

建筑自振周期计算方法和 实测资料手册

王广军 樊水荣 选编

中国建筑科学研究院

建筑自振周期计算方法和 实测资料手册

王广军 樊水荣 选编

中国建筑科学研究院

内 容 简 介

本手册分为四编。第一编为自振周期的计算方法，主要介绍求解的基本方法和一些建筑的实用计算法。第二编列有实测试验方法和手段，并给出一些建筑的实测实例及分析；此外还列有数千个不同建筑的实测周期值。第三编为经验统计公式法，本编汇总了各种建筑类型的实测经验统计公式，并列有统计分析的一些实际例子。第四编为规范方法，分二个部分。第一部分主要列有工业与民用建筑抗震设计规范64版本、74版本（或78版本）、新修订版本中有关的规定及解说。第二部分介绍国外规范，包括日本、美国、苏联、罗马尼亚、南斯拉夫等国的有关规定和方法。

本手册可做为从事工业与民用建筑抗震设计的广大工程技术人员和大专院校师生及有关科研人员的参考资料。

前 言

众所周知,振动作为机械运动的特例就在于它具有在平衡位置作往复运动的特征,因此自振周期就成为表示这种运动的重要参数之一。某些研究表明,建筑自振周期值的大小除取决于结构的平面布置、质量分布、构件刚度、材料特征、施工质量外,还与建筑所处的地基状况,建筑的变形状态以及地震动强烈程度等因素相关。

由于目前建筑抗震设计规范所采用的地震力计算理论,主要是基于弹性地震反应谱理论的底部剪力法和与此相关的振型分解反应谱法,故在确定地震影响系数 α 值时,需事先给出自振周期才行。显然对于底部剪力法只要给出基本自振周期就可以了,但振型分解反应谱法尚需提供第二振型、第三振型或更高的振型。按照目前的一些做法,自振周期可以根据动力学方法进行计算确定,也可以通过对比建成的同类建筑的实测周期近似的确定。应该指出,按上述二种途径所给出的自振周期值与在地震作用下的周期都有一定的差异。

计算方法由于计算简图的考虑,弹性模量,质量取值等方面和实际情况有出入,或者是在计算中未考虑次要构件的刚度影响以及地基与结构相互作用的影响等,使其结果有相当的偏差。

实测方法中利用微幅振动时测得的结果与大振幅或强地震时的周期相比偏短,而用激振器激振等手段取得的周期值也与实际地震时的真实周期有相当大的差异。实际上周期值是一个变量,随着外力的增加,有较大变形时的周期与小变形时的周期有相当的出入,特别是当结构由弹性阶段进入弹塑性阶段后,结构的自振特性已不复适用。

由于上述二种途径的求解方法各有其优缺点,因此关于采用那一种方法更为好一些,众说不一。不难认为,之所以有不同的见解,源于目前人们对自振周期的认识尚不十分清楚所致。

为了给设计人员进行抗震设计时,提供一份查找求解自振周期的资料,我们曾广泛收集有关求解自振周期的专门研究报告以及某些专著中的有关部分,将其加以汇总。并按理论计算方法、实测方法、经验公式和规范方法的顺序,编排为四编。

第一编为计算方法。求得自振周期的计算方法很多,但它们大致可划分为二种类型:

(1) 精确法, (2) 近似法。建筑物系一个空间体系,特别是中高层建筑,其振动形式十分复杂,由于其构造各异,次要结构的影响也很大(如填充墙等),致使结构刚度,变形等很难精确计算,而且建筑物自振周期在不同变形条件下也不是一个常数,故其真实值很难精确求得,因此在实践中,多给出相对准确的近似值。为此本编中的第一章选用了资料[21]中所列计算周期的雷理法、李兹法、集中质量法,逐渐接近法、迭次代入法。第二章则给出多层砌体房屋、多层和高层钢筋混凝土房屋、底层框架砖房屋和多层内框架房屋、单层工业厂房、空旷房屋、烟囱、水塔、塔类建筑、高耸结构等一系列建筑的实用计算方法。

第二编为实测方法。近年来,由于测振仪器的改进和发展,对已建成的建筑物能比较容易地取得实测的自振周期数据。通常实测主要采用如下三种方法: (1) 共振法(或激振法); (2) 自由振动法(或张释法、初位移、初速度法); (3) 脉动法(或随机振动分析法)。

目 录

第一编 自振周期的计算方法

第一章 自振周期计算的基本方法	(1)
1.1节 雷理法 (能量法)	(1)
1.2节 李兹法	(4)
1.3节 集中质量法	(8)
1.4节 逐渐接近法	(11)
1.5节 迭次代入法	(25)
第二章 一些建筑自振周期的实用计算方法	(34)
2.1节 多层砌体房屋	(34)
2.1.1 多层砖石房屋	(34)
2.1.2 组合砖柱基本周期	(39)
2.2节 多层和高层钢筋混凝土房屋	(40)
2.2.1 多层框架房屋	(40)
2.2.2 多层框架基本周期的简化计算	(43)
2.2.3 多层框架的豪尔塞法	(60)
2.2.4 冶金建筑多层框架	(63)
2.2.5 变断面多层框架	(91)
2.2.6 框排架 (一)	(95)
2.2.7 框排架 (二)	(95)
2.2.8 多层工业厂房的肋形楼盖	(109)
2.2.9 框架——剪力墙结构 (一)	(111)
2.2.10 框架——剪力墙结构 (二)	(112)
2.2.11 框架——剪力墙结构 (三)	(114)
2.2.12 框架——剪力墙结构 (四)	(117)
2.2.13 板柱及板柱剪力墙结构	(119)
2.2.14 阶形建筑	(123)
2.2.15 高层建筑竖向周期	(124)
2.3节 底层框架砖房	(129)
2.4节 单层工业厂房	(135)
2.4.1 排架	(135)
2.4.2 单层厂房纵向	(138)
2.4.3 锯齿排架	(140)

2.5节 空旷房屋.....(149)

2.5.1 单层空旷房屋观众厅.....(149)

2.5.2 多层空旷房屋.....(151)

2.6节 烟囱.....(155)

2.6.1 彭克中法.....(155)

2.6.2 钱培风公式.....(159)

2.6.3 美国豪斯纳(Housner)法.....(164)

2.6.4 烟囱竖向周期.....(164)

2.7节 水塔.....(165)

2.8节 塔类建筑.....(166)

2.8.1 化工及石油系统中塔类设备.....(166)

2.8.2 塔类建筑的资料[30]方法.....(171)

2.8.3 塔类建筑的资料[32]方法.....(181)

2.8.4 构架式塔.....(185)

2.8.5 四边形钢塔.....(193)

2.9节 高耸结构.....(195)

2.10节 高炉、锅炉等.....(205)

2.10.1 高炉.....(205)

2.10.2 锅炉构架.....(206)

2.10.3 园筒型立管式工业炉.....(208)

2.10.4 半悬吊锅炉支承构架.....(209)

2.11节 悬吊结构.....(211)

2.12节 贮槽、贮仓.....(215)

2.12.1 贮槽.....(215)

2.12.2 贮仓.....(216)

2.13节 通廊.....(218)

2.14节 拉线结构.....(221)

2.15节 铁路桥墩.....(223)

2.16节 石油化工球罐.....(228)

2.17节 钢制储液罐.....(233)

第二编 自振周期的实测方法

第一章 原型结构动力试验.....(238)

1.1节 概述.....(238)

1.2节 试验方法与激振器.....(239)

1.3节 测振仪器与分析仪器.....(263)

第二章 建筑物动力特性的实测实例及分析.....(292)

2.1节 多层砌体房屋.....(292)

2.1.1 多层砖房.....(292)

2.1.2	带钢筋混凝土构造柱多层 砖 房	(298)
2.1.3	混凝土空心小型砌块 房屋	(303)
2.2节	多层和高层钢筋混凝土 房屋	(307)
2.2.1	多层框架 房屋	(307)
2.2.2	现浇壁 板 结 构	(310)
2.2.3	框架轻板 结 构	(316)
2.2.4	整体予应力板柱 结 构	(334)
2.2.5	装配式大板居住 建筑	(336)
2.2.6	带剪力墙的整体予应力板柱 结 构	(339)
2.2.7	北京花市百货 商场	(341)
2.2.8	上海高层 民用建筑	(344)
2.2.9	日本京王广场 饭店	(350)
2.2.10	秦电二期工程主厂房	(352)
2.3节	单层工业 厂 房	(362)
2.3.1	单层 厂 房	(362)
2.3.2	冶金企业单层 厂 房	(367)
2.4节	古 建 筑	(377)
2.5节	拱 坝	(379)
2.6节	一些建筑的实测周 期 值	(381)
2.6.1	多层 砖 房	(381)
2.6.2	混凝土小型砌块 房屋	(387)
2.6.3	钢筋混凝土 框 架房屋	(387)
2.6.4	露天框架 结 构	(392)
2.6.5	钢筋混凝土现浇壁板 结 构	(393)
2.6.6	钢筋混凝土框剪 结 构	(394)
2.6.7	钢筋混凝土剪力墙 结 构	(395)
2.6.8	钢结构高层 建 筑	(395)
2.6.9	内框架 砖 房	(396)
2.6.10	单层厂房	(397)
2.6.11	冶金单层厂房	(401)
2.6.12	框排架组合厂房	(407)
2.6.13	单层空旷房屋	(408)
2.6.14	土结构房屋	(408)
2.6.15	多层石结构房屋	(409)
2.6.16	古建筑房屋	(409)
2.6.17	钢筋混凝土烟囱	(410)
2.6.18	砖烟囱	(417)
2.6.19	砖砌筒壁水塔	(418)
2.6.20	钢筋混凝土无线电讯塔	(418)

2.6.21	化肥厂主要建(构)筑物	(418)
2.6.22	箱形井塔	(424)
2.6.23	框架型井塔	(425)
2.6.24	斜撑式钢井架	(425)
2.6.25	高炉	(426)
2.6.26	构架式塔	(427)
2.6.27	锅炉构架	(429)
2.6.28	皮带通廊	(431)
2.6.29	高桩码头	(431)
2.6.30	重力坝	(432)
2.6.31	桥墩	(432)

第三编 自振周期的经验公式法

第一章	多层砌体房屋	(436)
1.1节	经验公式	(436)
1.2节	混凝土空心小型砌块的统计分析	(438)
1.3节	小型砌块多层房屋的统计分析	(439)
第二章	多层及高层钢筋混凝土房屋	(442)
2.1节	经验公式	(442)
2.2节	多层房屋的统计分析	(448)
2.3节	多层框架房屋的统计分析	(453)
2.4节	钢筋混凝土框架厂房的统计分析	(456)
2.5节	钢筋混凝土煤炭框架厂房的统计分析	(464)
2.6节	高层钢筋混凝土建筑的统计分析	(469)
2.7节	周期计算中有关结构刚度的问题	(470)
2.8节	对框架房屋自振特性的认识和估算	(482)
第三章	单层工业厂房	(495)
3.1节	经验公式	(495)
3.2节	单层工业厂房的统计分析	(497)
3.3节	单层钢筋混凝土厂房和统计分析	(511)
3.4节	单层厂房纵向的统计分析	(517)
第四章	古建筑、石房屋	(522)
4.1节	经验公式	(522)
4.2节	古建筑的统计分析	(522)
4.3节	石结构房屋的统计分析	(525)
第五章	烟囱	(529)
5.1节	经验公式	(529)
5.2节	烟囱的统计分析	(532)
5.3节	钢筋混凝土高烟囱实测的统计分析	(534)

第六章 其它建筑	(551)
6.1节 经验公式.....	(551)
6.2节 多绳提升井塔的统计分析.....	(554)
6.3节 斜撑式钢井架的统计分析.....	(559)
6.4节 化工及石油系统中塔类设备的统计分析.....	(571)
6.5节 圆筒型立管式工业炉的统计分析.....	(577)

第四编 自振周期的规范方法

第一章 国内的抗震规范	(581)
1.1节 地震区建筑设计规范(草案稿).....	(581)
1.2节 工业与民用建筑抗震设计规范(TJ11—78).....	(582)
1.3节 建筑抗震设计规范(TJ11—78修订稿).....	(586)
第二章 国外的抗震规范	(591)
2.1节 日本规范.....	(591)
2.2节 美国规范.....	(594)
2.3节 苏联规范.....	(596)
2.4节 罗马尼亚工业与民用建筑抗震设计规范.....	(597)
2.5节 南斯拉夫地震区建设技术规范.....	(598)
2.6节 印度结构抗震设计规范.....	(599)
2.7节 希腊抗震规范.....	(601)
2.8节 秘鲁抗震设计规范.....	(601)
2.9节 新西兰抗震设计规范.....	(602)
2.10节 西德地震区建筑设计规范.....	(602)

第一编 自振周期的计算方法

第一章 自振周期计算的基本方法^[21]

1.1节 雷理法（能量法）

当体系作自由振动时，若不计阻尼作用，则无论在任何时刻，位能与动能之和，根据能量守恒定理，都将保持为一个常数。如果把体系在静力平衡位置时的位能作为零，则此时体系的动能应为最大，而且等于体系振动的全部能量，我们记为 $U_{\max}$ 。当体系达到极限位置时，质量的速度为零，因而动能也为零，所以全部能量均变为位能，我们记为 $W_{\max}$ 。由能量守恒定理可得：

$$W_{\max} = U_{\max} \quad (1.1.1)$$

我们知道，分布质量的体系作自由振动时 x 截面在任一时刻 t 的横向位移 $y(x, t)$ 为：

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_x \sin(\omega t + \varphi) \\ \dot{y}(x, t) &= \omega y_x \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

由此得体系振动时的动能为：

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L \bar{m}_x \dot{y}^2(x, t) dx \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \int_0^L \bar{m}_x y_x^2 dx \\ U_{\max} &= \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^L \bar{m}_x y_x^2 dx = \omega^2 \widetilde{U} \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

式中， $\widetilde{U}$ 表示 $\omega = 1$ 时的最大动能，即

$$\widetilde{U} = \frac{1}{2} \int_0^L \bar{m}_x y_x^2 dx \quad (1.1.3)$$

体系的位能应等于体系的应变能，由此得弯曲梁的位能（令体系在平衡位置时的位能为零）：

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_0^L E J_x \left[\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \sin^2(\omega t + \varphi) \int_0^L E J_x \left(\frac{d^2 y_x}{dx^2} \right)^2 dx \\ W_{\max} &= \frac{1}{2} \int_0^L E J_x \left(\frac{d^2 y_x}{dx^2} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

将 (1.1.2) 及 (1.1.4) 式代入 (1.1.1) 式可得：

$$\omega^2 = \frac{W_{\max}}{\widetilde{U}} = \frac{\int_0^L E J_x \left(\frac{d^2 y_x}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \bar{m}_x y_x^2 dx} \quad (1.1.5)$$

如果体系除了分布质量 $\bar{m}_x$ 外, 还有集中质量 $m_i (i=1, 2 \cdots n)$, 则 $U_{\max}$ 为:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \left[\int_0^L \bar{m}_x y_x^2 dx + \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 \right]$$

所以 (1.1.5) 式又将变为:

$$\omega^2 = \frac{E \int_0^L x \left(\frac{d^2 y_x}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \bar{m}_x y_x^2 dx + \sum_{i=1}^n m_i y_i^2} \quad (1.1.6)$$

对于多自由度的体系, 则位能 $W_{\max}$ 为:

$$W_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1, k=1}^n k_{ik} y_i y_k$$

故 (1.1.6) 式又变为:

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i=1, k=1}^n k_{ik} y_i y_k}{\sum_i m_i y_i^2} \quad (1.1.7)$$

式中, k_{ik} 为弹性系数。

由公式可见: 要求体系的某一自振频率, 只要知道对应的振动形式 y_x , 就可以很方便地求出, 问题在于振型 y_x 事前是不知道的。但是, 对于第一频率, 根据一些实际计算的例子说明: 只要假定的振型曲线满足体系的几何约束条件, 并大致符合基本振动形式, 代入以上各式算得的自振频率, 误差就不会很大。雷理建议的下述办法本来是十分粗糙的, 但也常能获得满意的结果, 所以为大家所乐用。兹叙述如下:

体系的位能, 也可以用作用于体系上的外力所做的功来代替。本来上式中的 y_x , 系表示体系的振动形式。当体系作自由振动时, 它的荷重就是对应振型的惯性力, 因此必须要知道体系的振型才行。但是为了求第一频率, 雷理建议用作用于结构上的荷重 $\bar{m}_x g$ 在振动方向的静力作用下产生的弹性曲线当作第一振型 y_x , 这样原荷重就相当于惯性力。所以它所作的功可表示为:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \bar{m}_x g y_x dx$$

将上式的 W 代替 (1.1.5) 中的最大位能 $W_{\max}$, 得

$$\omega^2 = \frac{g \int_0^L \bar{m}_x y_x dx}{\int_0^L \bar{m}_x y_x^2 dx} \quad (1.1.8)$$

对于体系上既有均布质量又有集中质量的情形, 得

$$\omega^2 = \frac{W_{\max}}{\widetilde{U}} = \frac{g \left[\int_0^L \bar{m}_x y_x dx + \sum_{i=1}^n m_i y_i \right]}{\int_0^L \bar{m}_x y_x^2 dx + \sum_{i=1}^n m_i y_i^2} \quad (1.1.9)$$

例一: 试用能量法求等截面悬臂梁的第一频率。

解: 假设等截面悬梁臂的最低振型为在自由端沿振动方向作用一个单位集中力时的弹性

线曲。以固定端作为 x 坐标的起点, 于是, 任意点 x 的横向位移 y_x 可表示为:

$$y_x = \frac{1}{EJ} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EJ} (L - x)$$

由 (1.1.5) 式得:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{EJ \int_0^L \left[\frac{1}{EJ} (L - x) \right]^2 dx}{\bar{m} \int_0^L \left[\frac{1}{EJ} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \right]^2 dx} \\ &= \frac{EJ \int_0^L (L^2 - 2Lx + x^2) dx}{\bar{m} \int_0^L \left(\frac{L^2 x^4}{4} - \frac{Lx^5}{6} + \frac{x^6}{36} \right) dx} \\ &= \frac{2220 EJ}{178 \bar{m} L^4} = 12.47 \frac{EJ}{\bar{m} L^4} \\ \therefore \omega &= \frac{3.53}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\bar{m}}} \end{aligned}$$

与精确值 $\left(\omega = \frac{3.52}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\bar{m}}} \right)$ 相比, 误差还不到 0.5%。

对于这个例子, 如果我们令最低振型的曲线为: 在均布荷重 (强度为 $\bar{m}g$) 沿振动方向作用下所引起的弹性曲线, 则

$$y_x = \frac{\bar{m}g}{2EJ} \left(\frac{L^2 x^2}{2} - \frac{Lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right)$$

$$\frac{d^2 y_x}{dx^2} = \frac{\bar{m}g}{2EJ} (L^2 - 2Lx + x^2)$$

如运用 (1.1.5) 式, 则得

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{EJ \int_0^L \left[\frac{\bar{m}g}{2EJ} (L^2 - 2Lx + x^2) \right]^2 dx}{\bar{m} \int_0^L \left[\frac{\bar{m}g}{2EJ} \left(\frac{L^2 x^2}{2} - \frac{Lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) \right]^2 dx} \\ &= \frac{EJ}{\bar{m}} \times \frac{\frac{L^5}{5}}{\frac{104L^9}{6480}} = \frac{12.64 EJ}{\bar{m} L^4} \\ \therefore \omega &= \frac{3.55}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\bar{m}}} \quad (\text{误差为 } 0.7\%) \end{aligned}$$

例二: 试用本节方法求均布荷重 (包括自身重量) 强度为 $q = \bar{m}g$ 的简支梁的第一频率。

解: 用梁承受均布荷重 $q = \bar{m}g$ 产生的弹性曲线作为第一振型曲线, 则

$$y_x = \frac{\bar{m}g}{24 EJ} (L^2 x - 2Lx^3 + x^4)$$

$$\frac{d^2 y_x}{dx^2} = \frac{\bar{m}g}{2EJ} (x^2 - Lx)$$

根据公式 (1.1.5) 得:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{EJ \int_0^L \left[\frac{\bar{m}g}{2EJ} (x^2 - Lx) \right]^2 dx}{\bar{m} \int_0^L \left[\frac{\bar{m}g}{24EJ} (L^3x - 2Lx^3 + x^4) \right]^2 dx} \\ &= \frac{EJ \frac{L^5}{30}}{\frac{31}{12^2 \times 630} \bar{m} L^9} = \frac{3024 EJ}{31 \bar{m} L^4} \\ \therefore \omega &= \frac{9.87}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\bar{m}}}\end{aligned}$$

这个结果与用精确法算得之值非常接近。

应用能量法求刚架的第一频率，也是很方便的。例如求图 1.1.1 所示刚架（两柱相同）有侧移的第一频率，首先仍旧是选取适当的振型曲线。以在 b 点作用一水平力 P 引起的变形作为振型曲线，计算结果就相当可靠。如果用 Δ 表示顶端在上述 P 力作用下的位移，则按剪力影响公式或其它静力学方法，均可求得柱子及横梁的弹性曲线，依次为：

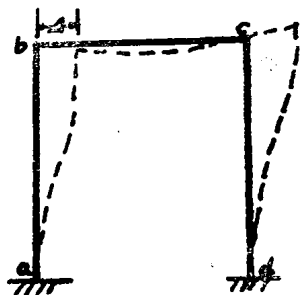


图 1.1.1

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{3 \left(1 + \frac{J_2 L_1}{J_1 L_2} \right) L_1 x_2 - \left(1 + 6 \frac{J_2 L_1}{J_1 L_2} \right) x^3}{\left(2 + 3 \frac{J_2 L_1}{J_1 L_2} \right) L_1^3} \Delta \\ y_2 &= \frac{3 (L_2^2 x - 3 L_2 x^2 + 2 x^3)}{L_1 L_2^2 \left(2 + 3 \frac{J_2 L_1}{J_1 L_2} \right)} \Delta\end{aligned}$$

刚架的位能为：

$$W_{\max} = \frac{1}{2} P \Delta$$

动能为：

$$\widetilde{U}_{\max} = \left[\bar{m}_1 \int_0^L y_1^2 dx + \frac{\bar{m}^2}{2} \int_0^L y_2^2 dx + \frac{1}{2} \bar{m}_2 L_2 \Delta^2 \right]$$

代入 (1.1.1) 式并进行积分后，即可求得自振频率 ω 之值。计算的结果表明：用这个方法算得的误差不大，完全能够满足工程上的要求。

1.2 节 李 兹 法

由前节所举的例子可以看出：用能量法求体系的第一频率，一般说来，精确度已能满足要求。如果由于各种原因对计算频率要求较高的精确度（或求较高的频率），前节方法不便使用，有时也采用下述的李兹法。

因为真正的振动形式，是事前不知道的，我们假定的曲线，不可能完全与之符合，这就等于对体系加入了一些控制，增加了它的刚度。结果当然就使得算出的第一频率偏大，关于这一点，我们还可以证明如下：

设 y_x 为假定的振型曲线，将它按振型分解：

$$y_x = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + a_3 y_3(x) + \dots \quad (1.1.10)$$

$$\therefore \quad \widetilde{U} = \frac{1}{2} \int_0^L \bar{m}_x [a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \cdots]^2 dx$$

若上面的 $y_1(x)$ 、 $y_2(x)$ …取为归一化振型，即 $\int_0^L \bar{m}_x y_j^2(x) dx = 1$ ($j = 1, 2, \dots$)，并注意各振型的正交关系，可得

$$\widetilde{U} = \frac{1}{2} \sum_j a_j^2 \quad (1.1.11)$$

$$a_j = \int_0^L \bar{m}_x y_j(x) y_x dx \quad (1.1.12)$$

质量 $\bar{m}_x dx$ 的惯性力 dI_x 为：

$$dI_x = \bar{m}_x [a_1 \omega_1^2 y_1(x) + a_2 \omega_2^2 y_2(x) + a_3 \omega_3^2 y_3(x) + \cdots] dx$$

所以体系的位能又可表为：

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L dI_x y_x = \frac{1}{2} \sum_j a_j^2 \omega_j^2$$

代入 (1.1.5) 式得：

$$\omega^2 = \frac{a_1^2 \omega_1^2 + a_2^2 \omega_2^2 + a_3^2 \omega_3^2 + \cdots}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots} \quad (1.1.13)$$

$$\therefore \quad \omega_1^2 < \omega^2 < \omega_3^2 < \cdots$$

$$\therefore \quad \omega^2 > \omega_1^2 \quad \text{即} \quad \omega > \omega_1$$

对于集中质量体系，只要将积分改为求和就行了，所得结果完全一样。

上式表示假定振型算得的频率 ω 恒较第一频率 ω_1 为高。

由 (1.1.13) 式可见：要想求某一第 j 频率，应该使假设的 y_x 尽量接近于第 j 振型，使 $a_j \gg a_i$ ($i \neq j$)。对于第一振型常能作出较好的假定，故效果较好。例如上节例 2 的简支梁，其归一化振型函数为 $y_j(x) = \sqrt{2/\bar{m}L} \sin \frac{j\pi x}{L}$ ，将均布荷重 $\bar{m}g$ 引起的弹性曲线按归一化振型分解，第 j 振型前的系数 a_j 为：

$$\begin{aligned} a_j &= \sqrt{\frac{2}{\bar{m}L}} \frac{\bar{m}g}{24 EJ} \int_0^L \sin \frac{j\pi x}{L} (L^3 x - 2xL^3 + x^4) dx \\ &= \frac{1}{j^5} \times \frac{2\sqrt{2}g\sqrt{\bar{m}}}{\pi^5 EJ} L^{\frac{9}{2}} \quad (j = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned}$$

j 代 1, 3, 5, …，可得 $a_1 = 243a_3 = 3125a_5 \cdots$ ，故所求基频很精确。但一般对于较高的振型总是很难符合上述愿望的。由于 $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \cdots$ ，所以由 (1.1.13) 式还可以看出：如果求第一频率当假设的 y_x 与 $y_1(x)$ 相差颇大时，其误差更为严重。为了较具体地观察其中关系，下面举一个例子。

例一：设有一悬臂梁顶端与中点共有二质量 $m_1 g = 1$ 吨， $m_2 g = 2$ 吨，已知其刚度系数各为 $k_{11} = 10$ kg/cm， $k_{22} = 60$ kg/cm， $k_{12} = k_{21} = -20$ kg/cm，试求其第一、二自振频率及振型。

解：自由振动振幅的齐次方程为：

$$\begin{cases} (10 - \omega^2)A_1 - 20A_2 = 0 \\ -20A_1 + (60 - 2\omega^2)A_2 = 0 \end{cases}$$

令 A_1 及 A_2 的系数行列式等于零, 解得其第一、二频率的平方各为:

$$\omega_1^2 = 2.68 \quad \omega_2^2 = 37.3$$

其归一化振型为:

$$A_1(1):A_1(2) = 0.888:0.325,$$

$$A_2(1):A_2(2) = -0.462:0.627,$$

若设第一振型为: $A_1:A_2 = 5:1$; 代入 (1.1.12) 式可得:

$$a_1 = 1 \times 5 \times 0.888 + 2 \times 1 \times 0.325 = 5.09$$

$$a_2 = 1 \times 5(-0.462) + 2 \times 1 \times 0.627 = -1.06$$

$$\therefore \omega_1^2 = \frac{(5.09)^2 \times 2.68 + (-1.06)^2 \times 37.3}{(5.09)^2 + (-1.06)^2} = 4.08$$

(误差: 52%)

代入 (1.1.7) 式也可得到同样结果。

若设 $A_1:A_2 = 10:1$, 同样办法可求得: $\omega_1^2 = 6.48$ 。(误差: +142%)。

若设 $A_1:A_2 = 1:1$, 可求得: $\omega_1^2 = 10$ 。(误差: +273%)。

若设 $A_1:A_2 = 1:3$, 则 $\omega_1^2 = 22.7$ 。(误差: +747%)。

对于第二振型: 若设 $A_1:A_2 = -2:9$, 则 $\omega_2^2 = 34$ 。(误差: -8.9%)。

以上数值表明若假设的第一振型误差很大, 精确度就很成问题。下面将再讨论如何增加精确度及求高频率的办法。

由 (1.1.5) 式可得:

$$\int_0^L EJ_x \left(\frac{d^2 y_x}{dx^2} \right)^2 dx - \omega^2 \int_0^L \bar{m}_x y_x^2 dx = 0 \quad (1.1.14)$$

上面已经说过: 由于假定的振型曲线不能完全符合于真正的振型, 所以把它代入上式后, 不可能获得满足。因而等式左边的代数和不能为零, 若把它表示为 S , 得

$$S = \int_0^L EJ_x \left(\frac{d^2 y_x}{dx^2} \right)^2 dx - \omega^2 \int_0^L \bar{m}_x y_x^2 dx \quad (1.1.15)$$

李兹的办法是将假定的振型函数 y_x 表示为一组级数之和:

$$y_x = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + \cdots + a_j f_j(x) + \cdots \quad (1.1.16)$$

式中, $f_1(x)$, $f_2(x)$... 都是能满足几何约束条件的一些函数。将它代入 (1.1.15) 式后, 则 S 将成为参数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的函数, 即

$$\begin{aligned} S(a_1, a_2, \cdots) &= \int_0^L EJ_x [a_1 f_1'(x) + a_2 f_2'(x) + \cdots]^2 dx - \\ &\quad - \omega^2 \int_0^L \bar{m}_x [a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots]^2 dx \\ &= \sum_{j,i=1}^n a_j a_i \int_0^L EJ_x f_i'(x) f_j'(x) dx - \omega^2 \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \int_0^L \bar{m}_x f_i(x) f_j(x) dx \end{aligned}$$

令

$$A_{ij} = \int_0^L EJ_x f_i'(x) f_j'(x) dx \quad (1.1.17)$$

$$B_{ij} = \int_0^L \bar{m}_x f_i(x) f_j(x) dx \quad (1.1.18)$$

133

为了使 S 之值为最小, 令

可得如下的方程组:

令 $a_1, a_2 \cdots$ 的系数行列式等于零, 即得如下频率方程 (常称为李兹频率方程):

显然，在(1.1.16)式中选取多少项，就能按以上各式得到多少个 $a_1, a_2 \cdots$ 的齐次方程，所以它们的系数组成行列式的级数（即频率方程的级数），刚好与(1.1.16)式所取的项数相等。

如果体系上还有集中质量, 则 (1.1.14) 式的左边还应加上 $[-\omega^2 \sum_i m_i y_i^2]$ 的项, 于是容易推得 (1.1.18) 式的 B_{ij} 为:

例二：图 1.1.2 所示的变截面悬臂杆件，试用李兹法求其挠曲振动（振动方向在厚度方向）的第一频率。

解: 以自由端为 x 轴的零点, 这里令 $b=1$, $h=2d$, 则截面积及截面惯性矩应为:

图 1.1.2

为了满足两端的几何约束条件, 可令

假设在上式中只取两项, 由(1.1.17)式及(1.1.18)式求得 A_{12} 、 B_{12} 、 A_{11} 及 B_{11} 代入(1.1.20)式整理后可得:

$$\begin{aligned} \left(\frac{E}{\rho} \frac{d^2}{3L^3} - \frac{\omega^2}{30} \right) a_1 + \left(\frac{2E}{15\rho} \frac{d^2}{L^4} - \frac{\omega^2}{105} \right) a_2 &= 0 \\ \left(\frac{2E}{15\rho} \frac{d^2}{L^4} - \frac{\omega^2}{105} \right) a_1 + \left(\frac{2E}{15\rho} \frac{d^2}{L^4} - \frac{\omega^2}{280} \right) a_2 &= 0 \end{aligned}$$

故频率方程为：

$$\left(\frac{E}{\rho} \frac{d^2}{3L^4} - \frac{\omega^2}{30}\right) \left(\frac{2}{15} \frac{Ed^2}{\rho L^4} - \frac{\omega^2}{280}\right) - \left(\frac{2E}{15\rho} \frac{d^2}{L^4} - \frac{\omega^2}{105}\right)^2 = 0$$

式中， ρ 表示材料的密度。解上式得最小频率为：

$$\omega_{\min} = 5.319 \frac{d}{L^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}} \quad \left(\text{精确值为 } \omega_{\min} = 5.315 \frac{d}{L^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}\right)$$

假如要求第二频率，最好在假设振型的级数中取到第三项或更多一些项。余类推。

前已证明：用李兹法求得的基频，都将得到满意的结果。但对于高频，误差就可能大些。频率越高算出的误差越大。增加级数的项数，当然可以减小这种差异，但将增多计算工作，所以最好是在选择函数时，尽量使其接近欲求频率的振型。对于手算，求较高的频率及振型以 1.4 节及 1.5 节所介绍的方法较为实用。

1.3 节 集中质量法

无论任何结构物，即使它的上面存在很多集中质量，但它本身的质量总是分布的，所以都应属于无限自由度的体系。但是，为了计算的简便，对于那些集中质量远大于分布质量的情况，常将后者略弃。有些体系虽然没有集中质量或集中质量并不很大，也常常把分布的质量集中于一些点，这样体系便成为多自由度甚至单自由度体系了。这种处理方法，称为集中质量法。

将分布的质量集中于一些点，一般都是根据杆件的变化情况将它分为若干段，然后把每一段的质量，都集中于它的重心或两端。如果体系上原来已经有一些集中质量，而且这些集中质量比较大，一般都是将分布质量分别集中于这些集中质量之外。对于没有集中质量的情形，常常将杆件平均分为若干段后再加以集中，显然，分段越多，精确度越高。但自由度数也随之加多，计算起来，就比较麻烦。根据经验，对于常常碰到的分布质量的悬臂杆件，集中的质量数（即自由度数）总要比要计算的频率多一两个，计算结果才较为可靠。如果还要计算振型，集中质量数还要加多。对于烟囱的抗震计算，常常需要算到第三振型，一般我们都集中为十个自由度以上。如果只打算计算第一频率，为了使计算简便，有时只将质量集中于一点，而成为单自由度的体系（集中于支承处的质量不考虑）。但若仍按杠杆原理集中，有时就会引起很大的误差，因此不得不寻求补充办法。

补充办法之一是根据实算结果提出经验数字。对于有侧移的连续架，我们也曾根据所求第一频率相等的条件，提出将柱子质量集中于节点的集中系数（梁的质量系全部集中于节点）。这些都可供使用者参考。

补充办法之二是根据集中质量前和集中质量后动能相等的条件，来决定集中质量的大小。一般常称这一方法为换算质量法。现在我们先来看看杠杆原理集中质量引起的误差情况，再介绍换算质量法。

例一：试用集中质量法求均布质量悬臂梁的第一频率。

解：图 1.1.3 (a) 系将梁的全部质量平均集中于其两端，由于在支承端的质量不起作用，故成为单自由度的体系。

因
$$\delta = \frac{L^3}{3EJ}, \quad m = \frac{1}{2} \bar{m}L$$