民國叢書

第二編

·89·

科學技術史類

中算史論叢

李儼著

上海書店

中算史論叢

（一）

李儼著

序

年來研治中算史,其論文之發表於各雜誌者,計有十餘篇.意在廣徵海內明達之見,俾獲折衷之說.惟各文刻非一時,收集爲難.而初稿遺譌及印刷錯誤之處,又往往而有.茲特輯錄成册,以便就正當世.此册所收者,計有下列各篇:

中算家之 Pythagoras 定理研究(學藝雜誌第八卷第二號,十五年十月,第一至二七頁);重差術源流及其新註(學藝雜誌第七卷第八號,十五年四月,第一至一五頁);大衍求一術之過去與未來(學藝雜誌第七卷第二號,十四年九月,第一至四五頁);敦煌石室「算書」(中大季刊第一卷第二號,十五年六月,第一至四頁);明代算學書志(圖書館學季刊第一卷第四期,十五年十二月,第六六七至六八二頁);明清之際西算輸入中國年表(圖書館學季刊第二卷第一期,十六年十二月,第一至三四頁);對數之發明及其東來(科

學雜誌第十二卷第二號,第三號,第六號,十六年二月,三月,六月,第一〇九至一五八頁,第二八五至三二五頁,第六八九至七〇〇頁);中算輸入日本之經過(東方雜誌第二二卷第一八號,十四年九月,第八二至八八頁);梅文鼎年譜(清華學報第二卷第二期,十四年十二月,第六〇九至六三四頁).

中華民國十七年二月十日

李儼記於靈寶

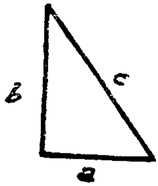
目次

中算家之Pythagoras定理研究

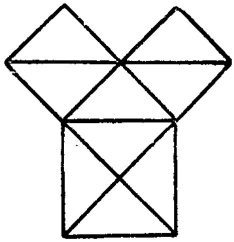
目　次

1. Pythagoras 定理本事

畢達哥拉斯 (Pythagoras) 定理者,句冪股冪合成弦冪,如圖句 $=a$, 股 $=b$, 弦 $=c$,則 $a^2+b^2=c^2$ 是也.德國數學史家 Mortitz Cantor 在所著 Vorlesungen über



Geschichte der Mathematik, Vol. I (三版),Leipzig, 1907, p. 108 謂埃及於公元二千年前已知正三角形句股弦之比爲$a:b:c=3:4:5$. Pythagoras (公元前580?－500?) 生於希臘薩摩斯 (Samos), 曾遊埃及, 其$a:b:c=3:4:5$之說或亦得諸埃及. 嘗立學校於南意大利之克洛吞(Croton),後爲政客所忌,逃亡而被殺於麥塔逢坦(Metapotum). Pythagoras 氏定理證法今已無傳, 或以爲如右圖以等邊三角爲計算.至幾何原本之證法,則出於歐幾里(Euclid).希臘以後證此定理實繁有人.其詳可觀 Joh. Jos. Jgn. Hoffmann, Der Pythagoräische Lehrsatz mit zwey und dreysig theils bekannten, theils neuen Beweisen. Mainz, 1819, 及 Jury Wipper, Sechsundvierzig Beweisen des Pythagoräischen Lehrsatzes. Aus dem Russischen von F. Graap, Leipzig, 1800.而收羅較富,則爲 F. Yanney 及 J. A. Calderhead 見於 Am. Math. Monthly, Vols. 3 及 4, 1896 及 1897 者.



北京高師數理雜誌第二卷第一至四號(1920—1921)

王邦珍君「Pythagoras定理之證明」一文,亦載有六十法,惜於吾國算家對此定理之研究,未嘗收錄.此篇之作,則介紹國中研究此定理之經過耳.

2. 周髀算經與Pythagoras定理

周髀算經約爲戰國前著作,其原因茲不具述.僅言其與 Pythagoras 定理之關係.按周髀本文:「商高曰,數之法出於圓方,圓出於方,方出於矩,矩出於九九八十一.故折矩以爲句廣三,股修四,徑隅五,既方其外半之一矩,環而共盤得成三,四,五.兩矩共長二十有五,是謂積矩,……」.此言 $a:b:c=3:4:5$ 也.又曰:「周髀長八尺,夏至之日晷一尺六寸,髀者股也,正晷者句也,……故以句爲首,以髀爲股,……若求邪至日者,以日下爲句,日高爲股,句股各自乘,并而開方除之,得邪至日,從髀所旁至日所十萬里」,此言 $c=\sqrt{a^2+b^2}$, 卽 $a^2+b^2=c^2$ 也.又曰:「法曰周髀長八尺,句之損益寸千里,……榮方曰,周髀者何?陳子曰,古時天子治周,此數望之從周,故曰周髀.」關於周髀二字之考據,大都以髀爲股.如廣韻卷三,紙第四,「髀股也,又步米切」,唐·房玄齡晉書卷十一,「髀股也,股者表也」,唐·長孫無忌隋書卷十九,亦言「髀股

也,股者表也」,說文段注,「股髀也,又曰髀骨猶言股骨」是也.日本飯島忠夫支那古代史論第七章(1925)因鄭玄注儀禮聘禮「宮必有碑,所以識日景引陰陽也」,謂碑與髀通.惟漢·劉熙釋名「釋典藝第二十」明言「碑,被也.此本王莽時所設也,施其轆轤,以繩被其上,以引棺也,……」,似此則飯島之說不能成立.至周之爲解則周髀本文明言「古時天子治周,此數望之從周,故曰周髀」,唐·房玄齡晉書,唐·長孫無忌隋書幷言「其本庖犧氏立周天曆度,其所傳則周公受於殷商,周人志之,故曰周髀」,宋·李籍周髀算經音義稱「周天曆度,本庖犧氏立法,其傳自周公受之於大夫商高,故曰周髀」,宋·陳振孫直齋書錄解題卷十二「曆象類」周髀算經二卷,音義一卷條下稱「周髀者蓋天之書也,稱周公受之商高,而以句股爲術,故曰周髀」,此一說也.亦有以周爲環,如唐·房玄齡晉書,及宋·李籍周髀算經音義幷言「……每衡周經里數,各依算術用句股重差,推晷影極游,以爲遠近之數,皆得於表股者也,故曰周髀.」清·陳杰算法大成上編(1844金望欣序)卷二「句股」稱「句股之法,始於周髀算經……周,環也,髀

股也,環其股以爲法,遂名爲句股云,〔句者曲也……〕」.此又一說也.

3. 九章算經與Pythagoras定理.

九章算經所述Pythagoras定理問題見卷九句股章.清·陳杰以爲句股出於周髀說見前節.漢·鄭玄釋周禮地官保氏九數云:「九數:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,句股」,此言漢時有重差,夕桀,句股各術,卽九章算經卷九句股章亦爲漢時所增也.魏·劉徽注九章於句股稱「短面曰句,長面曰股,相與結角曰弦,句短其股,股短其弦,將以施於諸率,故先具此術以見其源也.」,宋·李籍九章算術音義句股注稱「句短面也,股長面也,短長相推以求其弦,故曰句股」,九章本文句股「術曰,句股各自乘,并而開方除之,卽弦」, 卽 $c=\sqrt{a^2+b^2}$, 由此化得 $a=\sqrt{c^2-b^2}$, $b=\sqrt{c^2-a^2}$, $\frac{a^2}{c-b}=c+b$, $\frac{b^2}{c-a}=c+a$, 四式,其餘和較雜糅,則未及也.至句股弦相與之率,於 $3^2+4^2=5^2$ 外,并知 $5^2+12^2=13^2$, $7^2+24^2=25^2$, $8^2+15^2=17^2$, $20^2+21^2=29^2$ 焉.劉徽圖注,僅存其注,舊圖已佚.

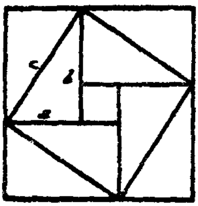
九章又言帶從開方,如第二十問爲 $x^2+(14+20)$

$x=2(1775\times 20)$是也.

4. 句股方圓圖注.

趙爽字君卿一曰名嬰,宋·李籍謂「不詳何代人」,宋·鮑澣之疑爲「魏,晉之間人」,清·阮元因「今本周髀算經題」云漢·趙君卿注,故系於漢代,日本·三上義夫因其周髀注有法出九章之語,知其習知九章算經之法.玆將其「句股方圓圖注」分左右兩列解釋如下.

「趙君卿曰,句股各自乘,併之爲弦實,開方除之,即弦也.」



(弦圖)

「案弦圖,又可以句股相乘爲朱實二,倍之爲朱實四,以句股之差自乘爲中黃實,加差實,亦成弦實.」

令$a=$句,$b=$股,$c=$弦,如題意

$a^2+b^2=c^2,\ c=\sqrt{a^2+b^2},\cdots(1)$

如弦圖,$2ab+(b-a)^2=c^2,\ \cdots\cdots(2)$

此與印度·巴斯卡剌,阿剢雅(Bhaskara Acarya)在一一五〇年所證明者相類.

「以差實減弦實,半其餘.以差為從法,開方除之,復得句矣,加差於句即股.」

「凡并句股之實,即成弦實,或矩於內,或方於外,形詭而量均,體殊而數齊」

「句實之矩,以股弦差為廣,股弦并為袤,而股實方其裏,減矩句之實於弦實,開其餘即股.倍股在兩邊為從法,開矩句之角,即股弦差,加股為弦.」

「以差除句實,得股弦并.以并除句實,亦得股弦差.」

從(2)得 $\dfrac{c^2-(b-a)^2}{2}=ab=A$ ···························(3)

令 $b-a=p,\quad a=x.$

則 $x^2+px-A=0$ ·········(4)

$x+p=b.$

$(c-b)(c+b)=c^2-b^2=a^2=B$ ·································(5)

$\sqrt{c^2-(c-b)(c+b)}=b,$

令 $2b=q,\quad a-b=y,$

則 $y^2+qy-B=0$ ·········(6)

$y+b=c$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^2}{c-b}=c+b\\[2ex]\dfrac{a^2}{c+b}=c-b\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(7)$$

「并并自乘,與句實爲實,倍并爲法,所得亦弦,句實減并自乘,如法爲股.」	$$\left.\begin{aligned}\frac{(c+b)^2+a^2}{2(c+b)}=c,\\\frac{(c+b)^2-a^2}{2(c+b)}=b,\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(8)$$
………………………………	
「兩差相乘,倍而開之,所得以股弦差增之爲句,以句弦差增之爲股,兩差增之爲弦.」	$\sqrt{2(c-a)(c-b)}=a+b-c\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$
「倍弦實,列句股差實見弦實者,以圖考之;黃實之多,卽句股差實,以差實減之,開其餘,得外大方.大方之面卽句股并也.令并自乘,倍弦實,減之,開其餘,得中黃方.黃方之面,卽句股差.」	$2c^2-(a+b)^2=(b-a)^2\cdots(10)$ $\sqrt{2c^2-(b-a)^2}=a+b=s\cdots\cdots\cdots(11)$ $\sqrt{2c^2-(a+b)^2}=b-a=t\cdots\cdots\cdots(12)$
「以差減并而半之爲句.加差於并,而半之爲股.」	$\frac{s-t}{2}=a\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$ $\frac{s+t}{2}=b\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$

「其倍弦爲廣袤合,而令句股見者自乘爲其實,四實以減之,開其餘,所得爲差.以差減合,半其餘爲廣.減廣於弦,卽所求也.」

因 $2c=y(=c-b)+y_1(=c+b)$ ……………………(15)

而 $yy_1=a^2$ …………… (16)

則 $\sqrt{4c^2-4a^2}=y_1-y$ …(17)

$$y=\frac{2c-\sqrt{4c^2-4a^2}}{2} \quad \cdots\cdots (18)$$

則 $b=c-y$.

5. 劉徽九章注.

魏·陳留王景元四年(263)注九章算術,於「句股術」注曰「句股冪合以成弦冪」,又曰,「句自乘爲朱方,股自乘爲青方,令出入相補,各從其類,因就其餘不移動也,合成弦方之冪,開方除之卽弦也.」,又曰,「…… 句長而股短,故術以木長謂之句,圍之謂之股,言之倒互,句與股求弦,亦如前圖;句三自乘爲朱冪,股四自乘爲青冪,合朱青二十五爲弦五自乘冪,出上,第一圖句股冪合爲弦冪明矣.然二冪之數謂倒互於弦冪之中,而已可更相表裏,居裏者則成方冪,其居表者則成矩冪,二表裏形訛而數均.又按此圖句冪之矩,朱卷居裏,是其冪以股弦差爲實,股弦并爲表,而股冪方其裏.股冪之矩,青卷居表,是其

冪以句弦差爲廣,句弦并爲袤,而句冪方其裏.是故差之與并除之,短長互相乘也.」以上據宋·楊輝詳解九章算法,文與算經十書本略異.

劉徽於「今有戶高多於廣六尺八寸,兩隅相去適一丈,門戶高廣各幾何.答曰,廣二尺八寸,高九尺六寸.」題注曰:「令戶廣爲句,高爲股,兩隅相去一丈爲弦.高多於廣六尺八寸爲句股差冪,開方除之,其所得即高廣并數,以差減并而半之,即戶廣,加相多之數,即戶高也.」

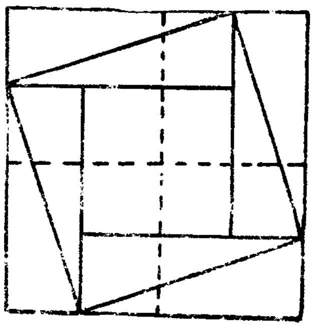
「今此術先求其半一丈自乘,爲朱冪四,黃冪一,半差自乘又倍之,爲黃冪四分之一,減實半其餘,有朱冪二,黃冪四分之一,其於大方乘四分之三,適得四分之一,故開方除之,得高廣并數之半,減差半得廣,加得戶高.」

如弦圖

$$\frac{1}{2}\left[c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]$$

$$=2\times\frac{ab}{2}+\frac{(b-a)^2}{4}$$

$$=\left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$



其所解說實開宋,元演段之源,楊輝於此題又設二圖,另見後節.按劉徽九章注屢言及「圖」,今則有注無圖,蓋已亡失,今借弦圖以爲說明,證以下文「其句股合而自乘之冪,令弦自乘倍之爲兩弦冪,以減之,其餘開方除之,爲句股差,……其出於此圖也」之語,卽言$\sqrt{2c^2-(a+b)^2}=b-a=t,$……(12)及「其(弦)實以句股差冪減,半其餘,差爲從法,開方除之,卽句也」,卽$x^2-(b-a)x=\frac{c^2-(b-a)^2}{2}$,或言$x^2+px-A=0,$……(4),蓋亦本於弦圖也.劉徽又曰:「其倍弦爲廣袤合,矩句卽爲冪,得廣卽句股差,合其矩句之冪,倍爲從法,開之亦句股差」,清·戴震以「廣袤合」,「矩句」語見趙君卿周髀注,亦謂劉說本於趙君卿也.

6. 漢·唐算家之論述

唐·房玄齡晉書卷十一天文志稱「古言天者有三家:一曰蓋天,二曰宣夜,三曰渾天.漢靈帝時蔡邕於朔方上言:宣夜之學,絕無師法,周髀術數具存,……蔡邕所謂周髀者,卽蓋天之說也,……周人志之,故曰周髀.」淮南子天文訓亦如周髀之法以測日高,蔡邕所謂術數具存,非虛語也.至尙書考靈曜,洛書甄曜度,書之眞僞,雖尙待考,其言天高八萬里

一本周髀之說.厥後渾天之說雖盛,而句股法尚長存也.晉書卷十一,天文志稱「吳時中常侍廬江王蕃善數術,傳劉洪乾象曆,依其法而制渾儀,立論考度曰;……周百四十二,而徑四十五,……以句股法言之,旁萬五千里句也,立極八萬里股也,從日邪射陽城弦也,以句股求弦法入之,得八萬一千三百九十四里三十步五尺三寸六分,天徑之半,而地上去天之數也.」

(蓋 $\sqrt{\overline{15000}^2+\overline{80000}^2}$ =81394 里,10298

因 古法一里 =300 步, =81394 里, 30 步, 894

一步 =6 尺, =81394 里, 30 步, 5 尺, 3 寸, 6 分.)

「倍之得十六萬二千七百八十八里六十一步四尺七寸二分天徑之數也,以周率乘之,徑率約之,得五十一萬三千六百八十七里六十八步一尺八寸二分,周天之數也減.

(蓋 $\frac{142}{45}\times2\times81394$ 里, 30 步, 5 尺, 3 寸, 6 分 =

$\frac{142}{45}\times162788$ 里, 61 步, 4 尺, 7 寸, 2 分 =

51368 里, 68 步, 1 尺, 8 寸, 2 分 (?).).

唐·瞿曇悉達開元占經卷一「天體渾宗」篇,所引亦同,此則應用於測天也.