]=\lim_{n\to\infty}\int d\varphi_1\cdots d\varphi_n\Phi(\varphi_1,\cdots,\varphi_n).$$

我们不去讨论如何严格定义这个函数空间中的极限过程。事实上，物理学中最常遇到的连续积分总带有一个含二次型的指数衰减因子，它保证积分收敛：

$$I=\int[d\varphi]F[\varphi]e^{-\frac{1}{2}\varphi K\varphi}. \tag{1.34}$$

$\exp\left(-\frac{1}{2}\varphi K\varphi\right)[d\varphi]$连指数因子一齐考虑，实质上就是Wiener测度，历史上是从讨论一维扩散方程得到的。Wiener曾经证明，对于相当普遍的一类泛函$F[\varphi]$（至少包括一切有界泛函和一切连续泛函），积分(1.34)是存在的。至于$\varphi$所属的函数类，只要处处连续、处处不可微就够了；这也是与布朗运动的物理图象一致的：位置连续变化，速度随机取值。

作为连续积分的实例，我们只讨论高斯型积分。有限维高斯积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int d\varphi_1\cdots d\varphi_n e^{-\frac{1}{2}\varphi_iK_{ij}\varphi_j\pm J_i\varphi_i}=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det K}}e^{\frac{1}{2}J_i\Delta_{ij}J_j}, \tag{1.35}$$

其中$K\cdot\Delta=I$，取$n\to\infty$极限后有

$$\int[d\varphi]e^{-\frac{1}{2}\varphi K\varphi\pm J\varphi}=Ne^{\frac{1}{2}J\Delta J}, \tag{1.36}$$

归一因子$N$可令$J=0$而得到：

$$N=\int[d\varphi]\exp\left(-\frac{1}{2}\varphi K\varphi\right). \tag{1.37}$$

统计物理中通常可以回避因子$N$，因为求平均时它同时出现在分子、分母上而消去。必须计算$N$时，要涉及无穷维行列式——算子$K$的Fredholm行列式$\det K$，忽略数值因子后有

$$N=\int[d\varphi]e^{-\frac{1}{2}\varphi K\varphi}=(\det K)^{-1/2}. \tag{1.38}$$

对于实函数 $\varphi$ 这个积分存在的充要条件是算子 $K-I$ 属于迹类 $\mathscr{T}_1$ [见前面(1.4)式].

事实上,高斯型连续积分是人们唯一会算的,它同时又是相当普遍的一类,因为当 $F[\varphi]$ 是解析泛函时,(1.34)式形式上总可以归结为高斯型积分. 这是由于

$$\frac{\delta^m}{\delta J^m}\int[d\varphi]e^{-\frac{1}{2}\varphi K\varphi+J\varphi}=\int[d\varphi]\varphi^m e^{-\frac{1}{2}\varphi K\varphi+J\varphi},$$

因此,如果

$$F[\varphi]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}F^{(m)}\varphi^m,$$

则有

$$\int[d\varphi]F[\varphi]e^{-\frac{1}{2}\varphi K\varphi+J\varphi}=F\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]\int[d\varphi]e^{-\frac{1}{2}\varphi K\varphi+J\varphi}$$

$$=NF\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]e^{\frac{1}{2}J\Delta J}, \qquad (1.39)$$

这里利用了(1.36)式. 计算规则是: 把 $F[\varphi]$ 中的 $\varphi$ 换成微分算子 $\frac{\delta}{\delta J}$,提到积分之外,剩下的高斯型积分就可以算出来. 于是解析泛函的连续积分(1.34)式,最终化为微分运算.

在连续积分下作变换,是获得新的物理关系的最简捷途径.最常用的是分部积分和积分下的函数变换,我们看一点简单例子.

分部积分　只要 $\|\varphi\|\to\infty$ 时,泛函 $\|\Phi[\varphi]\|\to 0$ 足够快,则如同全微分的积分为零一样,"全"变分导数的连续积分也是零

$$\int[d\varphi]\frac{\delta\Phi[\varphi]}{\delta\varphi}=0. \qquad (1.40)$$

取 $\Phi=\Phi_1\cdot\Phi_2$, 得分部积分公式

$$\int[d\varphi]\Phi_1[\varphi]\frac{\delta\Phi_2[\varphi]}{\delta\varphi}=-\int[d\varphi]\frac{\delta\Phi_1[\varphi]}{\delta\varphi}\Phi_2[\varphi].$$

函数平移　在积分下作函数平移

$$\varphi=\phi+c,$$



其中 $c(x)$ 是某个固定的连续函数,积分值当然不因此而改变. 形式上很简单

$$\int[d\varphi]F[\varphi]e^{-\varphi A\varphi}=e^{-cAc}\int[d\phi]F[\phi+c]e^{-(\phi A\phi+2cA\phi)},$$

有时也颇有用处.

非线性的无穷小变换

$$\varphi(x)=\phi(x)+\varepsilon F[x,\phi(x)],\quad \varepsilon\ll 1, \qquad (1.41)$$

内容就丰富得多. 此式中 $F$ 是 $\phi$ 的某种泛函.

如果对连续积分

$$Z[J]=\int[d\varphi]e^{-H[\varphi]+J\varphi}, \qquad (1.42)$$

按(1.41)式作变换

$$H[\varphi]=H[\phi]+\varepsilon\frac{\delta H}{\delta\phi}F[\phi],$$

$$[d\varphi]=[d\phi]\left(1+\varepsilon\frac{\delta F[x,\phi]}{\delta\phi(x)}\right),$$

$$J\varphi=J\phi+\varepsilon JF,$$

等等,积分值当然也不改变. 因此,准到 $\varepsilon$ 的线性项,应有以下恒等式成立

$$\left(J(x)F\left[x,\frac{\delta}{\delta J}\right]-F\left[x,\frac{\delta}{\delta J}\right]\frac{\delta H}{\delta\phi}\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{\delta F\left[x,\frac{\delta}{\delta J}\right]}{\delta\phi(x)}\right)Z[J]=0, \qquad (1.43)$$

这里利用了前面得到的(1.39)式,并且省去了积分符号. 如果(1.41)式是规范变换,从(1.43)式就得到 Ward 恒等式,进一步推导可看[17].

### 1.1.5　图论中的两个定理[18]

为了在下一章中讨论相连格林函数的生成泛函时,不再分心去证明相连图展开定理,本节先从图论的一般形式证明这个定理,

而且顺便熟悉一下普通的生成函数。

**乘积定理**　考虑某些带权重的图。这些权重具有两条性质：

(1) 它与图形顶点的编号方式无关；

(2) 如果一个图是几个不相连分图的集合，则总的权重是各个分图权重的乘积。

对于微扰论费曼图，权重就是相应的积分。

设有两个图形序列 $G=\{g\}$ 和 $H=\{h\}$，其中 $p$ 点图 $g$ 的权重是 $g_p$，$p$ 点图 $h$ 的权重是 $h_p$。定义两个无穷级数

$$G(x)=\sum_{p=1}^{\infty} g_p \frac{x^p}{p!};$$

$$H(x)=\sum_{p=1}^{\infty} h_p \frac{x^p}{p!}.$$

这里 $G(x)$ 称为 $g_p$ 的生成函数。

现在从两个序列中各取一个图，组成新的序列 $W=\{w\}$，其中一个 $p$ 点图 $w$ 的权重是 $w_p$，而且 $p=p_1+p_2$，$p_1=1,2,\cdots,p$ 点图取自 $G$ 序列，$p_2=1,2,\cdots,p$ 点图取自 $H$ 序列。$w_p$ 的生成函数记为

$$W(x)=\sum_{p=2}^{\infty} w_p \frac{x^p}{p!}.$$

乘积定理告诉我们

$$W(x)=G(x)H(x).$$

证明　$p$ 点图中 $p_1$ 取自 $G$ 序列，$p_2$ 取自 $H$ 序列的组合方式为

$$C^p_{p_1}=C^p_{p-p_1}=C^p_{p_2}=\frac{p!}{(p-p_1)!p_1!},$$

相应权重为

$$w_p=\sum_{p_1+p_2=p}\frac{p!}{(p-p_1)!p_1!}g_{p_1}h_{p_2},$$

另一方面直接有



$$G(x)H(x)=\sum_{p_1=1}^{\infty}\sum_{p_2=1}^{\infty} g_{p_1}h_{p_2}\frac{x^{p_1+p_2}}{p_1!p_2!},$$

令 $p=p_1+p_2$，并改变求和顺序有

$$G(x)H(x)=\sum_{p=2}^{\infty}\left(\sum_{p_1+p_2=p}\frac{1}{p_1!p_2!}g_{p_1}h_{p_2}\right)x^p$$

$$=\sum_{p=2}^{\infty} w_p\frac{x^p}{p!}=W(x),$$

证毕。

如果 $G$ 和 $H$ 是完全相同的序列，则考虑到全同性应有

$$W(x)=\frac{1}{2!}(G(x))^2.$$

**相连图展开定理**　考虑一个由相连图组成的序列 $W$，其中一个 $p$ 点相连图的权重是 $w_p$，其生成函数是 $W(x)$。

取 $m$ 个等同的 $W$ 序列来，从中各抽一图组成新序列，其中每个图都由 $m$ 个不相连分图组成，而且

$$p=p_1+p_2+\cdots+p_m;$$

$$p_i=1,2,\cdots,p;\qquad i=1,2,\cdots,m.$$

根据乘积定理，这样组成的新序列的生成函数是

$$Z_m(x)=\frac{1}{m!}[W(x)]^m,$$

除以 $m!$ 是考虑了 $m$ 个序列的全同性，与取 $m$ 个图的顺序没有关系。总的生成函数是

$$\sum_{m=1}^{\infty} Z_m(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}[W(x)]^m,$$

如果再定义 $Z_0(x)=1$，补足

$$Z(x)=\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x),$$

就得到相连图展开定理

$$Z(x)=e^{W(x)}.\qquad(1.44)$$

相连图展开与概率论中的累积量（cumulant）展开直接对应，那里随机变量 $Y$ 的矩生成函数 $M(x)$ 和累积量生成函数 $K(x)$ 的关系是

$$M(x)=\langle e^{xY}\rangle=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^p}{p!}M_p=\exp\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{x^p}{p!}K_p\right)=e^{K(x)},$$

其中$\langle\cdots\rangle$表示平均值，而 $M_p$ 和 $K_p$ 分别为 $p$ 次矩和 $p$ 次累积量。这实际上是微扰论级数的重新排列，$K_p$ 仍由不高于 $p$ 次的矩决定。关于累积量展开及其对统计物理的应用可参看久保亮五的文章[19]。

## §1.2 微扰论级数的生成泛函

这一节讨论三类对象的微扰论展开的生成泛函。这三类对象是

（1）包含不相连部分的$N$点格林函数(或关联函数) $G_d^{(N)}(x_1, x_2,\cdots, x_N)$，它的生成泛函是有外场 $J$ 的统计配分函数 $Z[J]$。

（2）相连的$N$点格林函数 $G^{(N)}(x_1, x_2,\cdots, x_N)$，它的生成泛函 $W[J]=\ln Z[J]$ 对应于亥姆霍兹自由能。

（3）$N$点顶角函数 $\Gamma^{(N)}(x_1, x_2,\cdots, x_N)$ 又称为单粒子不可约（1.-$PI$）顶角，真顶角（proper vertex）等，它的生成泛函 $\Gamma[M]$ 由 $W[J]$ 经勒让德变换得来，与热力学势(吉布斯自由能)对应。

在引入这三类对象之前，先看一下统计模型与场论的对应关系。最后讲一个具体应用的例子：圈图展开。

### 1.2.1 统计模型与场论的对应关系

平衡态的经典统计与量子场论的对应关系，最早来自统计平均和场论中真空平均的相似性(可参看[20]第三章)。关于这一对应关系，近几年有一些深刻的讨论。由于 Nelson 等人在 1973 年建立了欧氏场论与哈密顿形式的明可夫斯基空间中量子场论的构造关系，这些讨论变得更为重要了。有关这方面的情况可参看[21]及其所引文献。



另一方面，每种具体的统计模型都可以设法表述为连续的场论形式。我们看两个简单例子。

第一个例子是 Ising 模型(关于这一模型本身，可参看[7])，它的统计配分函数是

$$Z=\sum_{\{\sigma\}}\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}\sigma_iK_{ij}\sigma_j\right),\tag{1.45}$$

其中每个格点上 $\sigma_i=\pm1$，对各种可能的赋值方式 $\{\sigma\}$ 求和。倒着套用 1.1.4 节中的高斯型积分公式(1.35)，可以完成对 $\sigma_i$ 的求和而得到

$$Z\sim\int\cdots\int\prod_{i=1}^{N}d\varphi_i\exp\left(-\frac{1}{2}\varphi_iA_{ij}\varphi_j+\sum_j\ln\operatorname{ch}\varphi_j\right).$$

注意这里用到了

$$\sum_{\{\sigma\}}\exp\left(\sum_{j=1}^{N}\sigma_j\varphi_j\right)=2^N\sum_{i=1}^{N}\operatorname{ch}\varphi_i,$$

并省去了常数项。$\varphi_i$ 可看作辅助的格点场。取连续极限有

$$Z=C\int[d\varphi]e^{-\frac{1}{2}A\varphi^2+\ln\operatorname{ch}\varphi},$$

于是得到了非线性的自作用势

$$V[\varphi]=\ln\operatorname{ch}\varphi=\frac{\varphi^2}{2}-\frac{1}{12}\varphi^4+\cdots,$$

这是用连续的场来逼近离散的晶格模型。只有物理上允许忽略晶格结构，即在临界点附近，这样作才是正确的。反之，用离散的格点场来逼近连续场，在数学上总是可以的。

第二个例子是经典玻耳兹曼气体。$N$个分子的能量是

$$E_N=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m}+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}V(r_i-r_j).$$

在巨正则系综配分函数

$$Z = \sum_{\{N\}} e^{-\beta(E_N - \mu N)}$$

中完成动量积分，得 $\left(\xi = \left(\frac{m}{2\pi\beta}\right)^{3/2} e^{\beta\mu}\right)$

$$Z = \sum_N \frac{\xi^N}{N!} \int \cdots \int e^{-\frac{\beta}{2}\sum\limits_{i,j}^{N} V(r_i - r_j)} dr_1 \cdots dr_N. \qquad (1.46)$$

引入辅助标量场 $\varphi(r)$ 和积分算子

$$\Delta = -\frac{\beta}{2}\int dr_1 dr_2 V(r_1 - r_2)\frac{\delta}{\delta\varphi(r_1)}\frac{\delta}{\delta\varphi(r_2)},$$

容易证明

$$e^{-\frac{\beta}{2}\sum\limits_{i,j} V(r_i - r_j)} = \{e^{\Delta} e^{\int \rho_N(r)\varphi(r)dr}\}_{\varphi=0},$$

其中 $\rho_N$ 是粒子数密度算子

$$\rho_N(r) = \sum_{i=1}^{N} \delta(r - \boldsymbol{r}_i),$$

于是

$$\int \rho_N(r)\varphi(r)dr = \sum_{i=1}^{N} \varphi(\boldsymbol{r}_i).$$

(1.46) 式可以写成

$$Z = \left\{e^{\Delta} \sum_N \frac{\xi^N}{N!}\left(\int e^{\varphi(r)} dr\right)^N\right\}_{\varphi=0}$$

$$= \{e^{\Delta} e^{\int \xi e^{\varphi(r)} dr}\}_{\varphi=0}. \qquad (1.47)$$

与 $S$ 矩阵的表达式(1.32)、(1.33)式比较

$$S = N\{e^{\Delta} e^{-\int V(\varphi)dx}\},$$

可见经典玻耳兹曼气体的统计问题，基本上归化为传播子是 $-\beta V(r_i - \boldsymbol{r}_j)$，自作用势为 $-\xi e^{\varphi}$ 的标量场论[23]。

值得注意的是，这两个例子中都出现了非多项式型的自作用势（$\ln \mathrm{ch}\varphi$ 和 $e^{\varphi}$），实际上只能对 $\varphi$ 展开，保留低阶项。

### 1.2.2 统计配分函数 $Z[J]$——不相连关联函数的生成泛函

讨论有外场 $J(x)$ 存在时的物理系统。统计配分函数写成连续积分形式

$$Z[J] = C\int [d\varphi] e^{-H[\varphi] + J\varphi}, \qquad (1.48)$$

其中哈密顿量是

$$H[\varphi] = \frac{1}{2}\varphi K\varphi + V[\varphi], \qquad (1.49)$$

常数 $C$ 由归一条件 $Z[0] = 1$ 确定。此处和以后要广泛采用 1.1.1 节中引入的简化记法。

计算 $Z[J]$ 的变分导数：

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = C\int [d\varphi]\varphi(x) e^{-H[\varphi]+J\varphi} = \langle \varphi(x) e^{J\varphi}\rangle_0;$$

$$\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} = \langle \varphi(x)\varphi(y) e^{J\varphi}\rangle_0;$$

$$\cdots$$

其中

$$\langle \cdots \rangle_0 = \frac{\int [d\varphi] \cdots e^{-H[\varphi]}}{\int [d\varphi] e^{-H[\varphi]}}.$$

可见，如果取 $J = 0$，它们就是普通的关联函数(以后要看到，其中还包含着不相连部分)：

$$G_d^{(N)}(x_1, \cdots, x_N) = \frac{\delta^N Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_N)}\Big|_{J=0},$$

因此，$Z[J]$ 乃是 $G_d^{(N)}$ 的生成泛函

$$Z[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} G_d^{(N)} J^N. \qquad (1.50)$$

实际上 $Z$ 还可以看成 $H[\varphi]$ 中其它参数的泛函，例如

$$Z[J, m^2, \cdots] = C\int[d\varphi]\exp\left(\cdots - \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \cdots + J\varphi\right),$$

于是有

$$\frac{\delta Z}{\delta m^2} = \left\langle -\frac{1}{2}\varphi^2 \right\rangle, \tag{1.51}$$

等等。

连续积分只是一个方便的书写形式，有利于最快地得出一些普遍关系。实际上还需要有通过普通积分表示的、可以直接计算的公式。按(1.49)式从哈密顿量中分出平方(自由场)部分后

$$Z[J] = C\int[d\varphi]e^{-V[\varphi]}e^{-\frac{1}{2}\varphi K\varphi + J\varphi},$$

即可套用 1.1.4 节中高斯型连续积分的(1.39)式，得到

$$Z[J] = G'e^{-V\left[\frac{\delta}{\delta J}\right]}e^{\frac{1}{2}J\Delta J} \tag{1.52}$$

(与 $J$ 无关的常数并入了 $C'$，以后省去这个归一常数不写)。这个式子是连续积分 (1.48) 式的代数定义，也是实际计算的公式。它是微扰展开的出发点，其中自动包括了维克定理。

先看自由场情形。这时 $V[\varphi] = 0$，

$$Z[J] = e^{\frac{1}{2}\Delta J^2}, \tag{1.53}$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{\delta Z}{\delta J} &= (\Delta J)e^{\frac{1}{2}\Delta J^2};\\
\frac{\delta^2 Z}{\delta J^2} &= (\Delta + (\Delta J)^2)e^{\frac{1}{2}\Delta J^2};\\
\frac{\delta^3 Z}{\delta J^3} &= (3\Delta^2 J + (\Delta J)^3)e^{\frac{1}{2}\Delta J^2};\\
\frac{\delta^4 Z}{\delta J^4} &= (3\Delta^2 + 6\Delta^3 J^2 + (\Delta J)^4)e^{\frac{1}{2}\Delta J^2}.
\end{aligned} \tag{1.54, 1.55}$$

取 $J = 0$ 后，首先看到奇数点的关联函数为零

$$G_d^{(2K+1)} = 0, \tag{1.56}$$

而由(1.54)式得



$$G_d^{(2)}(x, y) = \Delta(x, y), \tag{1.57}$$

这是自由传播子，是质量算子 $K$ 的逆算子

$$\int\Delta(x, z)K(z, y)dz = \delta(x - y).$$

由(1.55)式得 $G_d^{(4)} = 3\Delta^2$，写全了就是

$$G_d^{(4)}(1234) = \Delta(12)\Delta(34) + \Delta(13)\Delta(24) + \Delta(14)\Delta(23).$$

一般情形下有

$$G_d^{(2K)} = (2K - 1)!!\Delta^K, \tag{1.58}$$

其实无须推导也可以看出来，把 (1.56)、(1.58) 式代回解析泛函 $Z[J]$ 的表达式(1.50)，自然回到(1.53)式。

再考察 $\varphi^4$ 相互作用

$$V[\varphi] = \frac{g}{4!}\varphi^4, \tag{1.59}$$

这已是不平庸的实例，由之可以得出全部费曼图解法。从生成泛函的表达式

$$\begin{aligned}
Z[J] = e^{-\frac{g}{4!}\frac{\delta^4}{\delta J^4}}e^{\frac{1}{2}\Delta J^2} &= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\left(-\frac{g}{4!}\right)^N\frac{\delta^{4N}}{\delta J^{4N}}e^{\frac{1}{2}\Delta J^2}\\
&= \sum_{N=0}^{\infty}Z^{(N)}[J]
\end{aligned} \tag{1.60}$$

中，取出微扰论一阶图的生成泛函[并利用(1.55)式]，得

$$\begin{aligned}
Z^{(1)}[J] &= -\frac{g}{4!}\frac{\delta^4}{\delta J^4}e^{\frac{1}{2}\Delta J^2}\\
&= -\frac{g}{4!}[3\Delta_x^2 + 6\Delta_x(\Delta J)_x^2 + (\Delta J)_x^4]e^{\frac{1}{2}\Delta J^2},
\end{aligned} \tag{1.61}$$

引入下面符号：

$\Delta_x \equiv \Delta(x, x)$　　对应顶点 $x$ 上的圈；

$\Delta \equiv \Delta(x, y)$　　对应顶点 $x, y$ 之间的传播子；

$(\Delta J)_x \equiv \int\Delta(x, y)J(y)dy$　　对应顶点 $x$ 上的外线。

于是 (1.61) 式中的三项分别对应图 1.1 中的三个图。它们的系数

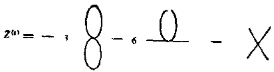


图 1.1

也是对的.

再取 $N=2$ 的情形

$$Z^{(2)}[J]=\frac{1}{2!}\left(\frac{g}{4!}\right)^2\frac{\delta^4}{\delta J(y)^4}\big(3\Delta_x^2+6\Delta_x(\Delta J)_x$$

$$+(\Delta J)_x^4\big)e^{\frac{1}{2}\Delta J^2}.$$

注意利用下列微分手续

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}e^{\frac{1}{2}\Delta J^2}=(\Delta J)_x e^{\frac{1}{2}\Delta J^2};$$

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}(\Delta J)_x=\Delta_x=\Delta(x,x);$$

$$\frac{\delta}{\delta J(y)}(\Delta J)_x=\Delta=\Delta(x,y),$$

完成全部微分,得到二阶图的生成泛函

$$Z^{(2)}[J]=\left(\frac{g}{4!}\right)^2\Big\{36\Delta_x\Delta^2\Delta_y+12\Delta^4+\frac{9}{2}\Delta_x^2\Delta_y^2$$
$$+48(\Delta J)_x\Delta^3(\Delta J)_y+72\Delta_x(\Delta J)_x\Delta\Delta_y(\Delta J)_y$$
$$+36\Delta^2(\Delta_x(\Delta J)_y^2+\Delta_y(\Delta J)_x^2)+9\Delta_x\Delta_y(\Delta_y(\Delta J)_x^2$$
$$+\Delta_x(\Delta J)_y^2)+36(\Delta J)_x^2\Delta^2(\Delta J)_y^2$$
$$+24\Delta(\Delta_y(\Delta J)_x^3(\Delta J)_y+\Delta_y(\Delta J)_x(\Delta J)_y^3)$$
$$+\frac{3}{2}(\Delta_x^2(\Delta J)_y^4+\Delta_y^2(\Delta J)_x^4)+18\Delta_x\Delta_y(\Delta J)_x^2(\Delta J)_y^2$$
$$+8(\Delta J)_x^3\Delta(\Delta J)_y^3+3(\Delta_y(\Delta J)_x^4(\Delta J)_y^2$$
$$+\Delta_x(\Delta J)_y^4(\Delta J)_x^2)+(\Delta J)_x^4(\Delta J)_y^4\Big\}e^{\frac{1}{2}\Delta J^2}. \qquad (1.62)$$

它所对应的全部图形按照在(1.62)式中的出现顺序示于图 1.2 中.



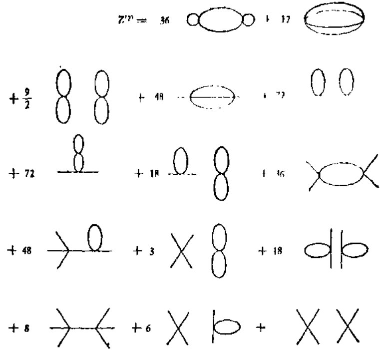


图 1.2

从(1.61)、(1.62)诸式中看到:

(1) 它们包含大量不相连图. 事实上不相连图的数目比画出来的还要多, 因为最右面的因子 $e^{\frac{1}{2}\Delta J^2}$ 还带来对应自由场的不相连图. 重复出现的不相连图并不包含新的信息, 我们应当转入只包含相连图的微扰展开,这是下一节的内容.

(2) 如果在这些式子中令 $J=0$, 就只剩下没有外线的"真空图"的贡献. 注意到我们省去了 $Z[J]$ 中的常数 $C'$, 可见归一条件 $Z[0]=1$ 就是消去一切真空图.

(3) 这一套作法是相当烦琐的. 唯一的好处是当相互作用 $V$ 比较复杂时(例如包含多种场和相互作用顶角),可以保证不丢图, 并且自动给出每个图的系数. 实际计算当然至少应从相连图的生成泛函入手.