高 等 数 学

下 册

（试用教材）

浙江大学高等数学教研组

1973年3月

目　　录

第九章　矢量代数与空间解析几何

本章分为两部分：第一部分是矢量代数，主要介绍矢量的加法、减法及乘法等运算。第二部分是空间解析几何，介绍空间的一些常见的曲面和曲线的方程及其图形。

第一节　空间直角坐标系

在平面解析几何中，我们建立了平面直角坐标系，使得平面上的点与一组有次序的数对应起来，从而利用有序的数组（即点的坐标）来确定平面上点的位置。那么在空间如何确定点的位置呢？

从空间某一定点o引三条互相垂直的直线ox，oy，oz，並取定长度单位和正向（图9—1）这样就建立了空间直角坐标系。点o叫做坐标原点，数轴ox、oy、oz叫做坐标轴，每两个坐标轴所在的平面xoy、yoz、zox叫做坐标平面。

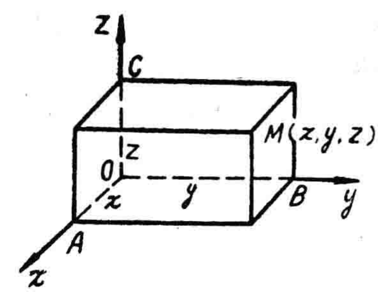

图9—1

空间直角坐标系有右手系和左手系两种（图9—2），我们采用的是右手系。它的坐标

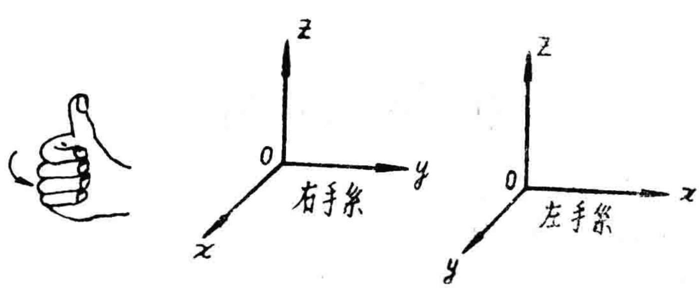

图9—2

轴的正向是这样规定的：伸出右手，让大姆指垂直于xoy平面，並让其它四个指头按照从ox轴的正向转过$\frac{\pi}{2}$与oy轴的正向重合时的旋转方向握拳，则大姆指所指的方向就是oz轴的正向。也可采用另一方法确定坐标轴的正向：我们从oz轴的正向往下看时，ox轴的正向按逆时针方向转$\frac{\pi}{2}$的角即合于oy轴的正向。

有了空间直角坐标系以后，就可以利用三个数来确定空间点的位置。设M为空间的任意一点(图9—1)，过点M分别作垂直于ox轴、oy轴、和oz轴的平面，它们与ox轴、oy轴、oz轴分别交于A、B、C三点，设这三个点在各自的数轴上所对应的实数分别为x、y、z，因此点M就确定了一组有次序的数x、y、z。反之，给了一组有次序的实数x、y、z，则可以分别

在三个坐标轴上找到相应的点，过这三个点分别作垂直于坐标轴的平面，这三张平面的交点就是由数 x 、y 、z 所确定的点。这样，空间的点与一组有次序的数 x、y、z 之间就建立了一一对应关系。我们把与点M相对应的一组有次序的数 x 、y 、z 叫做点M的直角坐标，记为M（x,y,z），并分别把 x、y、z 叫做点M的横坐标、纵坐标和竖坐标。

xoy、yoz、zox 三张坐标平面，将整个空间分为八个部分，每一个部分叫做卦限，习惯上我们把点的坐标都是正数即 $x>0, y>0, z>0$ 的那个卦限叫做第一卦限。

利用点的坐标可以计算空间任意两点之间的距离：

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间的两已知点，过点 M_1、M_2 各作三张平面分别垂直于三个坐标轴，形成如图 9 — 3 所示的长方体，在直角三角形 M_1PM_2 中，有

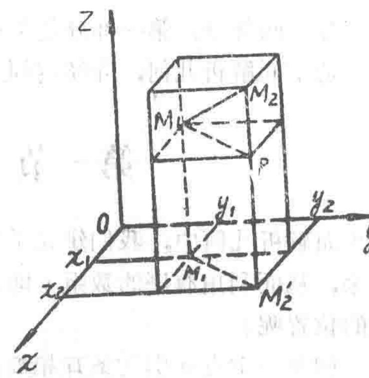

图 9 — 3

$$(M_1M_2)^2=(M_1P)^2+(PM_2)^2$$

$$=(M_1'M_2')^2+(PM_2)^2 \qquad (1)$$

但因

$$(M_1'M_2')^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \qquad (2)$$

又

$$(PM_2)^2=(z_2-z_1)^2 \qquad (3)$$

将（2）和（3）式代入（1）式便得空间两点间的距离公式：

$$M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (1.1)$$

第二节　矢量概念

人们在实践中所遇到的量大致可以分为两类：一类量只有大小，例如：质量、密度、温度等、这类量叫做数量，也叫纯量或标量。另一类量不但有大小，而且有方向，例如：力、位移、速度、加速度等。这类量叫做矢量，也叫向量。

矢量常用拉丁字母上面加一个箭头来记，如 $\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$ 等。或用粗体字母来记，如 **A**、**B**、**C** 等。矢量的大小又叫做矢量的模，矢量 $\vec{A}$ 的模记为 $|\vec{A}|$。

矢量既然是有大小又有方向的量，因此，在几何上就可以用空间的一个有方向的线段来表示（图 9 —4），在选定长度单位后，这个有向线段的长度代表矢量的大小，它的方向指明矢量的方向。起点为A，终点为B的矢量也记为 $\overrightarrow{AB}$，它的模记为 $|\overrightarrow{AB}|$。

图 9 — 4

两矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 如果它们的模相等，且方向相同（两矢量平行且有相同的指向），我们就说这两个矢量是相等

的*，记为

$$\vec{A}=\vec{B}$$

例如：图 9—5 所示的矢量$\vec{A}$与$\vec{B}$是相等的，而矢量$\vec{A}$与$\vec{C}$是不相等的，它们的模相等，但方向不同。

如果一个矢量的模为零，叫它为零矢量，记为$\vec{0}$。零矢量的方向不定。

矢量与数量的根本区别在于一个有方向，一个没有方向，它们反映客观事物的不同本质，矢量的大小和方向是组成矢量的不可分割的部分，因此，在讨论矢量的运算时必须把它的大小和方向一併来考虑。

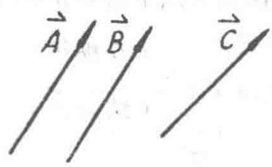

图 9—5

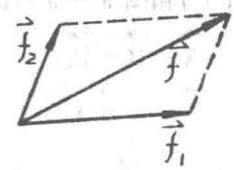

图 9—6

矢量的加法：由实验知道，如果有两个力$\vec{f}_1$与$\vec{f}_2$作用在一质点上，那么它们的合力$\vec{f}$可按平行四边形法则求得（见图 9—6）。对于速度也有同样的结果。一般，两矢量和的定义如下：

两矢量$\vec{A}=\overrightarrow{OA}$与$\vec{B}=\overrightarrow{OB}$的和是以这两个矢量为邻边的平行四边形的对角线矢量$\overrightarrow{OC}$（见图 9—7（1）），记为

$$\overrightarrow{OC}=\vec{A}+\vec{B}$$

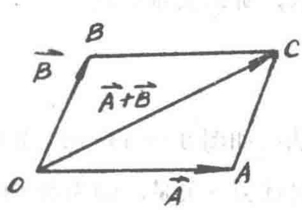

图 9—7（1）

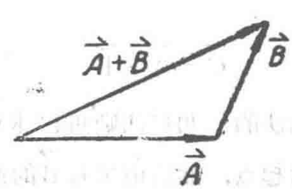

图 9—7（2）

* 如果矢量的起点是固定的，叫做固定矢量。例如质点的位移是固定矢量。起点可以在矢量所在的直线上移动的矢量叫做滑动矢量。例如作用在一刚体上的力就是滑动矢量，它可以在刚体中力的作用线上移动而对刚体的效果是一样的。在数学上我们研究矢量的最一般的特性，即大小和方向，这对一切矢量都是共同的。对于特殊的情况可以在一般的原则下加以特殊的考虑。因此，在数学中我们只考虑矢量的大小和方向，而不论它的起点在什么地方，这种矢量叫做自由矢量。

即 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

但因 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$

所以 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$

由此可得两矢量加法的三角形法则，即在矢量$\vec{A}$的终点作矢量$\vec{B}$，使$\vec{B}$的起点与$\vec{A}$的终点相联，从$\vec{A}$的起点到$\vec{B}$的终点所作的矢量就是它们的和$\vec{A}+\vec{B}$（如图 9—7（2））。

三个或三个以上的矢量也可以相加，只要把这些矢量的起点和终点依次相联，从最初的起点到最后的终点所作的矢量就是它们的和（见图 9—8）。

由图 9—7（1）和图 9—8 可以看出，矢量的加法具有以下的运算规律：

（i） $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ （交换律）

（ii） $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$ （结合律）

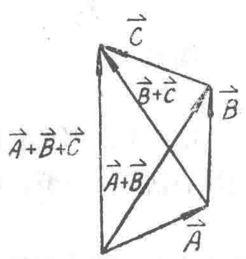

图 9—8

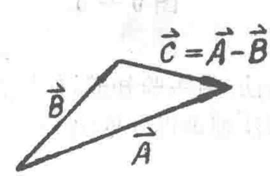

图 9—9

矢量的减法：象数量的减法是加法的逆运算一样，矢量的减法也是加法的逆运算。定义如下：

如果矢量$\vec{B}$与$\vec{C}$的和等于矢量$\vec{A}$，即$\vec{B}+\vec{C}=\vec{A}$，那么矢量$\vec{C}$就叫做矢量$\vec{A}$与$\vec{B}$的差，并记为

$$\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}$$

由矢量加法的三角形法则可得求$\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}$的方法：如图 9—9 所示，先把$\vec{A}$与$\vec{B}$平行移到共同的起点，然后由矢量$\vec{B}$的终点向矢量$\vec{A}$的终点引一矢量，即为所求的矢量$\vec{C}$。

数量与矢量的乘法：大家知道，如果有三个大小和方向都相同的力$\vec{f}$作用于一质点上，那么质点所受到的合力$\vec{F}$就等于三倍的$\vec{f}$，即$\vec{F}=3\vec{f}$这里就出现了数量与矢量的乘积。一般对于数量与矢量的乘积定义如下：

矢量$\vec{A}$与数量m，它们的乘积$m\vec{A}$是这样一个矢量：它的模等于矢量$\vec{A}$的模与数量$|m|$的乘积；如果$m>0$，它的方向与$\vec{A}$相同，如果$m<0$它的方向与$\vec{A}$相反（图 9—10）。

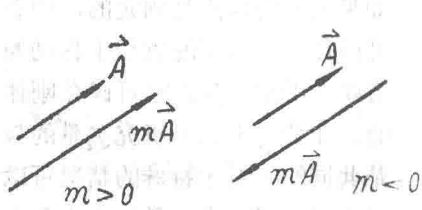

图 9—10

在图9—11中是矢量$\vec{A}$，$\frac{3}{2}\vec{A}$与$-\frac{1}{2}\vec{A}$。

特别是矢量$\vec{A}$与-1的乘积$(-1)\vec{A}$，它的模与$\vec{A}$的模相等而方向相反，用$-\vec{A}$来表示，即

$$(-1)\vec{A}=-\vec{A}$$

显然有$\vec{A}+(-\vec{A})=\vec{0}$。

关于数量和矢量的乘法具有以下的运算规律：

(i) $\quad m(n\vec{A})=(mn)\vec{A}$ （结合律）

(ii) $\quad (m+n)\vec{A}=m\vec{A}+n\vec{A}$ （分配律）

(iii) $\quad m(\vec{A}+\vec{B})=m\vec{A}+m\vec{B}$ （分配律）

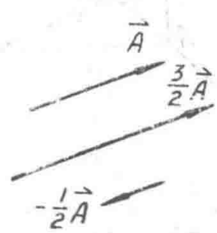

图9—11

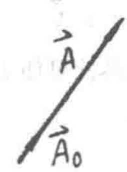

图9—12

单位矢量：模为1的矢量叫做单位矢量。我们把与$\vec{A}$同方向的单位矢量叫做$\vec{A}$的单位矢量，并记为$\vec{A}_0$（图9—12）。

由数量与矢量乘积的定义，有

$$\vec{A}=|\vec{A}|\vec{A}_0$$

或

$$\vec{A}_0=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

即是说一个矢量（不为零矢量）除以它的模是一单位矢量。

第三节　矢量的分解式

以上所讨论的矢量的各种运算只能在图形上描绘，用起来有不方便的地方，为了便于计算，我们常把矢量沿直角坐标系的坐标轴的方向来分解，这样就可能使矢量的几何运算转化为代数运算。将矢量沿坐标轴方向分解就是实现这个转化的条件。下面就来讨论矢量的分解式。

设在空间直角坐标系中有一矢量$\vec{A}$，我们将$\vec{A}$平行移动，使它的起点在坐标原点O，它的终点为M(x,y,z)（见图9—13）过点M作三张平面分别垂直于三坐标轴，连同三张坐标平面构成一个长方体，根据矢量的加法法则可得

$$\vec{A}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}$$

由于 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OC}$，

因而有

$$\vec{A}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} \qquad (3.1)$$

其中矢量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$分别叫做矢量$\overrightarrow{OM}$在o x轴、o y轴、o z轴上的分矢量。

设$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$分别为o x轴、o y轴、o z轴正向的单位矢量，由于点A在o x轴上的坐标为x，因此

$$\overrightarrow{OA}=x\,\vec{i}$$

同样可得 $\overrightarrow{OB}=y\,\vec{j}$；$\overrightarrow{OC}=z\,\vec{k}$

将它们代入(3.1)式就得到矢量$\vec{A}$的分解式

$$\vec{A}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k} \qquad (3.2)$$

利用矢量的分解式就可使矢量的几何运算转化为代数的运算。

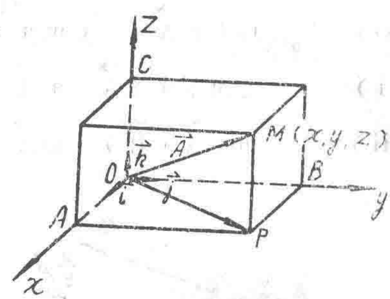

图9—13

设 $\vec{A}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$，$\vec{B}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$

则

$$\begin{aligned}\vec{A}+\vec{B}&=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})+(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})\\&=x_1\vec{i}+x_2\vec{i}+y_1\vec{j}+y_2\vec{j}+z_1\vec{k}+z_2\vec{k}\\&=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}-\vec{B}&=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})-(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})\\&=(x_1-x_2)\vec{i}+(y_1-y_2)\vec{j}+(z_1-z_2)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m\vec{A}&=m(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\\&=(mx_1)\vec{i}+(my_1)\vec{j}+(mz_1)\vec{k}\end{aligned}$$

例1 已知$\vec{A}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$，$\vec{B}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$求$\vec{A}+\vec{B}$，$\vec{A}-\vec{B}$，$3\vec{A}$。

解
$$\begin{aligned}\vec{A}+\vec{B}&=(2+3)\vec{i}+(-3+1)\vec{j}+(5-2)\vec{k}\\&=5\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}-\vec{B}&=(2-3)\vec{i}+(-3-1)\vec{j}+(5+2)\vec{k}\\&=-\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3\vec{A}&=3\times2\vec{i}+3\times(-3)\vec{j}+3\times5\vec{k}\\&=6\vec{i}-9\vec{j}+15\vec{k}\end{aligned}$$

大家知道，矢量是由它的模与方向确定的，如果已知矢量(图9—14)；

$$\vec{A}=\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

那么怎样求它的模，怎样表明它在空间的方向呢？

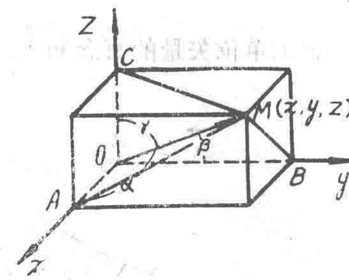

图 9 —14

由两点间的距离公式可得矢量$\vec{A}$的模为

$$|\vec{A}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (3.3)$$

为了表示矢量的方向，如图 9 —14所示把矢量$\vec{A}$的正向与ox、oy、oz轴的正向间的夹角分别记为α、β、γ，叫做矢量$\vec{A}$的方向角*，方向角确定了矢量的方向。又把cosα、cosβ、cosγ叫做矢量$\vec{A}$的方向余弦。在直角三角形OAM、OBM和OCM中可得

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{A}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \cos\beta=\frac{y}{|\vec{A}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{A}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (3.4)$$

知道了矢量的方向余弦，也就可以求得矢量的方向角。方向角（或方向余弦）之间不是独立的它们具有以下的关系：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (3.5)$$

这是因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$

$$=\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}=1$$

例2　已知三力

$$\vec{f}_1=\vec{i}-2\vec{k};\quad \vec{f}_2=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k};\quad \vec{f}_3=\vec{j}+\vec{k}$$

作用于一质点，求合力$\vec{f}$的大小及方向角。

解　$\vec{f}=\vec{f}_1+\vec{f}_2+\vec{f}_3=(\vec{i}-2\vec{k})+(2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k})+(\vec{j}+\vec{k})$

$$=3\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$$

由（3.3）和（3.4）式可得

$$|\vec{f}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{22}\approx 4.690$$

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{22}};\quad \cos\beta=\frac{-2}{\sqrt{22}};\quad \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{22}}$$

查表可得　$\alpha\approx 50°14'$；$\beta\approx 115°14'$；$\gamma\approx 50°14'$

故得合力大小的近似值为4.690个单位，合力的三个方向角为$\alpha\approx 50°14'$，$\beta\approx 115°14'$，$\gamma\approx 50°14'$。

---

* 为了使方向角是唯一的，因此规定$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$

例 3　已知矢量$\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$，求单位矢量$\vec{A}_0$的分解式。

解　根据单位矢量的概念知$\vec{A}_0 = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$，因而单位矢量$\vec{A}_0$的分解式为

$$\vec{A}_0 = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}$$

由公式（3.4），即得

$$\vec{A}_0 = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

如果一矢量的起点在$M_1(x_1, y_1, z_1)$，终点在$M_2(x_2, y_2, z_2)$，怎样求$\overrightarrow{M_1M_2}$的分解式呢？

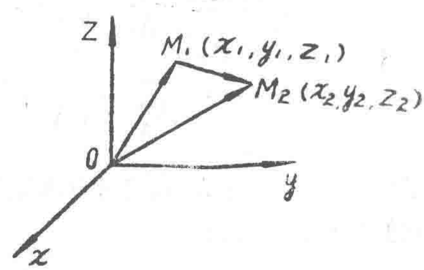

图 9—15

如图 9—15，作矢量$\overrightarrow{OM_1}$与$\overrightarrow{OM_2}$，则有

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

但因

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

故得$\overrightarrow{M_1M_2}$的分解式为：

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \qquad (3.6)$$

第四节　两矢量的数积和矢积

本节讨论矢量的乘法运算，矢量的乘法也是从许多实际问题中抽象概括出来的。

（一）两矢量的数积

设一力$\vec{F}$作用于一物体上，使物体得位移$\vec{S}$，力的方向与位移的方向间的夹角为θ，求此力所作的功（见图 9—16）。

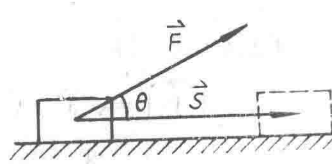

图 9—16

将力$\vec{F}$分解成与$\vec{S}$平行和垂直的两个分力，易知平行分力作功，垂直分力不作功。因此可得力$\vec{F}$所作的功

$$W = (|\vec{F}|\cos\theta)|\vec{S}| = |\vec{F}||\vec{S}|\cos\theta$$

从这个例子看到，由两个矢量$\vec{F}$和$\vec{S}$确定了一个数量：$|\vec{F}||\vec{S}|\cos\theta$，类似于这样的乘积，在物理和力学中还有其它的问题也会遇到，为此，加以抽象便得两矢

量数积的概念。

定义：已知两矢量$\vec{A}$与$\vec{B}$及其夹角θ（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$），乘积

$$|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

叫做$\vec{A}$与$\vec{B}$的数积，并记为$\vec{A}\cdot\vec{B}$，即

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \tag{4.1}$$

数积又叫做点积。

由数积的定义，上述作功问题可表示为$W=\vec{F}\cdot\vec{S}$。

数积具有以下的运算规律：

（i）　$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$　　（交换律）

（ii）　$m(\vec{A}\cdot\vec{B})=(m\vec{A})\cdot\vec{B}$　　（结合律）

（iii）　$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$　　（分配律）

利用矢量分解式求数积：设

$$\vec{A}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\quad \vec{B}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$$

则

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B}&=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})\\&=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot x_2\vec{i}+(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot y_2\vec{j}\\&\quad+(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot z_2\vec{k}\\&=x_1x_2\vec{i}\cdot\vec{i}+y_1x_2\vec{j}\cdot\vec{i}+z_1x_2\vec{k}\cdot\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\cdot\vec{j}+y_1y_2\vec{j}\cdot\vec{j}\\&\quad+z_1y_2\vec{k}\cdot\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\cdot\vec{k}+y_1z_2\vec{j}\cdot\vec{k}+z_1z_2\vec{k}\cdot\vec{k}\end{aligned}$$

因为$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$是互相垂直的单位矢量，所以

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$
$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

因此，我们得到

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \tag{4.2}$$

两矢量垂直的条件：设$\vec{A}$，$\vec{B}$为非零矢量，若$\vec{A}$与$\vec{B}$垂直，则$\vec{A}\cdot\vec{B}=0$；反之，若$\vec{A}\cdot\vec{B}=0$则$\vec{A}$与$\vec{B}$垂直。

这是因为若$\vec{A}$与$\vec{B}$垂直，则$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\frac{\pi}{2}=0$；反之，若$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta=0$，按假设$|\vec{A}|$，$|\vec{B}|$都不等于零，只有$\cos\theta=0$，故知$\theta=\frac{\pi}{2}$，即$\vec{A}$与$\vec{B}$垂直。

上述结论也可表示如下：

$$\vec{A}\perp\vec{B}\Longleftrightarrow\vec{A}\cdot\vec{B}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$$

例1　设力$\vec{F}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$作用在一质点上，质点由$M_1(1,2,-1)$沿直

线移动到M_2（3，1，2），求此力所作的功（力的单位为公斤，位移的单位为米）。

解　由(3.6)式得位移矢量

$$\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=(3-1)\vec{i}+(1-2)\vec{j}+(2+1)\vec{k}$$

$$=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$$

因而所求的功　$W=\vec{F}\cdot\vec{S}=2\times2+(-3)(-1)+4\times3=19$（公斤·米）

例2　已知矢量$\vec{A}=6\vec{i}+2\vec{j}-8\vec{k}$，$\vec{B}=-9\vec{i}+12\vec{j}+8\vec{k}$，求$\vec{A}$与$\vec{B}$的夹角θ。

解　由数积的定义可得$\cos\theta=\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$　即

$$\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\frac{6\times(-9)+2\times12+(-3)\times8}{\sqrt{6^2+2^2+(-3)^2}\sqrt{(-9)^2+12^2+8^2}}=-\frac{54}{119}\approx-0.4538$$

查表得夹角θ≈117°

（二）两矢量的矢积

由力学知识，力$\vec{F}$对于O点的力矩是一个矢量$\vec{M}$，它的大小等于力的大小$|\vec{F}|$和力臂p的乘积，即

$$|\vec{M}|=p|\vec{F}|$$

若用$\vec{r}$表示起点为O、终点为A（力的作用线上的一点）的矢量（见图9—17），则力臂

$$p=|\vec{r}|\sin\theta$$

其中θ是$\vec{r}$与$\vec{F}$的夹角，因而

$$|\vec{M}|=p|\vec{F}|=|\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta$$

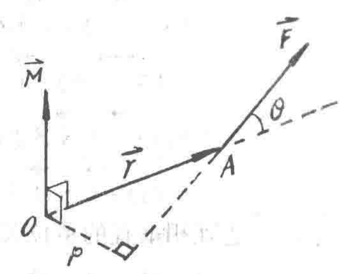

图9—17

力矩矢量$\vec{M}$的方向是垂直于$\vec{r}$与$\vec{F}$所在的平面，它的正向按右手定则确定，即当右手的四指按照从$\vec{r}$的正向绕O点转过θ（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）角度与$\vec{F}$的正向一致时的旋转方向握拳，则大姆指的指向即为$\vec{M}$的正向。

这个例子表明，由两矢量$\vec{r}$和$\vec{F}$确定了一个矢量$\vec{M}$，它的模等于$|\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta$，它的方向是垂直于$\vec{r}$和$\vec{F}$所在的平面且按右手定则确定它的正向。类似于这样的情况在物理和力学中还有其它的一些问题。我们由此抽象出两矢量的矢积概念。

定义：两矢量$\vec{A}$与$\vec{B}$的矢积是由下列两个条件所确定的一个矢量$\vec{C}$

（i）　$\vec{C}$的模：　$|\vec{C}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$（其中θ是$\vec{A}$与$\vec{B}$的夹角，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）即$\vec{C}$的模在数值上等于以$\vec{A}$、$\vec{B}$为两邻边所作成的平行四边形的面积（如图9—18）。

（ii）　$\vec{C}$的方向，它垂直于$\vec{A}$与$\vec{B}$所在的平面且它的正向按右手定则确定，即当右手

的四指按照从$\vec{A}$的正向转过θ（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）角度与$\vec{B}$的正向重合时的旋转方向握拳，则大姆指的指向即为$\vec{C}$的正向。

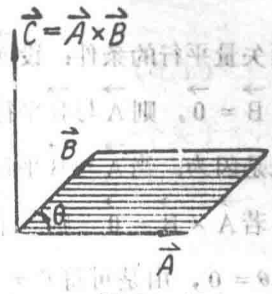

图 9—18

$\vec{A}$与$\vec{B}$的矢积记为$\vec{A}\times\vec{B}$，即

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$$

矢积又叫做叉积。按矢积的定义，力矩矢量可表示为

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

由矢积的定义可知，$\vec{A}\times\vec{B}$和$\vec{B}\times\vec{A}$的模相等但指向相反，即是说：

$$\vec{B}\times\vec{A}=-(\vec{A}\times\vec{B})$$

由此可见，两矢量的矢积不满足交换律。

矢积满足以下的运算规律：

(i) $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

(ii) $(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}$

(iii) $(m\vec{A})\times\vec{B}=\vec{A}\times(m\vec{B})=m(\vec{A}\times\vec{B})$

两矢量矢积的分解式：设

$$\vec{A}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\qquad\vec{B}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$$

则

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B}&=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})\\&=x_1x_2(\vec{i}\times\vec{i})+y_1x_2(\vec{j}\times\vec{i})+z_1x_2(\vec{k}\times\vec{i})\\&\quad+x_1y_2(\vec{i}\times\vec{j})+y_1y_2(\vec{j}\times\vec{j})+z_1y_2(\vec{k}\times\vec{j})\\&\quad+x_1z_2(\vec{i}\times\vec{k})+y_1z_2(\vec{j}\times\vec{k})+z_1z_2(\vec{k}\times\vec{k})\end{aligned}$$

但因$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$是互相垂直的单位矢量，它们满足下列关系：

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\quad\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$

故得结果为

$$\vec{A}\times\vec{B}=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}\qquad(4.3)$$

为了便于记忆，上式也可利用行列式来表示：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$$

例2设 $\vec{A}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，$\vec{B}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ 求$\vec{A}\times\vec{B}$的分解式。

解 $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=5\vec{i}-11\vec{j}-7\vec{k}$

两矢量平行的条件：设$\vec{A}$、$\vec{B}$为非零矢量。若$\vec{A}$与$\vec{B}$平行，则$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$。反之，若$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$，则$\vec{A}$与$\vec{B}$平行。

这是因为，当$\vec{A}$与$\vec{B}$平行时，$\theta=0$或π，因而$\sin\theta=0$，所以$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$。反之，若$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$ 则 $|\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\theta=0$，但因$|\vec{A}|$、$|\vec{B}|$不为零，只有 $\sin\theta=0$，由是可得$\theta=0$或π，故知$\vec{A}$与$\vec{B}$平行。

又由（4.3）式知，$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$即为

$$(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}=\vec{0}$$

因而 $$y_1z_2-y_2z_1=0,\quad z_1x_2-z_2x_1=0,\quad x_1y_2-x_2y_1=0$$

或 $$\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2},\qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1}{x_2},\qquad \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$$

即 $$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

以上讨论的结果可表示如下：

$$\vec{A}/\!/\vec{B}\rightleftarrows\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}\rightleftarrows\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

第五节　空间曲面与曲线的概念

（一）　曲面的方程

在平面解析几何中，我们把平面曲线看成是动点按某一条件运动的几何轨迹；在空间解析几何中，空间曲面也可以看成是空间动点按某一条件运动的几何轨迹。先看下面的例子。

例1　动点$M(x,y,z)$到定点$C(a,b,c)$的距离恒等于正数R，我们知道这动点M的几何轨迹是中心在点$C(a,b,c)$，半径为R的球面（如图9—19）。现在我们问：这球面上的点M的坐标x，y，z应满足什么样的关系式？

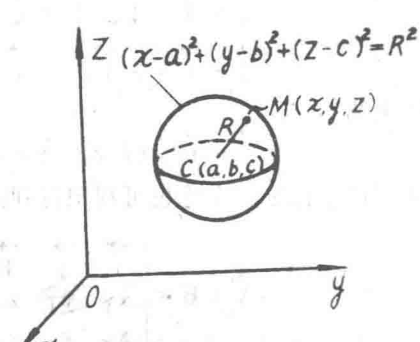

图9—19

解　由条件，动点$M(x,y,z)$到定点$C(a,b,c)$的距离等于定数R，即

$$MC=R$$

由两点间的距离公式

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R$$

两边平方消去根号得

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \tag{5.1}$$

(5.1)就是这球面上的点M的坐标x,y,z应满足的关系式,它是一个关于x,y,z的二次方程。凡是这球面上点的坐标都满足这方程，且不在这球面上的点的坐标都不满足这方程。我们称(5.1)为这球面的方程。

特别地，$x^2+y^2+z^2=R^2$ 是中心在原点，半径为R的球面方程。

一般说来，设x，y，z为三个变量，含x，y，z的方程通常用

$$F(x,y,z)=0 \tag{5.2}$$

来表示。若在方程(5.2)中，将x看成空间直角坐标系中点的横坐标，y看成纵坐标，z看成竖坐标，取定一对数x,y，如果可以从(5.2)算出z来，则每一组数(x,y,z)就确定了空间的一点。当x，y在某一范围中变化时，由这些(x,y,z)所确定的点的全体，一般说组成一曲面(如图9—20)。

定义　若曲面上所有点的坐标都满足方程(5.2)，而且，不在这曲面上的点的坐标都不满足方程(5.2)，则方程(5.2)就叫做这曲面的方程。

所以，曲面的方程表达了曲面上所有点的共同性质。

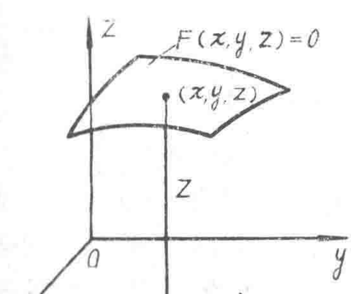

图9—20

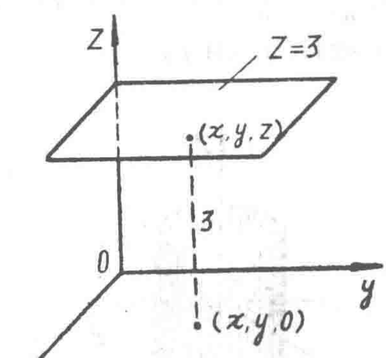

图9—21

例2　一平面平行于xoy平面，且它们之间的距离为3(如图9—21)。求这平面的方程。

解　由题意，这平面上所有点的竖坐标z都等于3，而且，不在这平面上的点的竖坐标z都不等于3，故所求平面的方程是

$$z=3 \qquad 或 \qquad z-3=0 \tag{5.3}$$

易知，坐标平面xoy的方程是$z=0$；坐标平面yoz与zox的方程分别是$x=0$与

$y=0$。

在研究方程表示的几何图形时，要注意到在平面上还是在空间中考察问题这个前提。例如，在平面直角坐标系下，方程 $x=0$ 与 $y=0$ 分别表示 y 轴与 x 轴；而在空间直角坐标系下，方程 $x=0$ 与 $y=0$ 则分别表示 yoz 平面与 zox 平面了。

例 3　如图 9—22所示是一圆柱面，它可看成是一平行于 z 轴的直线沿 xoy 平面上的圆C：$x^2+y^2=a^2$ 平行移动而成的，现在来求这圆柱面的方程。

在这圆柱面上任取一点（x，y，z），不论 z 取什么值时，它的横坐标 x 和纵坐标 y 必定满足方程

$$x^2+y^2=a^2 \qquad (5.4)$$

而且，不在圆柱面上的点，它的坐标不满足这个方程，故所求圆柱面的方程是（5.4）。圆C叫做这圆柱面的准线，平行于 z 轴而沿C移动的直线叫做这圆柱面的母线。

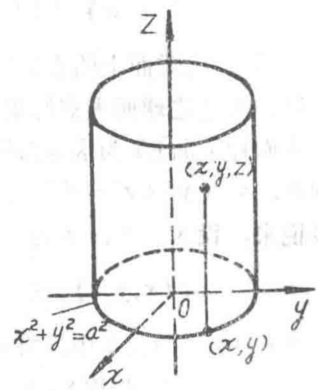

图 9—22

这里，我们看到在平面直角坐标系下，方程 $x^2+y^2=a^2$ 表示以原点为中心，a 为半径的圆；在空间直角坐标系下，方程 $x^2+y^2=a^2$ 则表示一母线平行 z 轴的圆柱面。

同理，$y^2+z^2=a^2$，$z^2+x^2=a^2$ 都表示圆柱面，它们的母线分别平行于 x 轴和 y 轴。

又如 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，　$x^2=2py$　分别表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面与抛物柱面（如图 9—23，9—24）。

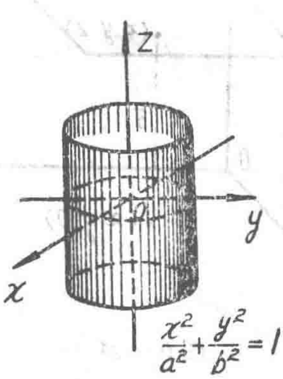

图 9—23

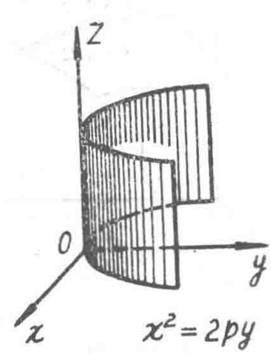

图 9—24

（二）　空间曲线方程

空间曲线L可以看成是两个曲面的交线（如图 9—25）。如果这两曲面的方程分别是

$$\Phi(x,\ y,\ z)=0 \qquad 与 \qquad \psi(x,\ y,\ z)=0$$

由于曲线L上的点同时在这两个曲面上，它的坐标（x，y，z）必同时满足这两个方程；且不在这两曲面交线L上的点的坐标（x，y，z）必不同时满足这两个方程，因而，由这

两曲面的方程联立的方程组，即

$$\begin{cases}\Phi(x, y, z)=0\\ \Psi(x, y, z)=0\end{cases} \tag{5.5}$$

就是空间曲线L的方程。

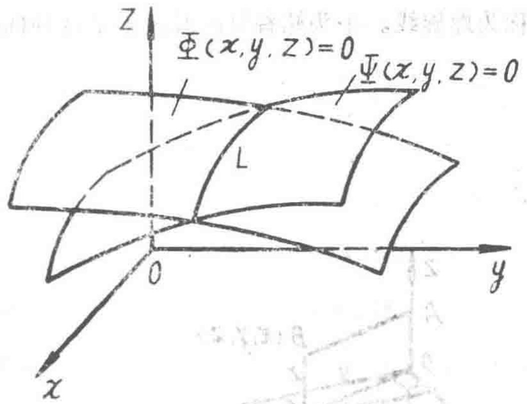

图 9—25

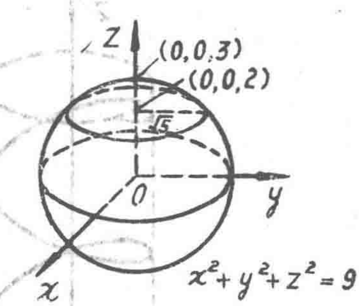

图 9—26

例 1　方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ z=2\end{cases}$ 表示怎样的空间曲线？

解　第一个方程表示中心在原点，半径为3的球面；第二个方程表示平行于xoy平面且与它的距离为2的平面。因而这空间曲线就是用平面 $z=2$ 来截割球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 所得的交线。

所给方程组相当于

$$\begin{cases}x^2+y^2+2^2=9\\ z=2\end{cases} \quad \text{或写作} \begin{cases}x^2+y^2=5\\ z=2\end{cases}$$

它表示在 $z=2$ 这个平面上的中心在（0，0，2），半径为 $\sqrt{5}$ 的圆（如图 9—26）。

在平面解析几何中，曲线可用参数方程表示，在这里，空间曲线也可以用参数方程来表示，它的一般形式是

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\omega(t)\end{cases} \tag{5.6}$$

例 2　设一长度为a的动线段AB，它的一个端点A恆在z轴上，且此线段恆垂直于z轴；设此线段以角速度ω（常量）绕z轴旋转，同时，该线段沿z轴的方向以线速度v（常量）上升，求该线段另一端点B画出的曲线的方程。

解　设运动开始时，端点B位于x轴的正半轴上点C处(如图 9—27)。当时刻为t时，点B的坐标为（x，y，z），此时，点B在xoy平面上的投影为点M(x，y，0)，因而

$$\angle COM=\omega t,\quad MB=vt$$