萬 有 文 庫

第一集一千種

王雲五主編

幾何學
軌跡及作圖

柳原吉次著

崔朝慶譯

商務印書館發行

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者

王雲五

商務印書館發行

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

幾何學—軌跡及作圖

柳原吉次著　崔朝慶譯

發行人	王雲五 上海寶山路五〇一號
印刷所	商務印書館 上海寶山路
發行所	商務印書館 上海及各埠

LO[illegible] AN[illegible] GEOMET[illegible]STRU[illegible]
BY YANAGIBARA-YOSHIJI
TRANSLATED BY TSUI CHA[illegible]
PUBLISHED BY Y. W. WONG
THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1931

目　　次

幾何學—軌跡及作圖

第一章

關於軌跡之定論及基本軌跡

1. **點之軌跡之定義.** 在平面上或空間,有許多適合某條件(或祇一種條件,或集數種條件)之點,則此等之點所成之圖形,謂之適合此條件之點之軌跡.

2. **視察軌跡之方法.** 設於圖形 F 爲適合條件 a 之點之軌跡,先須依次所言之定義定之.

甲. 適合於 a 之點,盡合於 F (是謂**完備性**).

乙. F 之上之點,皆適合於 a (是謂**純粹性**).

完備性與純粹性,宜先確定. 凡適合於條件 a 之點,有無窮之多與否,亦易知者也. 例如圖形爲線或線之一部分,即知有許多適合於條件之點.

完備性不確，則圖形 F 之上之點外，尙有適合條件 a 之點不可知，別無適合條件 a 之點亦不可知．純粹性不確，則圖形 F 之上之點，皆適合條件 a 不可知，卽 F 之上之點有非從條件 a 而成者，亦不可知．解軌跡之問題，必須了解完備性純粹性之意味，軌跡問題之興味無窮，而每有目爲難解者，皆由不注意於此點故也．

3. 軌跡之問題有二類．

第一類． 如云適合如此條件之點之軌跡爲如此圖形，此已繪成軌跡之圖形者．

第二類． 如云適合如此條件之點之軌跡如何，此未繪成軌跡之圖形者也．

第一類之問題，從所示之圖形證明完備性純粹性，甚爲便利，第二類之問題，須根據所示之條件，研究軌跡爲如何之圖形，且須注意引入第一類，有時不得不由已知之定理，改變其問題，故第二類之問題，比第一類爲難．

4. 軌跡之證明．

如圖形 F 爲適合於條件 a 之點之軌跡，當證明 F 之完備性與純粹性．

(1) 能證明適合於 a 之點在 F 之上，則 F 爲完備，因 F 之外無適合於 a 之點故也．

注意． 今雖僅云適合於 a 之點，非指適合於 a 之點中之某點，乃謂凡適合於 a 之點，悉在之 F 上也．譬如云死者人之終，不專指一人而言，有包括古今中外之人之意，次之 (2)，(3)，(4) 皆同．

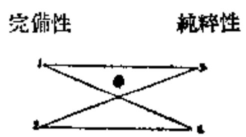
(2) 能證明不在 F 之上之點不適合於 α, 則 F 爲完備, 蓋能適合於條件之點, 不得不爲 F 之上之點故也.

(3) 能證明 F 之上之點適合於 α, 則 F 爲純粹.

(4) 能證明不適合於 α 之點不在 F 之上, 而 F 亦爲純粹, 蓋不適合於 α 之點, 無在 F 之上之事也.

因定爲完備性與純粹性, 各有二法, 卽證明適合於 α 之點之軌跡, 有四種方法, 用四法中之二法, 有四種配合如次.

(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)



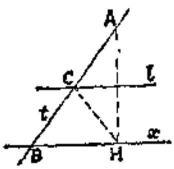
凡證明軌跡之問題, 宜於上之四種配合中, 用一種配合之二方法, 特作圖形以便於記憶. 若用 (1, 2) 或 (3, 4) 之二種方法, 無異於畫蛇添足, 屋上架屋也.

又同一問題, 用四種配合中之一種配合之二方法證明, 不易豫知用何一組之法爲便利, 通常對於第一類之問題, 多用 (3, 2), 第二類之問題, 多用 (1, 3), 此須視問題之情形而定, 從未有人規定以何方法爲正, 故著者對於軌跡之圖形, 常用 (1, 3) 之方法證明之. (宜參考次節)

5. 證明軌跡中之重要注意.

其例如次.

有 A 點與直線 x, 從 A 任意引直線 t, 與直線 x 相交於 B, 求直線 AB 之中點 C 之軌跡.



從 A 向 x 作垂線 AH, 成 AHB 直角三角形, 則 C 爲 AHB 直角三角形之斜邊 AB 之中點, 故 AC=CH, 由此知 C 在 AH 之直角二等分線 l 之上, l 雖確爲純粹性, 然有須注意者如次.

(1) l 之上任意取一點 C, 與 x 之上之一點 B, 連結爲一直線, 從 BC 之 C 端延長至 A′, 令 C 爲 A′B 之中點, 其 A′ 點不合於 A, 則 C 與條件不適合.

(2) l 之上任意取一點 C, 與 A 連接爲一直線, 從 AC 之 C 端延長, 與 x 交於 B, 其 C 必爲 AB 之中點, 則 C 與條件適合.

可見依某次序作圖, 不適合條件之點, 改依他次序作圖, 卽與條件適合, 遇此情形, 不能漫然斷定爲 (2) 爲正, (1) 爲不正.

定規約如次.

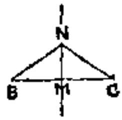
依某次序而進, 雖不適合於條件, 從他次序而進, 能適合於條件者, 則算入適合於此條件之中.

此規約非爲異常之人而設, 乃爲識力薄弱者而設者也. 若條件從許多條件而成, 確爲不適合於條件之事, 詳述依種種次序皆爲無效, 殊覺煩雜, 此在實用上, 亦無何等效力. 但改從某方法而能適合於條件, 不得不言用各種方法而同歸於失敗, 亦有僅述從某一種次序而進, 不適合於條件者, 此爲力求簡單之習慣法究嫌簡略.

6. 軌跡問題之例解.

例解 1. 問與二定點 B, C 成等距離之點之軌跡如何.

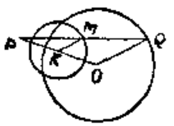
解. 設 N 爲適合條件之點, 先連 B, C 爲一直線, 又作 NB, NC 二直線, 成 BNC 二等邊三角形, N 爲二等邊三角形之頂點, 依幾何學定理, NM⊥BC, 則 M 爲底邊 BC 之中點, 故適合於條件之點, 在於 BC 之直角二等分線之上. 〔由此知不在 BC 之直角二等分線上之點, 與 BC 不能成等距離, 故此直角二等分線, 確爲完備性, 宜參觀第四節 (1) 之注意.〕



又解. 設 BC 之直角二等分線上之任意一點爲 N, 則 BM=CM, ∠BMN=∠CMN=∠R, MN 爲公共之一邊, ∴ △BMN=△CMN, BN=CN, 卽 BC 之直角二等分線, 確爲純粹性.

由上之二解, 知所求之軌跡, 爲 BC 之直角二等分線.

例解 2. 定圓 O 之外有定點 P, 任意於定圓 O 之周取 Q 點, 與定點 P 連結爲 PQ 直線, 問此直線之中點 M 之軌跡如何.



解. 先連結定點 P 至定圓之中心 O 爲 PO 直線, 以 PO 之中點 K 爲圓心, 以 KM 爲半徑, 畫圓, 依幾何學定理.

$KM=\frac{1}{2}OQ$, 故 M 在於 $\frac{1}{2}OQ$ 爲半徑之圓周之上 (圓 K 之完備性).

又解. 圓 K 之周上任意取 M 點, 連結 PM, 延長 M 端至 Q, 令 PM=MQ, 依幾何學定理, OQ=2KM, 故 Q 點在於圓 O 之周之上 (圓 K 之純粹性).

由上之二解, 知所求之軌跡爲圓 K 之周.

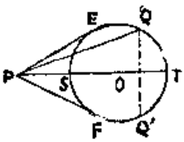
7. 探考軌跡之圖形之法.

適合於所設之條件之點, 探考其軌跡爲如何之圖形, 已示極簡單之例於前節之例解, 最宜注意者, 初等幾何學圖形中之線, 以直線與圓爲限, 故顯軌跡之線, 亦以直線與圓爲限. 但軌跡爲直線爲圓, 有易混淆者, 又有僅爲直線與圓之一部分者. 今於平面上之定點 Q, 與軌跡上之一點 P, 連結爲一直線, 若軌跡爲無限直線, 其 PQ 之長, 比任何長尤長, 若軌跡爲圓或爲有限直線, 其 PQ 之長, 决不能超過某一定之長之外. 由此探考軌跡, 往往有效. 卽 PQ 之長, 能比任何長尤長時, 其軌跡爲無限直線, 否則 PQ 之長, 不能大於一定之長, 但猶不易卽判定其軌跡爲有限直線或爲圓也. 雖軌跡爲有限直線 PQ 之長必有限, 而 PQ 之長有限, 軌跡爲圓, 亦未可知, 故已知軌跡爲有限直線與圓, 尙須加以硏究. 凡直線與圓易於牽混之問題甚少, 取適合於條件之三點或四點, 視各點是否在一直線, 卽能定軌跡爲直線或爲圓.

取定數點, 則有述於次之便利.

(1) 容易能定點之位置, 或在極端之位置.

(2) 圖形中之點, 隨直線運動之方向變其位置, 或隨圖形中某量〔如角之大直線之長及面積等〕之增加或減少變其位置, 可從適合某條件之點, 描出圖形而考之.



(3) 能利用對稱之性質.

今就前節例解 2 之軌跡, 詳細說明於次.

PO 及其延長線與圓之交點爲 S, T, 從 P 點作圓之切線 PE, PF.

(*a*) S, T 爲容易求之位置.

(b) S 爲 PQ 之長極小時 Q 之位置, T 爲 PQ 之長極大時 Q 之位置.

(c) 考 Q 點在圓周上環繞一轉, Q 點經過 S 點後, PQ 之長從減少而變爲增加, Q 點經過 T 點後, PQ 之長從加增而變爲減少.

(d) 考 Q 點在圓周上運動, Q 與 P 之距離, Q 漸近於 T 時, Q 與 P 之距離愈遠, Q 過 T 點後, 始漸近於 P, 又 Q 漸近於 S 時, Q 與 P 之距離愈近, Q 過 S 點後, 始漸遠於 P, 卽 S, T 爲 Q 對於 P 之運動變更方向之處也.

(e) Q 點漸近 E 點或 F 點, 則 $\angle OPQ$ 漸增加, 至合於 E 或合於 F 時, $\angle OPQ$ 最大, 至漸離 E, F, 則 $\angle OPQ$ 漸減少, 故 PE, PF 爲 $\angle OPQ$ 增加與減少之界限.

(f) Q 在圓周上環繞一轉, 卽 PQ 之 P 端爲中心, Q 端沿圓周而轉也, Q 在 E 與 F 之右側時, Q 沿圓周內運動, 在左側時, 沿圓周外運動, 故 E, F 爲 Q 出入圓周之門, 而 PE, PF 乃 PQ 變其運動之向之位置也.

(g) 對於 OP 取 Q 之對稱點 Q′, 若 PQ 之中點適合於條件, 則 PQ′ 之中點, 亦適合於條件, 有如此之情形, 當注意其軌跡乃以 OP 爲對稱之軸之圖形.

(h) PQ 之中點 M, 惟 Q 點在 S 及 T 時在 PT 之上, 此外決不在 PT 之上, 故軌跡或爲圓或不止一直線, 今 PT 爲 PQ 之極大值, 知軌跡上之點, 不能出乎 P 爲中心 $\frac{1}{2}$PT 爲半徑之圓之外.

命 PS, PT 之中點爲 B, C, 則 B, C 同爲軌跡上之點, PB 爲 PM 之最小値, PC 爲 PM 之最大値, 故軌跡爲圓, 其圓之直徑必爲 BC, 而 BC 等於 ST 之半, 故 BC 之中點, 卽 PO 之中點, 由此知軌跡爲圓, 乃以 PO 之中點爲中心圓 O 之半徑爲直徑之圓也.

注意 1. 屬於 (1), (2) 之點, 乃關於所設之圖形各占一定之明瞭位置者也, 屬於 (3) 之點, 有僅云適合於條件而其他之性質不的確者.

軌跡上之點, 占所設圖形中一定之明瞭位置者, 謂之軌跡之特殊點, 如前所述能求得軌跡上之若干點, 則軌跡爲圓或爲直線, 已大略可知, 更求得占一定之明瞭位置之特殊點, 則軌跡占所設圖形中之何位置, 可以推想而定, 此求出特殊點之利益也.

注意 2. M 爲軌跡上之特殊點, N 爲適合於條件之任意一點, MN 與一定之直線 l 直交, 或知 MN 與 l 成一定之角, 則 N 之軌跡, 可以想見爲通過 M 之一定之直線, MN 與 l 平行之情形, 能含於上之情形, 所不待言, MN 與 l 所成之定角, 可從零度至 180°, 讀者宜觀察第 6 節之例解 1.

注意 3. 軌跡爲有限直線或爲圓, 可以直線爲標準, 求得軌跡上之兩箇特殊點, 則適合於條件之任意一點, 與此兩箇特殊點, 是否在同一直線之上, 可以探知, 又軌跡爲圓, 通過軌跡上之任意一點及一特殊點之直線, 與一定直線之交點, 爲一定之點, 亦可探知.

8. 軌跡問題易起之誤會.

(1) 適合要件之點, 見在於某圖形之上, 即斷此圖形爲所求之軌跡, 每有誤以非軌跡之部分爲軌跡之一部分者 (須參觀次節之例解).

(2) 有僅見軌跡之一部分, 由此推想軌跡之全部而誤者.

此因未研究完備性與純粹性也. 昔有甲乙丙三盲人, 言象之形狀, 甲捫象之耳, 謂象如布片, 乙抱象之脚, 謂象如柱, 丙撫象之腹, 謂