经济数学

MATHEMATICS IN ECONOMICS

2

中国 CHINA

1985

征稿启事

本刊是我国教育界、经济学界、数学界的一些学者倡议并委托湖南省经济数学研究会、湖南财经学院主办的学术刊物，主要刊登经济数学各个分支有创见的学术论文，以及经济问题研究中的数学理论、数学方法与数学模型。

欢迎

·数理系统方法　　·运筹学

·数理统计学　　·概率论

等方向，以及

·经济控制论　　数理经济学

·经济信息论　　数量经济学

·经 济 预 测　　计量经济学

等方面的数学方法研究的稿件。

来稿请按一般学报要求清稿。不刊登的稿件一般不退，请勿一稿两投。

经 济 数 学

第2期　1985年

主　办：湖南财经学院
　　　　湖南省经济数学研究会
编　辑：《经济数学》编委会
印　刷：湖 南 大 学 印 刷 厂
发　行：《经济数学》编辑部
（地址：湖南财经学院）

湖南省报刊登记证165号

定价1.25元

目　录

研　究　简　报

动态与模息

经济 MATHEMATICS
数学 IN ECONOMICS

NO.2 1985

关于椭球等高分布参数的似然比检验*

方开泰 许建伦

(中国科学院应用数学研究所 (苏州大学数学系)

§1 引 言

本文采用下列记号：$\underset{\sim}{X} \overset{d}{=} \underset{\sim}{Y}$ 表示 $\underset{\sim}{X}$ 和 $\underset{\sim}{Y}$ 具有相同分布，$O(m)$ 表示由 $m\times m$ 阶正交阵组成的正交群，$V_{m\times n}$ 表示 Stiefel 流形，即 $V_{m\times n}=\{\underset{\sim}{H}_{(m\times n)}: \underset{\sim}{H}'\underset{\sim}{H}=I_n\}$，$\underset{\sim}{A}\geqslant 0$（或 $\underset{\sim}{A}>0$）表示 $\underset{\sim}{A}$ 是非负定矩阵（或正定矩阵），$\underset{\sim}{S}^{1/2}$ 表示矩阵 $\underset{\sim}{S}$ 的平方根，S_p 表示由 $p\times p$ 阶，且对角线元素均大于零的下三角阵组成的集合。

对于椭球等高分布，由随机向量的情形推广到随机矩阵的情形，一般是下面的四个类，即

$$\mathscr{F}_1(n\times p)=\{\underset{\sim}{X}(n\times p): \underset{\sim}{\Gamma}\underset{\sim}{X}\overset{d}{=}\underset{\sim}{X}, \text{ 对一切 } \underset{\sim}{\Gamma}\in O(n)\}$$

$$\mathscr{F}_2(n\times p)=\{\underset{\sim}{X}(n\times p): \underset{\sim}{X}=(\underset{\sim}{X}_1, \cdots, \underset{\sim}{X}_p)\overset{d}{=}(\underset{\sim}{\Gamma}_1\underset{\sim}{X}_1, \cdots, \underset{\sim}{\Gamma}_p\underset{\sim}{X}_p)$$

对一切 $\underset{\sim}{\Gamma}_i\in O(n)$，$i=1, \cdots, p\}$

$$\mathscr{F}_3(n\times p)=\{\underset{\sim}{X}(n\times p): \Gamma(V_{ec}\underset{\sim}{X})\overset{d}{=}V_{ec}\underset{\sim}{X} \text{ 对一切 } \underset{\sim}{\Gamma}\in O(np)\}$$

其中 $V_{ec}\underset{\sim}{X}=(\underset{\sim}{X}_1', \cdots, \underset{\sim}{X}_p')'$，$\underset{\sim}{X}=(\underset{\sim}{X}_1, \cdots, \underset{\sim}{X}_p)$

$$\mathscr{F}_4(n\times p)=\{\underset{\sim}{X}(n\times p): \underset{\sim}{\Gamma}\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{Q}\overset{d}{=}\underset{\sim}{X}, \text{ 对一切 } \underset{\sim}{\Gamma}\in O(n)\ \underset{\sim}{Q}\in O(p)\}$$

对于这四类分布，特别是 $\mathscr{F}_1(n\times p)$ 和 $\mathscr{F}_4(n\times p)$，有很多统计工作者作过研究，得到了许多令人感兴趣的结果，Anderson & Fang[1]对 $\mathscr{F}_3(n\times p)$ 的线性变换族

* 1984年7月收到

$$\mathscr{F}_3(\underset{\sim}{M},\ \underset{\sim}{\Sigma},\ n\times p)=\{\underset{\sim}{Y}(n\times p):\ \underset{\sim}{Y}\overset{d}{=}\underset{\sim}{M}+\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\Sigma}^{1/2}$$

$\underset{\sim}{X}\in\mathscr{F}_3(n\times p)$ 其中$\underset{\sim}{M}$，$\underset{\sim}{\Sigma}^{1/2}$为常数阵}

的一个子族，讨论了参数的极大似然估计，导出了假设检验的似然比准则。本文试图对 $\mathscr{F}_1(n\times p)$ 和 $\mathscr{F}_s(n\times p)$ 的线性变换族

$$\mathscr{F}_1^+(\underset{\sim}{M},\ \underset{\sim}{\Sigma},n\times p)=\{\underset{\sim}{Y}(n\times p):\ \underset{\sim}{Y}\overset{d}{=}\underset{\sim}{M}+\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\Sigma}^{1/2},$$

$\underset{\sim}{X}\in\mathscr{F}_1(n\times p)$, $P(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}>0)=1$，$\underset{\sim}{M}$，$\underset{\sim}{\Sigma}$为常数阵}

$$\mathscr{F}_s^+(\underset{\sim}{M},\ \underset{\sim}{\Sigma},\ n\times p)=\{\underset{\sim}{Y}\ (n\times p):\ \underset{\sim}{Y}\overset{d}{=}\underset{\sim}{M}+\underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{A},$$

$\underset{\sim}{X}\in\mathscr{F}_s(n\times p)$, $P(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}>0)=1$，$\underset{\sim}{M}$，$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{A}'=\underset{\sim}{\Sigma}$，$\underset{\sim}{A}\in S_p$为常数阵} 作类似的讨论，同时，在文章的最后一节，我们把本文所得的结果，运用于多元线性模型，讨论了线性假设的检验问题，得到了比通常更为一般的结果。

§2 $\mathscr{F}_s^+(\underset{\sim}{M},\ \underset{\sim}{\Sigma},\ n\times p)$ 中参数的极大似然估计与似然比准则

根据分布族$\mathscr{F}_s(n\times p)$ 的定义，我们容易得到：如果随机阵 $\underset{\sim}{X}\in\mathscr{F}_s(n\times p)$，则它具有下列性质：

(i) $\underset{\sim}{X}$的特征函数一定具有形式$\phi(\lambda(\underset{\sim}{T}'\underset{\sim}{T}))$ 其中$\underset{\sim}{T}$为$n\times p$阶矩阵，$\lambda(\underset{\sim}{A})=diag\ (a_1,\ \cdots,\ a_p)a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_p$ 为$\underset{\sim}{A}$的特征根。

(ii) $\underset{\sim}{X}$的密度函数如存在，则一定具有形式 $f(\lambda(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}))$

(iii) 令$\underset{\sim}{Y}(n\times p)=\underset{\sim}{M}+\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\Sigma}^{1/2}$, 则$\underset{\sim}{Y}$的密度函数具有如下形式

$$|\underset{\sim}{\Sigma}|^{-n/2}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}^{-1/2}(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})'(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})\underset{\sim}{\Sigma}^{-1/2}))$$
$$=|\underset{\sim}{\Sigma}|^{-n/2}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})'(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})))\qquad(2.1)$$

在这一节，我们试图研究 (2.1)中参数 ($\underset{\sim}{M}$，$\underset{\sim}{\Sigma}$) 的极大似然估计及假设检验的似然比准则问题，在此我们对 (2.1) 中的f ($\cdot$) 作如下假定：

(i) $f(\lambda(\cdot))$单调不增性，即：$\underset{\sim}{\Sigma}_1\geqslant\underset{\sim}{\Sigma}_2\geqslant0\Rightarrow f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}_1))\leqslant f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}_2))$

(ii) $f(\lambda(\cdot))$ 连续性，即 $\lim\limits_{\underset{\sim}{\Sigma}\to\underset{\sim}{\Sigma}_0}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}))=f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}_0))\qquad(2.2)$

引理 2.1 设$f(\cdot)$ 满足条件 (2.2)，则函数$|\underset{\sim}{\Sigma}|^{n/2}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}))$ 必在某正定阵$\underset{\sim}{\Sigma}^*$处达到极大值。

证明：因为对任意的$\underset{\sim}{\Sigma}(p\times p)>0$，有

$$\int_{\underset{\sim}{\Sigma}<\underset{\sim}{V}<2\underset{\sim}{\Sigma}} d\underset{\sim}{V}=|\underset{\sim}{\Sigma}|^{\frac{p+1}{2}}\int_{\underset{\sim}{I_p}<\underset{\sim}{W}<2\underset{\sim}{I_p}} d\underset{\sim}{W}\triangleq|\underset{\sim}{\Sigma}|^{\frac{p+1}{2}}\cdot C$$

$$=|\lambda(\underset{\sim}{\Sigma})|^{\frac{p+1}{2}}\cdot C$$

其中C与$\underset{\sim}{\Sigma}$无关，上式只要作积分变换$\underset{\sim}{W}=\underset{\sim}{\Sigma}^{-1/2}\underset{\sim}{V}\underset{\sim}{\Sigma}^{-1/2}$就可证明。又因为

$$\int_{R^{np}} f(\lambda(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}))\,d\underset{\sim}{x}=k\cdot\int_{\underset{\sim}{\Sigma}>0}|\underset{\sim}{\Sigma}|^{(n-p-1)/2}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}))d\underset{\sim}{\Sigma}<\infty$$

所以

$$|2\lambda(\underset{\sim}{\Sigma})|^{n/2}f(2\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}))=2^{np/2}|\lambda(\underset{\sim}{\Sigma})|^{\frac{n}{2}-\frac{p+1}{2}}f(2\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}))\cdot\frac{1}{C}\cdot$$

$$\int_{\underset{\sim}{\Sigma}<\underset{\sim}{V}<2\underset{\sim}{\Sigma}} d\underset{\sim}{V}\leqslant\frac{2^{np/2}}{C}\int_{\underset{\sim}{\Sigma}<\underset{\sim}{V}<2\underset{\sim}{\Sigma}}|\underset{\sim}{V}|^{(n-p-1)/2}f(\lambda(\underset{\sim}{V}))d\underset{\sim}{V}$$

$$=\frac{2^{np/2}}{C}\int_{\underset{\sim}{\Sigma}<\underset{\sim}{V}<2\underset{\sim}{\Sigma}}|\lambda(\underset{\sim}{V})|^{(n-p-1)/2}f(\lambda(\underset{\sim}{V}))d\underset{\sim}{V}\to 0,$$

$$\text{当 } t_r\lambda(\underset{\sim}{V})\to\infty\text{ 时}$$

故$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon>0$，当$t_r\lambda(\underset{\sim}{V})>N_\varepsilon$时，有$|\lambda(\underset{\sim}{\Sigma})|^{n/2}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}))<\varepsilon$，取$0<\varepsilon_0<|\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}_0)|^{n/2}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}_0))$，这里$\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}_0)>0$使$|\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}_0)|^{n/2}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}_0))>0$，易见如此之$\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}_0)$必存在。考虑集合$E=\{\underset{\sim}{T}:\ \underset{\sim}{T}\in S_p,\ \ t_r(\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{T}')\leqslant N_{\varepsilon_0}\}$，$E$是一个连通的有界闭集。记$g(\underset{\sim}{T})=|\lambda(\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{T}')|^{n/2}f(\lambda(\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{T}'))$则$g(\underset{\sim}{T})$在$S_p$上连续，因而$g(\underset{\sim}{T})$在$E$上某点$\underset{\sim}{T}^*$处达到最大值，注意到必有$\underset{\sim}{\Sigma}_0=\underset{\sim}{T}_0\underset{\sim}{T}_0'$，$\underset{\sim}{T}_0\in E$，知$g(\underset{\sim}{T})$在$\underset{\sim}{T}^*$处取到全空间$S_p$上的最大值，（显然$\underset{\sim}{\Sigma}^*=\underset{\sim}{T}^*\underset{\sim}{T}^{*\prime}$为正定阵），此即$|\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}^*)|^{n/2}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}^*))\geqslant|\lambda(\underset{\sim}{\Sigma})|^{n/2}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}))$，$\underset{\sim}{\Sigma}\geqslant 0$，故引理得证。

引理2.1可以等价地叙述成下面的引理，即

引理2.1′：$\prod_{j=1}^{p}\lambda_j^{n/2}f(diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_p))$，$\lambda_j\geqslant 0$，$1\leqslant j\leqslant p$必在某有限点$\lambda_j=\lambda_j^*$，$1\leqslant j\leqslant p$处达到极大值，其中$\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}^*)=diag\ (\lambda_1^*,\ \cdots,\ \lambda_p^*)$。

为了便于下面的讨论，我们进一步对$\widetilde{f}(\cdot)$作如下假定：

$$f(diag(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_p))\text{ 为 }\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_p\text{ 之对称函数。}\qquad(2.3)$$

根据这一假设，我们立即可以知道引理2.1′中的极值点为：$\lambda_1^*=\lambda_2^*=\cdots=\lambda_p^*\triangleq\lambda^*$，即$\underset{\sim}{\Sigma}^*=\lambda^*\underset{\sim}{I}$。

定理2.1：设 $\underset{\sim}{Y}\in\mathscr{F}_s^+(\underset{\sim}{M},\ \underset{\sim}{\Sigma},\ n\times p)$，且密度函数为（2.1），其中 $f(\cdot)$ 满足条件（2.2），（2.3）。令 $\omega_o=\omega_m\times\omega_c$，其中 ω_m 表示由 $n\times p$ 阶矩阵组成的集合，ω_c 表示由 $p\times p$ 阶正定阵组成之集合的子集，它满足：如 $\underset{\sim}{\Sigma}\in\omega_c$ $k>0$ 为常数 $\Rightarrow k\underset{\sim}{\Sigma}\in\omega_c$ 假如在正态情况下，$\underset{\sim}{M}$，$\underset{\sim}{\Sigma}$ 的极大似然估计 $\widetilde{\underset{\sim}{M}}$，$\widetilde{\underset{\sim}{\Sigma}}$ 唯一存在，且 $P(\widetilde{\underset{\sim}{\Sigma}}>0)=1$，则对于 $f(\cdot)$，$\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{\Sigma}$ 的极大似然估计存在，且为 $\underset{\sim}{M}=\widetilde{\underset{\sim}{M}}$，$\underset{\sim}{\Sigma}=\frac{n}{\lambda^*}\widetilde{\underset{\sim}{\Sigma}}$ 似然函数的极大值为

$$\left|\widetilde{\underset{\sim}{C}}\right|^{-n/2}\lambda^{*np/2}f(\lambda^*\underset{\sim}{I}_p) \tag{2.4}$$

其中

$$\widetilde{\underset{\sim}{C}}=\min_{\underset{\sim}{M}\in\omega_m}(\underset{\sim}{Y}-M)'(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M}) \tag{2.5}$$

证明：因为 $\underset{\sim}{X}\sim N(\underset{\sim}{0},\ \underset{\sim}{I}_n\otimes\underset{\sim}{I}_p)\in\mathscr{F}_s(n\times p)$，所以，它的密度函数为：$(2\pi)^{-np/2}etr\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)$ 其中 $etr(\underset{\sim}{A})=exp(tr\,\underset{\sim}{A})$。

令 $\underset{\sim}{Y}(n\times p)=\underset{\sim}{M}+\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\Sigma}^{1/2}$，则得 $\underset{\sim}{Y}$ 的密度函数为 $(2\pi)^{-np/2}$ 乘以

$$|\underset{\sim}{\Sigma}|^{-n/2}\,etr\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\Sigma}^{-1/2}(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})'(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})\underset{\sim}{\Sigma}^{-1/2}\right)$$

$$=|\underset{\sim}{\Sigma}|^{-n/2}\,etr\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})'(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})\right)$$

假如（2.5）中的极小值在 $\underset{\sim}{M}=\widetilde{\underset{\sim}{M}}$ 处达到，因此，$|\underset{\sim}{\Sigma}|^{-n/2}etr\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\widetilde{\underset{\sim}{C}}\right)$ 的极大值在 $\widetilde{\underset{\sim}{\Sigma}}=\frac{1}{n}\widetilde{\underset{\sim}{C}}$ 处达到，且极大值 $n^{np/2}|\widetilde{\underset{\sim}{C}}|^{-n/2}e^{-np/2}$，$\underset{\sim}{M}$ 和 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 的极大似然估计为 $\widetilde{\underset{\sim}{M}}$ 和 $\widetilde{\underset{\sim}{\Sigma}}$

下面考虑似然函数

$$|\underset{\sim}{\Sigma}|^{-n/2}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})'(\underset{\sim}{Y}-M)))$$

由于 $f(\lambda(\underset{\sim}{A}))$ 关于 $\underset{\sim}{A}$ 具有单调不增性（条件（2.2）(i)）所以，它的极大值也在 $\underset{\sim}{M}=\widetilde{\underset{\sim}{M}}$ 处达到，从而可进一步推得 $|\underset{\sim}{\Sigma}|^{-n/2}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\widetilde{\underset{\sim}{C}}))$ 的极大值在 $\underset{\sim}{\Sigma}=\frac{1}{\lambda^*}\widetilde{\underset{\sim}{C}}$ 处达到，因此，$\underset{\sim}{\Sigma}=\frac{1}{\lambda^*}\widetilde{\underset{\sim}{C}}=\frac{n}{\lambda^*}\widetilde{\underset{\sim}{\Sigma}}$，似然函数的极大值为 $|\widetilde{\underset{\sim}{C}}|^{-n/2}(\lambda^*)^{np/2}f(\lambda^*\underset{\sim}{I}_p)$。

推论：设条件同于定理2.1，原假设 $\underset{\sim}{M}\in\omega_m\subseteq\Omega_m$ 当 $f(\cdot)$ 为正态密度时且似然比准则唯一存在时，则准则是

$$(|\underset{\sim}{\tilde{C}}_\Omega|/|\underset{\sim}{\tilde{C}}_\omega|)^{n/2}$$

（其中 $\underset{\sim}{\tilde{C}}_\omega$，$\underset{\sim}{\tilde{C}}_\Omega$ 相对于 ω_m，Ω_m 在（2.5）中分别被定义）且它独立于 $f(\cdot)$。

例 2.1（多元 T－分布）如随机阵 $\underset{\sim}{X}(n\times p)$ 的密度函数为 $C\cdot|\underset{\sim}{I}_p+\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}|^{-(n+p)/2}$，其中 c 为正则化常数，则称 $\underset{\sim}{X}$ 服从多元 T－分布。令 $\underset{\sim}{Y}_{(n\times p)}=\underset{\sim}{M}+\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\Sigma}^{1/2}$，其中 $\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n\otimes\underset{\sim}{u}'$，$\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n=\left.\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right\}n$，$\underset{\sim}{\Sigma}$ 为常数阵，且 $P(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}>0)=1$ 则

（i）$\underset{\sim}{Y}\in\mathscr{F}_S^+(\underset{\sim}{M},\ \underset{\sim}{\Sigma},\ n\times p)$，且密度函数为：

$$C\cdot|\underset{\sim}{\Sigma}|^{-n/2}|\underset{\sim}{I}_p+\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})'(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})|^{-(n+p)/2}$$

（ii）$\underset{\sim}{M}$ 和 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 的极大似然估计，分别为 $\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n\otimes\overline{\underset{\sim}{y}}'$ 和 $\frac{1}{\lambda^*}\underset{\sim}{G}$

其中 $$\overline{\underset{\sim}{y}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{y}_{(i)}\qquad \underset{\sim}{G}=\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{y}_{(i)}-\overline{\underset{\sim}{y}})(\underset{\sim}{y}_{(i)}-\overline{\underset{\sim}{y}})'$$

$$\underset{\sim}{Y}'=(\underset{\sim}{y}_{(1)},\ \cdots,\ \underset{\sim}{y}_{(n)}),\ \lambda^*=n/p.$$

证明：（i）是显然的，我们仅证（ii）。事实上，$f(\lambda(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}))=$ $=C\cdot|\underset{\sim}{I}_p+\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}|^{-(n+p)/2}$ 满足条件（2.2），（2.3），经计算可求得 $\lambda^*=n/p$. 依定理 2.1 立即得到 $\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n\otimes\underset{\sim}{u}'$，$\underset{\sim}{\Sigma}$ 的极大似然估计分别为 $\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n\otimes\overline{\underset{\sim}{y}}'$，$\frac{1}{\lambda^*}\underset{\sim}{G}$ 其中 $\overline{\underset{\sim}{y}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{y}_{(i)}$，$\underset{\sim}{G}=\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{y}_{(i)}-\overline{\underset{\sim}{y}})(\underset{\sim}{y}_{(i)}-\overline{\underset{\sim}{y}})'$，$\underset{\sim}{Y}'=(\underset{\sim}{y}_{(1)},\ \cdots,\ \underset{\sim}{y}_{(n)})$

例 2.2 设 $\underset{\sim}{Y}\in\mathscr{F}_S^+(\underset{\sim}{M},\ \underset{\sim}{\Sigma},\ n\times p)$，且它的密度为 $|\underset{\sim}{\Sigma}|^{-n/2}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})'(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})))$，其中 $\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n\otimes\underset{\sim}{u}'$，$f(\cdot)$ 满足条件（2.2）及（2.3）。假设检验为

$$H_0:\ \underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{0}\longleftrightarrow H_1:\ \underset{\sim}{u}\neq\underset{\sim}{0}$$

则似然比统计量为 $T_2^2=n(n-1)\overline{\underset{\sim}{y}}'\underset{\sim}{G}^{-1}\overline{\underset{\sim}{y}}$，其中 $\overline{\underset{\sim}{y}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{y}_{(i)}=\frac{1}{n}\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n$，

$\underset{\sim}{G}=\sum_{j=i}^{n}(\underset{\sim}{y}_{(j)}-\overline{\underset{\sim}{y}})(\underset{\sim}{y}_{(j)}-\overline{\underset{\sim}{y}})'$，$\underset{\sim}{Y}'=(\underset{\sim}{y}_{(1)}, \cdots, \underset{\sim}{y}_{(n)})$ 且它的分布与正态情况（即 $\underset{\sim}{Y}\sim N(\underset{\sim}{M}, \underset{\sim}{I}_n\otimes\underset{\sim}{\Sigma})$，$\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n\otimes\underset{\sim}{u}'$）完全一样，

即 $[T_s^2/(n-1)][(n-p)/p]\sim F(p, n-p)$

证明：众所周知，当 $x\sim N(\underset{\sim}{M}, \underset{\sim}{I}_n\otimes\underset{\sim}{\Sigma})$，其中 $\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n\otimes\underset{\sim}{u}'$ 时，上面的检验是 Hotelling's T^2 检验，当 H_0 成立时，它的似然比统计量为

$$T^2=\frac{n-1}{n}(\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n'\underset{\sim}{Z})(\underset{\sim}{Z}'\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{Z})^{-1}(\underset{\sim}{Z}'\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n)$$

其中 $$\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{I}_n-\frac{1}{n}\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n', \quad \underset{\sim}{Z}\sim N(\underset{\sim}{0},\underset{\sim}{I}_n\otimes\underset{\sim}{I}_p)$$

$$[T^2/(n-1)][(n-p)/p]\sim F(p, n-p)$$

当 $\underset{\sim}{Y}\in\mathscr{F}_s^+(\underset{\sim}{M}, \underset{\sim}{\Sigma}, u\times p)$，$\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n\otimes\underset{\sim}{u}'$，且 $\underset{\sim}{Y}$ 的密度为

$$|\underset{\sim}{\Sigma}|^{-n/2}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})'(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})))$$

其中 $f(\cdot)$ 满足条件（2.2）（2.3），根据推论，当 H_0 成立时，似然比统计量为

$$\lambda=(1+n(\overline{\underset{\sim}{y}}'\underset{\sim}{G}^{-1}\overline{\underset{\sim}{y}}))^{-n/2}$$

它等价于 $$T_s^2=n(n-1)\overline{\underset{\sim}{y}}'\underset{\sim}{G}^{-1}\overline{\underset{\sim}{y}}=\frac{n-1}{n}(\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n'\underset{\sim}{Y})(\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{Y})^{-1}(\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n)$$

其中 $$\overline{\underset{\sim}{y}}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\underset{\sim}{y}_{(j)}=\frac{1}{n}\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n, \quad \underset{\sim}{G}=\sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{y}_{(j)}-\overline{\underset{\sim}{y}})(\underset{\sim}{y}_{(j)}-\overline{\underset{\sim}{y}})'=\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{Y}$$

且 $$\underset{\sim}{Y}'=(\underset{\sim}{y}_{(1)}, \cdots, \underset{\sim}{y}_{(n)})$$

因为 $\underset{\sim}{Y}=\underset{\sim}{M}+\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\Sigma}^{1/2}\overset{d}{=}\underset{\sim}{M}+\underset{\sim}{U}_1\underset{\sim}{\wedge}\underset{\sim}{\vee}\underset{\sim}{\Sigma}^{1/2}$，$\underset{\sim}{Z}(\underset{\sim}{Z}'\underset{\sim}{Z})^{-1/2}\overset{d}{=}U_1$，

$\underset{\sim}{V}'\underset{\sim}{V}=\underset{\sim}{I}_p$，$\underset{\sim}{\Gamma}\underset{\sim}{V}\overset{d}{=}\underset{\sim}{V}$，$\underset{\sim}{\Gamma}\in O(p)$ 由此，当 H_0 成立时

$$T_s^2\overset{d}{=}\frac{n-1}{n}(\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n'\underset{\sim}{U}_1\underset{\sim}{\wedge}\underset{\sim}{\vee}\underset{\sim}{\Sigma}^{1/2})(\underset{\sim}{\Sigma}^{1/2}\underset{\sim}{V}'\underset{\sim}{\wedge}\underset{\sim}{U}_1'\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{U}_1\underset{\sim}{\wedge}\underset{\sim}{\vee}\underset{\sim}{\Sigma}^{1/2})^{-1}(\underset{\sim}{\Sigma}^{1/2}\underset{\sim}{\vee}\underset{\sim}{\wedge}\underset{\sim}{U}_1'\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n)$$

$$=\frac{n-1}{n}(\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n'\underset{\sim}{U}_1)(\underset{\sim}{U}_1'\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{U}_1)^{-1}(\underset{\sim}{U}_1'\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n)$$

$$\overset{d}{=}\frac{n-1}{n}(\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n'\underset{\sim}{Z}(\underset{\sim}{Z}'\underset{\sim}{Z})^{-1/2})((\underset{\sim}{Z}'\underset{\sim}{Z})^{-1/2}\underset{\sim}{Z}'\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{Z}(\underset{\sim}{Z}'\underset{\sim}{Z})^{-1/2})^{-1}((\underset{\sim}{Z}'\underset{\sim}{Z})^{-1/2}\underset{\sim}{Z}'\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n)$$

$$=\frac{n-1}{n}(\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n'\underset{\sim}{Z})(\underset{\sim}{Z}'\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{Z})^{-1}(\underset{\sim}{Z}'\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n)$$

$$=T^2$$

对于一般的假设检验

$$H_0:\ \underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{u}_o \longleftrightarrow H_1:\ \underset{\sim}{u}\neq\underset{\sim}{u}_o$$

我们只要作线性变换 $\underset{\sim}{T}=\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M}_o$，其中 $\underset{\sim}{M}_o=\underset{\sim}{\mathbb{I}}_n\otimes\underset{\sim}{u}_0'$ 就可化到上面的讨论。

下面我们讨论另外两个检验问题。

设 $\underset{\sim}{X}\in\mathscr{F}_s(n\times p)$，$p(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}>0)=1$，它的密度函数为 $f(\lambda(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}))$，且 $f(\cdot)$满足条件（2.2），（2.3），剖分 $\underset{\sim}{X}=\begin{pmatrix}\underset{\sim}{X}_1\\ \vdots\\ \underset{\sim}{X}_q\end{pmatrix}\begin{matrix}n_1\\ \vdots\\ n_q\end{matrix}$，其中 $n_j>p$，$j=1,\cdots,q$，令变换 $\underset{\sim}{Y}_j(n_j\times p)=\underset{\sim}{M}_j+\underset{\sim}{X}_j\cdot\underset{\sim}{\Sigma}_j^{1/2}$，其中 $\underset{\sim}{M}_j$，$\underset{\sim}{\Sigma}_j$，为常数阵，

$j=1,\ \cdots,\ p$，则 $\underset{\sim}{Y}=\begin{pmatrix}\underset{\sim}{Y}_1\\ \vdots\\ \underset{\sim}{Y}_q\end{pmatrix}$的密度函数为

$$\prod_{j=1}^{q}|\underset{\sim}{\Sigma}_j|^{-n_j/2}f(\lambda(\sum_{j=1}^{q}(\underset{\sim}{\Sigma}_j^{-1/2}(\underset{\sim}{Y}_j-\underset{\sim}{M}_j)'(\underset{\sim}{Y}_j-\underset{\sim}{M}_j)\underset{\sim}{\Sigma}_j^{-1/2})))$$

其中 $n=n_1+\cdots+n_q$。 (2.6)

为此，我们先证明如下的引理

引理 2.2　设 $f(\cdot)$ 满足条件（2.2），（2.3），则函数 $h(\underset{\sim}{\Sigma}_1,\cdots,\underset{\sim}{\Sigma}_q)=\prod_{j=1}^{q}|\underset{\sim}{\Sigma}_j|^{n_j/2}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}_1+\cdots+\underset{\sim}{\Sigma}_q))$ 在 $\underset{\sim}{\Sigma}_j=\frac{n_j}{n}\lambda^*\underset{\sim}{I}_p$ 处达到极大值，$(j=1,\cdots,q$，$n=n_1+\cdots+n_q)$

证明：令 $\underset{\sim}{R}_j=\underset{\sim}{\Sigma}_q^{-1/2}\underset{\sim}{\Sigma}_j\underset{\sim}{\Sigma}_q^{-1/2}$，$j=1,\ \cdots,\ q-1$，$\underset{\sim}{I}_p+\sum_{j=1}^{q-1}\underset{\sim}{R}_j\triangleq\underset{\sim}{W}$

则 $h(\underset{\sim}{\Sigma}_1,\ \cdots,\ \underset{\sim}{\Sigma}_q)=\prod_{j=1}^{q-1}|\underset{\sim}{R}_j|^{n_j/2}\cdot|\underset{\sim}{\Sigma}_q|^{n/2}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}_q\underset{\sim}{W}))$

它的极大值在 $\underset{\sim}{\Sigma}_q=\lambda^*\underset{\sim}{W}^{-1}$ 处达到，因此，我们有 $\max\limits_{\underset{\sim}{\Sigma}_j>0,j=1,\cdots,q}h(\underset{\sim}{\Sigma}_1,\cdots,\underset{\sim}{\Sigma}_q)$

$$=\max_{\underset{\sim}{R}_j>0,j=1,\cdots,q-1}(\lambda^*)^{np/2}f(\lambda^*\underset{\sim}{I}_p)\cdot|\underset{\sim}{W}|^{-n/2}\cdot\prod_{j=1}^{q-1}|\underset{\sim}{R}_j|^{n_j/2}$$

对于函数 $\prod_{j=1}^{q-1}|\underset{\sim}{R}_j|^{n_j/2}/|\underset{\sim}{W}|^{n/2}$，它的极大值在 $\underset{\sim}{R}_j=(n_j/n)\underset{\sim}{W}$ $(j=1,\cdots,q-1)$ 处达到，即 $\underset{\sim}{\Sigma}_j=\underset{\sim}{\Sigma}_q^{1/2}\underset{\sim}{R}_j\underset{\sim}{\Sigma}_q^{1/2}=\lambda^*\underset{\sim}{W}^{-1/2}(n_j/n)\underset{\sim}{W}\cdot\underset{\sim}{W}^{-1/2}=(n_j/n)\lambda^*\underset{\sim}{I}_p$ 处达到。故证得我们的结论。

例2.3　设 $\underset{\sim}{Y}$ 的密度函数为（2.6），其中 $f(\cdot)$满足条件（2.2），（2.3）且 $\underset{\sim}{M}_j=\underset{\sim}{\mathbb{I}}_{n_j}\otimes\underset{\sim}{u}^{(j)'}$，$j=1,\ \cdots,\ q$，原假设为

H_0: $\underset{\sim}{\Sigma}_1=\cdots=\underset{\sim}{\Sigma}_q \longleftrightarrow H_1$: $\underset{\sim}{\Sigma}_1$, $\cdots$, $\underset{\sim}{\Sigma}_q$中至少有两个不等。则假设检验的似然比统计量为

$$\tau_1=\prod_{i=1}^{q}\left[\left(|\underset{\sim}{W}_i|/|\sum_{j=1}^{q}\underset{\sim}{W}_j|\right)^{n_i/2}\left(\frac{n}{n_i}\right)^{pn_j/2}\right]$$

其中

$$\overline{\underset{\sim}{y}}^{(j)}=\frac{1}{n_j}\sum_{i=\overline{n_{j-1}}+1}^{\overline{n_j}}\underset{\sim}{y}_{(i)},$$

$$\underset{\sim}{W}_j=\sum_{i=\overline{n_{j-1}}+1}^{\overline{n_j}}(\underset{\sim}{y}_{(i)}-\overline{\underset{\sim}{y}}^{(j)})(\underset{\sim}{y}_{(i)}-\overline{\underset{\sim}{y}}^{(j)})'$$

$$n_0=0,\ \overline{n_j}=n_1+\cdots+n_j,\ j=1,\ \cdots,\ q,\ \underset{\sim}{Y}'=(\underset{\sim}{y}_{(1)},\cdots,\underset{\sim}{y}_{(n)})$$

且它与正态情形有相同的形式。

证明：因为似然函数为 $L(\underset{\sim}{Y};\underset{\sim}{M}_1\cdots,\ \underset{\sim}{M}_q,\ \underset{\sim}{\Sigma}_1\cdots,\ \underset{\sim}{\Sigma}_q)$

$$=\prod_{j=1}^{q}|\underset{\sim}{\Sigma}_j|^{-n_j/2}f(\lambda(\sum_{j=1}^{q}(\underset{\sim}{\Sigma}_j^{-1/2}(\underset{\sim}{Y}_j-\underset{\sim}{M}_j)'(\underset{\sim}{Y}_j-\underset{\sim}{M}_j)\underset{\sim}{\Sigma}_j^{-1/2})))$$

记

$$\overline{\underset{\sim}{y}}^{(j)}=\frac{1}{n_j}\sum_{i=\overline{n_{j-1}}+1}^{\overline{n_j}}\underset{\sim}{y}_{(i)},$$

$$\underset{\sim}{W}_j=\sum_{i=\overline{n_{j-1}}+1}^{\overline{n_j}}(\underset{\sim}{y}_{(i)}-\overline{\underset{\sim}{y}}^{(j)})(\underset{\sim}{y}_{(i)}-\overline{\underset{\sim}{y}}^{(j)})'$$

$$j=1,\ \cdots,\ q$$

因为$\underset{\sim}{M}_j=\underset{\sim}{\mathbb{I}}_{n_j}\otimes\underset{\sim}{u}^{(j)\prime}$，所以$\underset{\sim}{u}^{(j)}$的极大似然估计为$\overline{\underset{\sim}{y}}^{(j)}$，$j=1$，$\cdots$，$q$，因此，我们有

$$\sup_{\underset{\sim}{M}_1,\cdots,\underset{\sim}{M}_q,\underset{\sim}{\Sigma}_1=\cdots=\underset{\sim}{\Sigma}_q=\underset{\sim}{\Sigma}>0} L(\underset{\sim}{Y};\ \underset{\sim}{M}_1,\ \cdots,\ \underset{\sim}{M}_q,\ \underset{\sim}{\Sigma},\ \cdots,\ \underset{\sim}{\Sigma})$$

$$=\sup_{\underset{\sim}{\Sigma}>0}|\underset{\sim}{\Sigma}|^{-n/2}f(\lambda(\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\sum_{j=1}^{q}\underset{\sim}{W}_j)))$$

$$=|\sum_{j=1}^{q}\underset{\sim}{W}_j|^{-n/2}\cdot(\lambda^*)^{np/2}f(\lambda^*\underset{\sim}{I}_p)$$

根据引理 2.2，我们得到

$$\sup_{\underset{\sim}{M}_j,\underset{\sim}{\Sigma}_j>0,j=1,\cdots,q} L(\underset{\sim}{Y};\underset{\sim}{M}_1,\cdots,\underset{\sim}{M}_q,\underset{\sim}{\Sigma}_1,\cdots\underset{\sim}{\Sigma}_q)$$

$$=\sup_{\underset{\sim}{\Sigma}_j>0,j=1,\cdots,q}\prod_{j=1}^{q}|\underset{\sim}{\Sigma}_j|^{-n_j/2}f(\lambda(\sum_{j=1}^{q}(\underset{\sim}{\Sigma}_j^{-1/2}\underset{\sim}{W}_j\underset{\sim}{\Sigma}_j^{-1/2})))$$

$$=\prod_{j=1}^{q}|\underset{\sim}{W}_j|^{-n_j/2}\cdot\left(\frac{n}{n_j}\right)^{-n_jp/2}\cdot(\lambda^*)^{np/2}f(\lambda^*\underset{\sim}{I}_p)$$

故得似然比统计量为

$$\tau_1=\prod_{j=1}^{q}\left\{\left(|\underset{\sim}{W}_j|/|\sum_{i=1}^{q}\underset{\sim}{W}_i|\right)^{n_j/2}\left(\frac{n}{n_j}\right)^{pn_j/2}\right\}$$

例 2.4　设$\underset{\sim}{Y}$的密度函数为（2.6），且$\underset{\sim}{M}_j=\underset{\sim}{1}_{n_j}\otimes\underset{\sim}{u}^{(j)\prime}$，$j=1,\cdots,q$，$\underset{\sim}{\Sigma}_1=\cdots=\underset{\sim}{\Sigma}_q$，假设检验为：

H_0：$\underset{\sim}{u}^{(1)}=\cdots=\underset{\sim}{u}^{(q)}\longleftrightarrow H_1$：$\underset{\sim}{u}^{(1)},\cdots,\underset{\sim}{u}^{(q)}$中至少有两个不等。

则假设检验的似然比统计量为

$$\tau_2=|\underset{\sim}{W}|^{n/2}/|\underset{\sim}{W}_1+\cdots+\underset{\sim}{W}_q|^{n/2}$$

其中

$$\underset{\sim}{W}=\sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{y}_{(j)}-\overline{\underset{\sim}{y}})(\underset{\sim}{y}_{(j)}-\overline{\underset{\sim}{y}})',$$

$$\overline{\underset{\sim}{y}}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\underset{\sim}{y}_{(j)}$$

$\underset{\sim}{Y}'=(\underset{\sim}{y}_{(1)},\cdots,\underset{\sim}{y}_{(n)})$，$\underset{\sim}{W}_j(j=1,\cdots,q)$的意义与例2.3相同，且$\tau_2$的形式与正态情形完全一样。

§3　$\mathscr{F}_1^+(\underset{\sim}{M},\underset{\sim}{\Sigma},n\times p)$中参数的极大似然估计与似然比准则

根据分布族$\mathscr{F}_1(n\times p)$的定义，我们容易得到：如果随机阵$\underset{\sim}{X}\in\mathscr{F}_1(n\times p)$，则它具有性质：

（i）$\underset{\sim}{X}$的特征函数一定具有形式$\phi(\underset{\sim}{T}'\underset{\sim}{T})$。

其中$\underset{\sim}{T}$为$n\times p$阶矩阵。

（ii）$\underset{\sim}{X}$的密度函数如存在，则一定具有形式$f(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})$。

（iii）令$\underset{\sim}{Y}(n\times p)=\underset{\sim}{M}+\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{A}$，其中$\underset{\sim}{A}\in S_p$，$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}'=\underset{\sim}{\Sigma}$则$\underset{\sim}{Y}$的密度函数具有如下形式：

$$|\underset{\sim}{A}|^{-n}f(\underset{\sim}{A}^{-1\prime}(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})'(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})\underset{\sim}{A}^{-1})\tag{3.1}$$

在这一节，我们试图研究（3.1）中参数（$\underset{\sim}{M}$，$\underset{\sim}{\Sigma}$）（其中$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}'=\underset{\sim}{\Sigma}$）的极大似然估计及假设检验的似然比准则问题，在此我们对（3.1）中的$f(\cdot)$作如下假定：

（i）$f(\cdot)$ 单调不增性，

即：
$$\underset{\sim}{\Sigma}_1\geqslant\underset{\sim}{\Sigma}_2\geqslant 0\Rightarrow f(\underset{\sim}{\Sigma}_1)\leqslant f(\underset{\sim}{\Sigma}_2)$$

（ii）$f(\cdot)$ 连续性，

即：
$$\lim_{\underset{\sim}{\Sigma}\to\underset{\sim}{\Sigma}_0} f(\underset{\sim}{\Sigma})=f(\underset{\sim}{\Sigma}_0) \qquad (3.2)$$

引理 3.1　设$f(\cdot)$满足条件（3.1），则函数$|\underset{\sim}{\Sigma}|^{n/2}f(\underset{\sim}{\Sigma})$必在某正定阵$\underset{\sim}{\Sigma}_*$处达到极大值。

证明见〔4〕

为了便于下面讨论，我们对$f(\cdot)$再作如下假定：

$$\frac{\partial f(\underset{\sim}{\Sigma})}{\partial\underset{\sim}{\Sigma}}\text{存在，且}\left(\frac{\partial f(\underset{\sim}{\Sigma})}{\partial\sigma_{ij}}\right)_{\underset{\sim}{\Sigma}=\underset{\sim}{\wedge}}=0$$

$$\Sigma_{ij}\text{ 与}\frac{\partial f(\underset{\sim}{\Sigma})}{\partial\sigma_{ij}}\text{同号，}1\leqslant i<j\leqslant p \qquad (3.3)$$

其中　$\underset{\sim}{\Sigma}=(\sigma_{ij})_{p\times p}$，$\Sigma_{ij}$为$\sigma_{ij}$的代数余子式，$\underset{\sim}{\wedge}=diag$（$\sigma_{11}$，…，$\sigma_{pp}$）

根据条件（3.2）（i）及（3.3），我们可以证明下面的

引理 3.2：设$f(\cdot)$满足条件（3.2)(i）及（3.3)，则函数$|\underset{\sim}{\Sigma}|^{n/2}f(\underset{\sim}{\Sigma})$必在某对角阵$\underset{\sim}{\wedge}^*$处达到极大值，且$\underset{\sim}{\wedge}^*=diag(X_1,\ \cdots,\ X_p)$为方程

$$\frac{n}{2X_i}+\frac{1}{f(diag(X_1,\cdots,X_p))}\ \frac{\partial f(diag(X_1,\cdots,X_p))}{\partial X_i}=0,\ \underset{1\leqslant j\leqslant p}{X_j>0}$$

的解。

证明：根据引理 3.1 知，函数$|\underset{\sim}{\Sigma}|^{n/2}f(\underset{\sim}{\Sigma})$的极大值必在某正定阵$\underset{\sim}{\Sigma}_*$处达到，再根据条件（3.3），$\underset{\sim}{\Sigma}_*$一定满足下列方程：

$$\frac{n}{2}\frac{\Sigma_{jj}}{|\underset{\sim}{\Sigma}|}+\frac{1}{f(\underset{\sim}{\Sigma})}\frac{\partial f(\underset{\sim}{\Sigma})}{\partial\sigma_{jj}}=0,\ j=1,\ \cdots,\ p \qquad (*)_1$$

$$n\cdot\frac{\Sigma_{ij}}{|\underset{\sim}{\Sigma}|}+\frac{1}{f(\underset{\sim}{\Sigma})}\frac{\partial f(\underset{\sim}{\Sigma})}{\partial\sigma_{ij}}=0,\ 1\leqslant i<j\leqslant p \qquad (*)_2$$

由于 Σ_{ij} 与 $\dfrac{\partial f(\underset{\sim}{\Sigma})}{\partial\sigma_{ij}}$ 同号，根据 $(*)_2$ 可知 $\Sigma_{ij}=0$. 故可得 $\underset{\sim}{\Sigma}_*$ 为对角阵，记为 $\underset{\sim}{\wedge}^*$，再根据 $(*)_1$ 知，$\underset{\sim}{\wedge}^*$ 为方程

$$\frac{n}{2\sigma_{jj}}+\frac{1}{f(diag(\sigma_{11},\cdots,\sigma_{pp}))}\cdot\frac{\partial f(diag(\sigma_{11},\cdots,\sigma_{pp}))}{\partial\sigma_{jj}}=0,\quad \underset{j=1,\cdots,p}{\sigma_{jj}>0}$$

的解。

例 3.1　正态分布：$\underset{\sim}{X}(n\times p)\sim N(\underset{\sim}{O},\ \underset{\sim}{I}_n\otimes\underset{\sim}{\Sigma})$，即 $\underset{\sim}{X}$ 的密度函数为

$$f(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})=c\cdot etr\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)$$

其中　　$C=(2\pi)^{-np/2}|\underset{\sim}{\Sigma}|^{-n/2}$，$\underset{\sim}{\Sigma}=diag(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_p)\neq\underset{\sim}{I}_p$

则

（i）　　$\underset{\sim}{X}\in\mathscr{F}_1(n\times p)$，$\underset{\sim}{X}\notin\mathscr{F}_3(n\times p)$

（ii）　$|\underset{\sim}{A}|^{n/2}f(\underset{\sim}{A})$ 在对角阵 $\widetilde{\underset{\sim}{A}}=diag(\widetilde{a}_{11},\ \cdots,\ \widetilde{a}_{pp})$ 处达到极大值，其中 $\widetilde{a}_{jj}=n\lambda_j$，$j=1,\ \cdots,\ p$.

证明　（i）是显然的，我们只证（ii）。因为

$$f(\underset{\sim}{A})=C\cdot etr\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{A}\right)$$

所以

$$\frac{\partial f(\underset{\sim}{A})}{\partial a_{ij}}=0,\quad 1\leqslant i<j\leqslant p$$

因此，由引理 3.2 知　$|\underset{\sim}{A}|^{n/2}f(\underset{\sim}{A})$ 在某对角阵 $\widetilde{\underset{\sim}{A}}=diag(\widetilde{a}_{11},\ \cdots,\ \widetilde{a}_{pp})$ 处达到极大值，且 $\widetilde{a}_{jj}=n\lambda_j$，$j=1,\ \cdots,\ P$.

例 3.2　设 $\underset{\sim}{X}(n\times p)$ 的密度函数为：

$$C\cdot|\underset{\sim}{I}_p+\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}|^{-(n+p)/2}$$

其中 c 为正则化常数，$\underset{\sim}{\Sigma}=diag(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_p)\neq\underset{\sim}{I}_p$

则　（i）$\underset{\sim}{X}\in\mathscr{F}_1(n\times p)$，$\underset{\sim}{X}\notin\mathscr{F}_3(n\times p)$

（ii）$|\underset{\sim}{A}|^{n/2}f(\underset{\sim}{A})$ 在对角阵 $\widetilde{\underset{\sim}{A}}=diag\ (\widetilde{a}_{11},\ \cdots,\ \widetilde{a}_{pp})$ 处达到极大值，其中 $\widetilde{a}_{jj}=\dfrac{n}{p}\lambda_j$，$j=1,\ \cdots,\ p$.

证明 $f(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})$ 确实是一个密度函数，它可以看成是多元 T－分布(见例2.1)之线性变换的密度函数。对于（i）是显然的，我们仅证（ii），因为

$$|\underset{\sim}{A}|^{n/2}f(\underset{\sim}{A})=c\cdot|\underset{\sim}{A}|^{n/2}|\underset{\sim}{I}_p+\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{A}|^{-(n+p)/2}$$
$$=c\cdot|\underset{\sim}{\Sigma}|^{n/2}\cdot|\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{A}|^{n/2}|\underset{\sim}{I}_p+\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{A}|^{-(n+p)/2}$$

可以证明它的极大值在 $\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}\underset{\sim}{A}=\frac{n}{p}\underset{\sim}{I}_p$ 处达到，即 $\underset{\sim}{\tilde{A}}=\frac{n}{p}\underset{\sim}{\Sigma}$，它等价于 $\tilde{a}_{ij}=\frac{n}{p}\lambda_i$，$j=1$，…，$p$。

定理 3.1　设 $\underset{\sim}{Y}\in\mathscr{F}_1^+(\underset{\sim}{M},\ \underset{\sim}{\Sigma},\ n\times p)$，且有密度函数（3.1），其中 $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}'=\underset{\sim}{\Sigma}$，$f(\cdot)$ 满足条件（3.2）（i）及（3.3），令 $w_0=w_m\times w_c$，其中 w_m 为 $n\times p$ 阶阵的全体，w_c 表示由 $p\times p$ 阶正定阵组成之集合的一个子集，且它满足：如 $\underset{\sim}{\Sigma}\in w_c$，$\underset{\sim}{\wedge}$ 为正定对角阵 $\Rightarrow\underset{\sim}{\wedge}^{1/2}\underset{\sim}{\Sigma}\underset{\sim}{\wedge}^{1/2}\in w_c$。假如在正态情况下，$\underset{\sim}{M}$，$\underset{\sim}{\Sigma}$ 的极大似然估计 $\underset{\sim}{\tilde{M}}$，$\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}$ 唯一存在，且 $p(\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}>0)=1$，则对于 $f(\cdot)$，$\underset{\sim}{M}$ 和 $\underset{\sim}{\Sigma}$ 的极大似然估计也存在，且为 $\underset{\sim}{\hat{M}}=\underset{\sim}{\tilde{M}}$，$\underset{\sim}{\hat{\Sigma}}=n(\underset{\sim}{\wedge}^*)^{-1/2}\underset{\sim}{\tilde{\Sigma}}(\underset{\sim}{\wedge}^*)^{-1/2}$，似然函数的极大值为

$$|\underset{\sim}{\tilde{c}}|^{-n/2}|\underset{\sim}{\wedge}^*|^{n/2}f(\underset{\sim}{\wedge}^*) \tag{3.4}$$

其中

$$\underset{\sim}{\tilde{c}}=\min_{\underset{\sim}{M}\in w_m}(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})'(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M}) \tag{3.5}$$

$\underset{\sim}{\wedge}^*$ 由引理 3.2 决定。

证明　因为 $\underset{\sim}{X}(n\times p)\sim N(\underset{\sim}{0},\ \underset{\sim}{I}_n\otimes\underset{\sim}{I}_p)\in\mathscr{F}_1(n\times p)$，它的密度函数为

$$(2\pi)^{-np/2}etr\left(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right).$$

令 $\underset{\sim}{Y}(n\times p)=\underset{\sim}{M}+\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{A}$，其中 $\underset{\sim}{A}\in S_p$，$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}'=\underset{\sim}{\Sigma}$ 故可得 $\underset{\sim}{Y}$ 的密度函数为 $(2\pi)^{-np/2}$ 乘以

$$|\underset{\sim}{A}|^{-n}etr\left(-\frac{1}{2}A^{-1\prime}(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})'(\underset{\sim}{Y}-\underset{\sim}{M})\underset{\sim}{A}^{-1}\right)$$

假定（3.5）中的极小值在 $\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{\tilde{M}}$ 处达到，则函数 $|\underset{\sim}{A}|^{-n}etr\left(-\frac{1}{2}A^{-1\prime}\underset{\sim}{\tilde{c}}\underset{\sim}{A}^{-1}\right)$ 的极大值在 $\underset{\sim}{\tilde{A}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\underset{\sim}{C}_1^{-1}$ 处达到，其中 $\underset{\sim}{C}_1\underset{\sim}{C}_1'=\underset{\sim}{\tilde{c}}^{-1}$，$C_1\in\underset{\sim}{S}_p$

下面我们考虑似然函数

$$|A|^{-n}f(A^{-1\prime}(Y-M)^{\prime}(Y-M)A^{-1})$$

根据条件（3.2）（i）可知，它的极大值也在$M=\widetilde{M}$处达到，再根据引理3.2可知，函数$|A|^{-n}f(A^{-1\prime}\widetilde{C}A^{-1})$的极大值在$A^{-1\prime}\widetilde{C}A^{-1}=\wedge^{*}$处达到，解得$\hat{A}=(\wedge^{*})^{-1/2}C_{1}^{-1}=(\wedge^{*})^{-1/2}(\sqrt{n}\widetilde{A})=\sqrt{n}(\wedge^{*})^{-1/2}\widetilde{A}$，故$M$，$\Sigma=AA^{\prime}$的极大似然估计为$\hat{M}=\widetilde{M}$，$\hat{\Sigma}=\hat{A}\hat{A}^{\prime}=n(\wedge^{*})^{-1/2}\widetilde{\Sigma}(\wedge^{*})^{-1/2}$似然函数的极大值为(3.4)，其中$\wedge^{*}$由引理3.2决定。

特别当$\wedge^{*}=\alpha^{*}I_{p}$时，我们可以得到下面的推论3.1。即

推论3.1 设$Y\in\mathscr{F}_{1}^{+}(M,\ \Sigma,\ n\times p)$，且密度函数为$|\Sigma|^{-n/2}f(\Sigma^{-1/2}(Y-M)^{\prime}(Y-M)\Sigma^{-1/2})$，其中$f(\cdot)$满足条件（3.2）（i）及（3.3），且引理3.2中的极值点$\wedge^{*}=\alpha^{*}I_{p}$令$w_{o}=w_{m}\times w_{c}$，其中$w_{m}$为$n\times p$阶阵的全体，$w_{c}$表示由$p\times p$阶正定阵组成之集合的子集，且它满足：如$\Sigma\in w_{c}$，$k>0$为常数$\Rightarrow k\Sigma\in w_{c}$，假如在正态情况下，$M$和$\Sigma$的极大似然估计$\widetilde{M}$和$\widetilde{\Sigma}$唯一存在，则对于$f(\cdot)$，$M$，$\Sigma$的极大似然估计也存在，且为$M=\widetilde{M}$，$\Sigma=\frac{n}{\alpha^{*}}\widetilde{\Sigma}$，且似然函数的极大值为$|\widetilde{C}|^{-n/2}(\alpha^{*})^{np/2}f(\alpha^{*}I_{p})$，其中$\widetilde{C}$由（3.5）决定。

推论3.2 设条件同于定理3.1，原假设是$M\in w_{m}\subseteq\Omega_{m}$，当$f(\cdot)$为正态密度，且似然比准则唯一存在时，则准则必是

$$\{|\widetilde{C}_{\Omega}|/|\widetilde{C}_{w}|\}^{n/2}$$

（其中$\widetilde{C}_{\Omega}$和$\widetilde{C}_{w}$相对于w_{m}和Ω_{m}，分别被（3.5）定义）且它独立于$f(\cdot)$。

例3.2 设$Y\in\mathscr{F}_{1}^{+}(M,\ \Sigma,\ n\times p)$，且它的密度为

$|A|^{-n}f(A^{-1\prime}(Y-M)^{\prime}(Y-M)A^{-1})$，其中$M=\mathbb{I}_{n}\otimes u^{\prime}$，$f(\cdot)$满足条件(3.2)(i)及（3.3），假设检验为

$$H_{0}:\ u=0\longleftrightarrow H_{1}:\ u\neq 0$$